Душан Чакмаков

Веројатност

Интерна скрипта, Машински факултет
Скопје, 2014

Содржина

1. Вовед **1**

2. Случајни настани и веројатност **5**

2.1. Простор на случајни настани 5
2.2. Аксиоми на веројатност 9
2.3. Класичен простор на веројатност 14
2.4. Геометриска веројатност 21
Задачи 24

3. Условна веројатност **29**

3.1. Тотална веројатност 33
3.2. Формула на Баес 35
3.3. Независност на настани 38
3.4. Серии независни експерименти 40
Задачи 44

4. Случајни променливи **49**

4.1. Дискретни случајни променливи 52
4.2. Непрекинати случајни променливи 55
4.3. Случајни вектори 69
Задачи 74

5. Бројни карактеристики на случајните променливи **79**

5.1. Очекување 79
5.2. Дисперзија 80
5.3. Бројни карактеристики на некои случајни променливи 83
5.5. Бројни карактеристики на случајни вектори 84
5.6. Коефициент на корелација 85
Задачи 89

6. Гранични теореми и примени **93**

7.1. Некои неравенства со моменти 94
7.2. Закон на големите броеви 97
7.4. Централна гранична теорема 100
Задачи 103

Решенија на задачите **105**

1

Вовед

До појавата на теоријата на веројатност, објекти на изучување во науката биле појави и случувања коишто практично го определувале исходот еднозначно. Од друга страна, јасно е дека многу од нив (можеби и сите, ако се прифати размислувањето дека сè околу нас подлежи на случајност) имаат нееднозначен и помалку или повеќе непредвидлив, т.е. случаен исход. Теоријата на веројатност е таа што ги изучува математичките модели на ваквите појави и случувања чиишто исходи се случајни, т.е нееднозначни и непредвидливи.

Уште од праисториско време, човештвото било свесно за детерминистичките појави како што се: изгревањето и заоѓањето на сонцето, менувањето на годишните времиња, плимата и осеката на мориња та, итн. Се разбира, се забележувале и многу случајни појави како: врнење дожд или снег, пронаоѓање некоја храна, доаѓање на болест итн. Со развојот на цивилизацијата, случајните појави станувале сè позабележливи и сè подоминантно влијаеле на секојдневниот живот. Тука посебно место заземаат појавите и случувањата поврзани со спортските игри и игрите на среќа, каде што случајноста на исходите е очигледна и лесно видлива.

Несомнено е дека основите на теоријата на веројатност произлегле од игрите на среќа. Според ископините на средниот исток и Индија, и уште порано во Египет, познато е дека првите примероци на коцките за играње потекнуваат уште од 3500 година пред нашата ера. Тогашните 4-страни коцки направени од коските на животните (astragalus), се претходници на модерните коцки за играње што се користат уште од средниот век.

Се смета дека првите математички проучувања на коцките за играње (а со тоа и на соодветните веројатности) датираат од 16-тиот век од страна на италијанскиот математичар и физичар Кардано (Gerolamo Cardano, 1501-1576). Тој за првпат ги вовел поимите за настани (outcomes) на експеримент и во случај кога сите настани се еднакво веројатни, тој ја вовел пресметката на веројатноста како однос на бројот на поволни настани врз бројот на сите можни. Овој пристап, заедно со точните пресметки на бројот на настани, му овозможиле на славниот астроном Галилеј (Galileo Galilei, 1564-1642) да објасни зошто при фрлање на 3 коцки веројатноста да се добие збир 10 е поголема од веројатноста да се добие збир 9 (веројатностите се 27/216 и 25/216 соодветно).

Базичните принципи на класичната теорија на веројатност биле воспоставени од Паскал (Blaise Pascal, 1623-1662) и Ферма (Pierre de Fermat, 1601-1665). Сè почнало со нивната кратка писмена кореспонденција во летото 1654 година во којашто тие разгледувале некои специфични проблеми поврзани со игрите на среќа. Еден добро-познат проблем бил поврзан со францускиот писател и математичар-аматер Шевалие (Chevalier de Méré, 1607-1684) кој тврдел дека нашол контрадикција во аритметиката. Имено, тој стекнал богатство кладејќи се на добивање на 6-ка од 4-ри фрлања на коцка. Потоа, тој ја сменил играта кладејќи се на добивање на 2-е 6-ки од 24-ри фрлања на две коцки што се покажало како неповолоно. Според него, контрадикцијата е во тоа што шансите за добивка и во двата случаи треба да се исти поради еднаквоста на односите 4/6 = 24/36. Паскал напишал во коресподенцијата дека Шевалие е голем коцкар и паметен човек, но не е геометар, укажувајќи дека веројатноста не ги следи законите на пропорции. Денеска знаеме дека веројатностите на добивка во првата игра е 0.5177, а во втората 0.4914. Интересно е дека за добивање на приближно рамноправни

шанси за 6-ка при фрлање на една коцка се потребни 4-фрлања, а не 3 како што некој би очекувал.

Од ваквите и слични проблеми произлегла класичната теорија на веројатност работена во периодот 1680-1780 година, којашто општо зборувајќи требала да го реши следниот проблем:

Како треба да се распореди влогот во една игра на среќа за да се осигура добивка ако доволно долго се игра.

Особините на ваквите игри се:

1) Теоретски немаат крај (може да се повторуваат произволен број пати);
2) Инструментот со кој се игра останува непроменет (коцка, карти, рулет, итн.);
3) Целиот процес е случаен и се прави според однапред договорено правило.

Некои од термините на теоријата на веројатност денеска наширо-ко се користат во секојдневната комуникација на луѓето. Постојано околу нас ги слушаме фразите: веројатно/неверојатно, возможно/невозможно, сигурно/несигурно, има/нема шанси итн. Изразите како "шансите се 50-50 (фифти-фифти)", "добивката е 7 спрема 4 за победа на ...", "речиси сигурно пропаѓаме", "невозможно е тоа да се случи" итн. се разбирливи и користени од поголемиот број луѓе.

Во денешно време, теоријата на веројатност и нејзинита примени реализирани преку статистиката се испреплетуваат во сите дисциплини, тргнувајќи од математиката, информатиката, физиката и инженерство-то, па преку општествените науки сè до медицината и политологијата. На пример, авторот на книгата имал прилика да помогне во изработката на неколку магистратури и докторски дисертации од областа на меди-цинските науки. Теоријата на веројатност е интегрален дел на нашиот секојдневен живот. Познатиот математичар Лаплас (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827) бил во право кога уште пред повеќе од 200 години на-пишал

Теоријата на веројатност во основа не е ништо друго од секојдневна логика (common sense) сведена на пресметки.

Генераторите на случајни броеви што се во основа на веројатносните симулации на реалноста се едно од поголемите откритија во науката. Сепак, едно е сигурно, тој генијалец што го креирал првиот генератор на случајни броеви ќе остане засекогаш анонимен како што е анонимен

и пронаоѓачот на можеби најважниот пронајдок во историјата на човештвото, тркалото.

Теоријата на веројатност е математичка дисциплина што е можеби најблиска и најдиректно поврзана со реалноста. Токму од тие причини кај неа подиректно се судруваме со одредени парадокси врзани со поимите за бесконечност, реалните броеви или многу малите големини. Најопшто кажано, тврдењата за веројатноста на случувањата се тврдења за нашите верувања. Различни луѓе имаат различни верувања за веројатноста на исто случување. Веројатностите ги изразуваме со броеви од интервалот [0, 1] или во % кога вредноста ќе ја помножиме со 100. Така, веројатностите стануваат обични броеви без дополнително значење и тоа е во основата на аксиоматскиот пристап кон теоријата на веројатност. Аксиоматскиот пристап при некои однапред дадени веројатности (комплексно прашање е како) овозможува пресметки на други веројатности на еден математички и логички конзистентен начин. Така, ние можеме да ги пресметуваме веројатностите без филозофски дискусии за нивното значење. За некој што верува дека веројатноста е чисто субјективна категорија, целата теорија ќе биде само некаква шема на пресметки или пак аксиоматскиот пристап ќе му укажува што другите веруваат и колку е тоа во согласност со неговото верување.

2

Случајни настани и веројатност

Аргументите на теоријата на веројатност се случајните настани. Во оваа глава ќе биде прецизиран овој интуитивен поим којшто понатаму овозможува аксиоматско воведување на поимот веројатност.

2.1. Простор на случајни настани

Под поимот *експеримент* подразбираме некоја активност што се одвива зависно (со учество) или независно од набљудувачот и којашто резултира со некакви исходи (резултати) што ќе ги нарекуваме *настани*. Значи под експеримент подразбираме сè, од наједноставна активност како фрлање паричка, преку комплексни лабораториски испитувања, па сè до набљудување на природата и општеството во најширока смисла.

Не сите експерименти се погодни за математичко изучување, туку само оние што задоволуваат одредени услови:

1) (Случајност), т.е. нееднозначност на исходите т.е. настаните;

Тоа значи дека експериментот треба да резултира во повеќе можни настани. На пример, фрлање коцка за играње, победа на тим во натпревар, прогноза на времето, предвидување на победа на избори

се такви експерименти. Од друга страна, паѓање камен на земјата или загревање вода до вриење не се такви експерименти.

2) (Можност за повторување), т.е. можност барем во принцип експериментот да се повтори при исти услови неограничен број пати;

Јасно е дека во која било наука не може да се изучуваат настани што повеќе никогаш нема да се случат. Значи погодни експерименти се оние што можат да се повторат или случат "многу" пати. Ако експериментот се повтори n-пати и притоа некој настан A се појавил k-пати, тогаш бројот $W(A) = k/n$ е релативна честота на A.

3) (Стабилност), што значи при кои било две повторувања (доволен број пати) на експериментот, релативните честоти на појавување на настанот A се приближно еднакви;

Ако n_1 и n_2 се се две повторувања на експериментот доволен број пати, при што настанот A се појавил k_1 и k_2 пати соодветно, тогаш за релативните честоти на појавувањето на настанот A треба да важи $W_1(A) = k_1/n_1 \approx k_2/n_2 = W_2(A)$.

Експериментите со горните особини ќе ги нарекуваме *случајни експерименти*, а нивните настани ќе ги нарекуваме *случајни настани*. Понатаму ќе нè интерсираат само случајните експерименти и случајните настани и нив ќе ги нарекуваме, едноставно, експерименти и настани.

ПРИМЕР 2.1 Да ги разгледаме експериментите со настани:

1) Фрлање паричка со множеството настани $\Omega = \{$"петка", "глава"$\}$;

2) Фрлање 2 коцки со множества настани:

$\Omega_1 = \{(x, y), x=1,2, ...,6; y=1,2, ...,6\}$ - *сите парови*;

$\Omega_2 = \{2, 3, 4, ..., 12\}$ - *збир*;

$\Omega_3 = \{$"парен збир", "непарен збир"$\}$ - *тип на збир*;

$\Omega_4 = \{$"ист број", "различен број", "збир 7"$\}$ - *недисјунктни*;

3) Повици до брза помош во еден месец со множества настани:

$\Omega_1 = \{0, 1, 2, ...\}$;

$\Omega_2 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathrm{N};$ $x =$ "број на дневни повици",
$y =$ "број на ноќни повици",
$z =$ "број на лажни повици"$\}$,

4) Пукање во мета со множество настани

$$\Omega = \{(x, y), x, y \in \mathrm{R}; x^2 + y^2 \le R^2\};$$

5) Брауново движење на честичка во временски интервал $[0, T]$ со множество настани $\Omega = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in [0, T]\}$. ■

Од горните примери, множествата настани во 1 и 2 се конечни, а во 4 и 5 бесконечни и непребројиви. Множеството настани во 3 е секогаш конечно иако не сме го ограничиле (тоа би можеле да го направиме знаејќи дека бројот на повици во пракса не може да надмине одреден број). Како што се гледа од примерите 2 и 3, исходите од еден експеримент може да се прикажат со различни множества настани. Кое множество ќе го избереме зависи од проблемот што го решаваме. На пример, во примерот 2, како исход на експериментот имаме дадено 4 различни множества настани. Од овие 4 множества, интуитивно е јасно дека Ω_1 е најинформативното множество настани бидејќи секој настан од другите множества: Ω_2, Ω_3 и Ω_4, може да се претстави како колекција на настани од Ω_1.

2.1.1. Простор на елементарни настани

Множеството настани Ω го нарекуваме простор на *елементарни настани* акко

а) При секоја реализација на експериментот добиениот настан е елемент на Ω;

б) Нема два настана од Ω што може истовремено да настапат (да се случат).

Ако ги разгледаме просторите на настани Ω_1, Ω_2, Ω_3 и Ω_4 од примерот 2, јасно е дека

Ω_1, Ω_2 и Ω_3 се простори на елементарни настани;

Ω_4 не е, бидејќи настаните "различен број" и "збир 7" може истовремено да се случат.

Од Ω_1, Ω_2 и Ω_3, како што веќе нагласивме, Ω_1 е најинформативен бидејќи секој настан од Ω_2 и Ω_3 може да се претстави преку настани од Ω_1, додека обратното не важи. На пример,

$4 \in \Omega_2$ се претставува со $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ од Ω_1; но

$(5, 4) \in \Omega_1$ не може да претстави со настани од Ω_2 ($9 \in \Omega_2$ опфаќа многу настани од Ω_1).

Јасно е дека просторот на елементарни настани не ги исцрпува сите настани во врска со експериментот. Тој само ги дава сите елементарни

исходи на експериментот. Нека Ω е просторот на елементарните настани во врска со некој експеримент. Тогаш, ако A е настан во врска со тој експеримент, на A секогаш може да му придружиме подмножество од Ω составено од оние елементарни настани што го претставуваат (опишуваат) A. На пример, во врска со експериментот - фрлање на две коцки, даден настан A може да се претстави преку на настани од Ω_1 на следниот начин:

A = "сумата е парен број", $A = \{(x, y), x + y = 2k, x, y = 1, 2, \ldots, 6\}$;

A = "ист број", $A = \{(x, x), x = 1, 2, \ldots, 6\}$;

A = "збир 8", $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$.

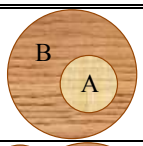
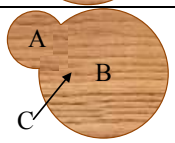
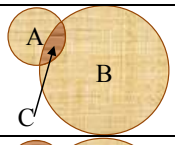
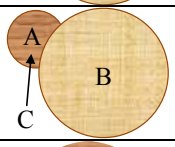
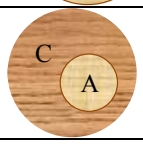
Од дискусијата произлегува дека настан е само едно подмножество на множеството (просторот) на елементарни настани Ω. Понатаму ќе видиме дека овој поглед на настаните останува да важи и во случаите кога Ω е бесконечно и непреброиво.

2.1.2. Операции со настани

Од сите настани во врска со некој експеримент, два настана имаат стандардно значење. Првиот од нив е празниот настан $\varnothing \subseteq \Omega$, т.е. со други зборови *невозможен* настан бидејќи никогаш не се случува. Вториот е целото $\Omega \subseteq \Omega$, коешто се нарекува *сигурен* настан бидејќи секогаш се случува.

Настаните се во основа подмножества и со нив може да се прават истите операции како и со множествата, но со малку различна интерпретација на резултатите. Нека A и B се два настана во врска со некој експеримент. Во табелата дадена подолу, наведени се основните операции со настани.

При операциите со настани важат истите правила како кај операциите со множества. Важи на пример $A - \overline{B} = A \cdot B$ или $A = A - B + A \cdot B$, така што основните операции со настани се сосема аналогни на оние со множествата. Сепак, "читањето" на операциите со настани е малку специфично и не е исто како кај множествата (види ја табелата). Некои автори прават разлика меѓу операциите $\cup$ и + (+ користат само за унија на дисјунктни настани), како и меѓу операциите $\cap$ и $\cdot$ ($\cdot$ користат само за пресек на дисјунктни настани). Во оваа книга, ние ќе ги користиме операциите + и $\cdot$ за унија и пресек со исто значење на $\cup$ и $\cap$. Одбегнувањето на $\cup$ и $\cap$ е со цел да се нагласи дека работиме со настани, а не со множества.

Операција	Интерпретација	Слика	Пример
$A \subseteq B$	А го повлекува В (В следува од А); секогаш кога се случува А се случува и В.		ако А = "ист број", а В = "сумата е парен број", тогаш $A \subseteq B$.
$C = A \cup B$ или $C = A+B$	С е збир на А и В и се случува кога се случил барем еден од А или В.		ако А = "ист број", а В = "различен број", тогаш $A+B = \Omega$.
$C = A \cap B$ или $C = A \cdot B$	С е пресек (производ) на А и В и се случува кога се случил и А и В.		ако А = "ист број", а В = "збир 8", тогаш $A \cdot B = \{(4,4)\}$.
$C = A \backslash B$ или $C = A-B$	С е разлика на А и В и се случува кога се случил А и не се случил В.		ако А = "ист број", а В = "збир помал од 9", тогаш $A-B = \{(5, 5), (6, 6)\}$.
$C = A^c$ или $C = \bar{A}$	С е спротивен настан (комплемент) на А и се случува кога не се случил А.		важи $\bar{A} = \Omega - A$, $A + \bar{A} = \Omega$, $A \cdot \bar{A} = \varnothing$.

2.2. Аксиоми на веројатност

Нека Ω е множество на елементарни настани. Подмножествата на Ω се настани на кои сакаме да им доделуваме веројатности, или со други зборови, мери за шансите на нивното случување. Во многу ситуации, не сите подмножества се од интерес. Уште повеќе, кога Ω е непребројиво, не постои добар начин за секое подмножество на Ω да се дефинира конзистентна мера, т.е. веројатност, што би задоволувала одредени "логични" правила. Од тие причини, се прави редукција на подмножествата на Ω за кои се дефинира веројатноста. Редуцираната фамилија подмножества се бара да биде затворена во однос на стандардните операции со множества: униите, комплементите и пресеците, и вообичаено се нарекува σ-алгебра.

Дефиниција 2.1 Нека Φ биде фамилијата подмножества на Ω коишто ќе ги нарекуваме настани (на кои ќе им доделуваме веројатности). Тогаш Φ е σ-алгебра акко важи:

1) $\Omega \in \Phi$,
2) ако $A \in \Phi$, тогаш и $\bar{A} \in \Phi$,
3) ако $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Phi$ е пребројива низа настани, тогаш и $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots \in \Phi$.

Аксиомите 1-3 може да сумираат со: σ-алгебрата Φ го содржи Ω (1), затворена е во однос на комплементи (2) и пребројивите збирови, т.е. унии (3). Од $\overline{A_1+A_2+ \ldots +A_n+ \ldots} \in \Phi$ следи дека $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n \cdot \ldots \in \Phi$, т.е. Φ е затворена и во однос на пребројивите производи (пресеци).

За конечни или пребројиви Ω, најголемото Φ се состои од фамилијата на сите подмножества на Ω бидејќи тие формираат σ-алгебра. Кога $|\Omega| = n$, имаме 2^n подмножества, т.е. настани. Најмали σ-алгебри Φ се $\{\Omega, \varnothing\}$ и потоа $\{\Omega, A, \bar{A}, \varnothing\}$. За секој избор на подмножества на Ω, тие, заедно со подмножествата што се добиваат со нивни збирови, производи, спротивности исто така формираат σ-алгебра Φ.

Најголемата σ-алгебра Φ на реалната оска ги содржи сите интервали од секој тип, вклучувајќи ги бесконечните интервали како и сите нивни пребројиви збирови, производи и спротивности. Дали постојат множества на реалната оска што не се во Φ? Одговорот е да, но нивната конструкција е комплицирана и тие никогаш не се појавуваат во апликациите на веројатноста, па затоа немаат некоја практична вредност. Постоењето на ваквите множества се еден симптом на "нереалност" на реалните броеви.

Откако прецизно е дефиниран просторот на настани Φ, останува да се дефинира веројатносната мера, т.е. правила по кои на настаните им придружуваме реални броеви - веројатности.

Дефиниција 2.2 Нека Φ е σ-алгебра на настани. Веројатност p е пресликување од Φ во R (p: $\Phi \to R$) за кое важи:

a1) $p(A) \geq 0, \ \forall A \in \Phi$,

a2) $p(\Omega) = 1$,

a3) за конечно Ω

$$p(A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2), \ \forall A_1, A_2 \in \Phi \text{ и } A_1 \cdot A_2 = \varnothing$$

за бесконечно Ω

$$p(A_1+A_2+ \ldots +A_n+ \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n) + \ldots$$

$$\forall A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Phi \text{ и } A_i \cdot A_j = \varnothing.$$

Тројката (Ω, Φ, p) се нарекува простор на веројатност.

Кога множеството елементарни настани Ω е конечно или пребројиво се добива *дискретен простор на веројатност*. Бесконечно и непребројиво Ω води кон *непрекинат простор на веројатност*, за кој ќе стане збор понатаму.

Во пракса, при решавање на веројатносни и статистички проблеми, аксиоматскиот пристап директно не се користи. Тогаш се важни особините и од нив изведените техники на пресметка.

Теорема 2.1 Веројатноста p ги има следните особини:

1) $p(\varnothing) = 0$;

2) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$;

3) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; p(A) \le p(B)$;

4) $0 \le p(A) \le 1$;

5) $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A \cdot B)$;

6) ако $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ или

ако $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ и $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$

тогаш $p(A) = \lim\limits_{n\to\infty} p(A_n)$.

Доказ: Овие особини следуваат директно од аксиомите:

1) од $\Omega \cdot \varnothing = \varnothing$ следува $1 = p(\Omega) = p(\Omega+\varnothing) = p(\Omega)+p(\varnothing) = 1+p(\varnothing)$;

2) следува од $1 = p(\Omega) = p(A + \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$;

3) од $B = A + \bar{A} \cdot B$ и $A \cdot (\bar{A} \cdot B) = \varnothing$ следува $p(B) = p(A) + p(\bar{A} \cdot B) \ge p(A)$;

4) од $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$ следува $p(\varnothing) \le p(A) \le p(\Omega)$ т.е. $0 \le p(A) \le 1$,

5) од $A + B = A + (B - A)$ и $B = A \cdot B + (B - A)$ следува

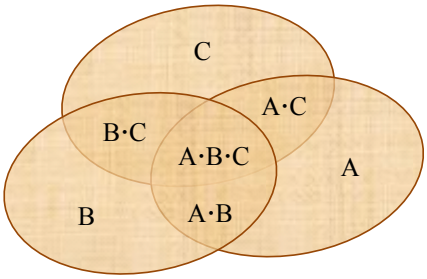
$p(A + B) = p(A) + p(B - A)$ и $p(B) = p(A \cdot B) + p(B - A)$

и со одземање на овие равенства се добива особината 5.

6) следува од особината: секоја монотоно растечка (опаѓачка) низа и ограничена од горе (долу) конвергира (растечката низа веројатности е ограничена со 1, опаѓачката со 0). ■

Особината 5) аналогно се обопштува на случај на повеќе од 2 настана (види слика),

$$p(A+B+C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC),$$



или општо,

$$p(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\ldots+\mathrm{A}_n) = \sum_{i=1}^{n} p(\mathrm{A}_i) - \sum_{1\le i,j\le n}^{n} p(\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j) + \sum_{1\le i,j,k\le n}^{n} p(\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k) - \ldots + (-1)^{n-1} p(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n).$$

Оваа формула обично се нарекува просејување (sieve) или принцип на вклучување-исклучување (inclusion-exclusion principle). Таа лесно се докажува со индукција.

Да разгледаме неколку примери во врска со настаните и дефиницијата на веројатност.

ПРИМЕР 2.2 Нека A, B и C се настани во некој простор на веројатност.

Ако $p(\mathrm{A}) = 0.3$, $p(\mathrm{B}) = 0.4$ и $p(\bar{\mathrm{A}}\cdot\bar{\mathrm{B}}) = 0.4$, пресметај ја веројатноста $p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})$.

Решение

Од $\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ и $p(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 1 - p(\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}})$, користејќи ја особината 5 од теоремата 2.1 добиваме

$p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 0.3 + 0.4 - 1 + 0.5 = 0.2.$ ■

Во основа, веројатност е секоја функција што ги задоволува горните аксиоми, без разлика на нејзината интерпретација. Во таа смисла, веројатноста е чисто математички концепт исто како што е, на пример реалната оска R. Веројатносниот простор (Ω, Φ, p) дава правила за манипулации со веројатностите на настаните од интерес, но не дава начин како овие веројатности да се добијат. Затоа математичката теорија на веројатност се нарекува и веројатносно сметање (calculus of probabilities). Кога решаваме некој конкретен веројатносен проблем ние одиме многу подалеку од математичката дефиниција, при што основно прашање е како да ги зададеме веројатностите на елементарните настани. Обично за тоа користиме "логични", "очигледни", "разумни" аргументи, како што е физичката симетричност на објектот (пр. фрлање коцка)

или претпоставената несиметричност (пр. победа во натпревар). Генерално, може да се разгледуваат 3 интерпретации на веројатноста дадени преку: класичен пристап, релативни фреквенции и степен на верување.

Класичната интерпретација се базира на доделување еднакви веројатности на елементарните настани според претпоставката за физичка симетрија. Интерпретацијата преку релативните фреквенции се базира на статистичка стабилност на настаните при повторувањата на експериментите. Степенот на верување во основа се базира на согледувања, докази и убедувањето во свеста на индивидуата. Во оваа книга е користен "најстандардниот" пристап преку релативните фреквенции. За анализа и моделирање на емпириски податоци во статистиката, овој пристап е секако најсоодветен.

Откако ги имаме аксиомите и основните особини на веројатноста, некој би можел да се запраша што понатаму има да се изучува. Да забележиме дека во конкретен простор на веројатност познати се веројатностите само на некои настани, најчесто на елементарните. Во теоријата на веројатност развиени се многу техники што овозможуваат пресметка на веројатностите на едни настани преку веројатностите на други настани. Но зошто непознатите веројатности не се проценуваат директно, преку релативните честоти користејќи симулации? Одговорот на тоа не е едноставен. Некои веројатности се премали, или симулацијата е прекомплексна за да би можела да се направи. На пример, надежноста на еден комплексен систем е многу полесно да се пресмета отколку процени со симулации. Како би ја процениле веројатноста на дефект во еден нуклеарен реактор? Уште поважно, многу појави и случувања не може да се симулираат ниту компјутерски ниту реално, на пример, кога експериментот не може да се повторува прозволен број пати (археолошки ископини, болести, несреќни случаи итн.).

За решавање проблеми од теоријата на веројатност најпрво е потребно да се дефинира соодветен простор на веројатност (Ω, Φ, p) во кој ќе се бара решението. Потоа се колектираат познатите веројатности, обично на елементарните настани од Ω. Дури потоа може да се пресметуваат веројатностите на други настани од Φ. Вообичаен принцип е пресметката на веројатностите на покомплексни настани да оди преку веројатностите на поедноставните настани.

ПРИМЕР 2.3 Една коцка е изработена така што честотата на појавување на еден број е пропорционална со тој број (на пример, со додадени тежини спрот броевите). Да се пресмета веројатноста на добивање парен број.

Решение

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(\omega_i) = k \cdot i$

од $\sum_{i=1}^{6} p(\omega_i) = 1$ добиваме $k(1+2+3+4+5+6) = 1 \Rightarrow k = 1/21$

за A = {2, 4, 6} имаме $p(A) = 2/21 + 4/21 + 6/21 = 4/7$. ■

ПРИМЕР 2.4 Да се пресмета веројатноста дека при фрлање 2 парички тие ќе паднат со различни страни.

Решение

Да разгледаме 3 решенија:

а) Ω = {ПП, ПГ, ГП, ГГ}, $p(\omega_i) = 1/4$; за A = {ПГ, ГП}, $p(A) = 1/2$;

б) Ω = {"0 П", "1 П", "2 П"}, $p(\omega_i) = 1/3$; за A = {"1 П"}, $p(A) = 1/3$;

в) Ω = {"две П", "П и Г", "две Г"}, $p(\omega_i) = 1/3$; за A = {"П и Г"}, $p(A) = 1/3$.

Решението (а) е точно, а (б) и (в) се погрешни бидејќи кај нив веројатностите за елементарните настани не се добри, т.е. тие не соодветствуваат на релативните честоти на нивното случување, што може и експериментално да се потврди. Во (б) и (в) би требало да се стави p("2 П") = p("две П") = 1/4, p("1 П") = p("П и Г") = 1/2 и p("0 П") = p("две Г") = 1/4 и тогаш сé би било во ред. Сепак, просторот на елементарни настани во (а) е најинформативен и дава еднаквоверојатни елементарни настани. ■

Кога работиме со елементарни настани во врска со поголем број исти објекти, општо правило е дека самите објекти треба да се третираат како различни и така да се добие најинформативен простор на веројатност (решението а) од примерот 2.4). Постојат многу мал број појави во физиката поврзани со честички на податомско ниво коишто треба да се третираат како физички еднакви и за кои експериментално е потврдено дека треба да се примени простор на веројатност соодветен на решението (б) или (в).

2.3. Класичен простор на веројатност

Класичната веројатност е почетната точка од којашто потекнува денешната модерна теорија и, како што дискутиравме во воведниот дел, таа произлегла во 17 век од игрите на среќа. Интуитивно, класичната веројатност се занимава со конечни множества елементарни настани коишто се еднаквоверојатни. Попрецизно, нека (Ω, Φ, p) е дискретен простор на веројатност каде што Ω е конечно.

Дефиниција 2.3 (Ω, Φ, p) е класичен простор на веројатност акко $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ и $p(\omega_i) = 1/n$.

Сега, ако настанот $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, ..., \omega_{ik}\}$, веројатноста на А е едноставно дадена со $p(A) = k/n$. Вообичаено k се нарекува *број на поволни случаи*, а n е *број на сите можни случаи*. Токму ова е начинот на кој повеќето луѓе размислуваат за веројатноста.

Кога Ω е преброиво, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$, $p(\omega_i)$ треба да бидат избрани така што редот $\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$ (да биде конвергентен, со сума 1). Сега, ако настанот А е составен од бесконечно елементарни настани $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}, \ldots\}$, неговата веројатност $p(A)$ се сведува на сума на конвергетен ред, т.е. $p(A) = \sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_{i_k})$.

ПРИМЕР 2.5 Колкава е веројатноста при фрлање 2 коцки да се добие: а) збир 7; б) различни броеви; в) збир поголем од 7?

Решение

Едноставно ги броиме поволните случаи и тој број го делиме со бројот на сите можни случаи, т.е. со бројот на елементи во Ω.

$\Omega = \{(x, y) \mid x, y = 1,2,...,6\}$, $n = |\Omega| = 36$

а) p("збир 7") $= \dfrac{6}{36} = 0.1667$;

б) p("различни броеви") $= \dfrac{30}{36} = 0.8333$;

в) p("збир поголем од 7") $= \dfrac{15}{36} = 0.4167$. ■

ПРИМЕР 2.6 (Chevalier de Méré). Колкава е веројатноста да се добие 6-ка од 4 фрлања на коцка? Колкава е веројатноста да се добијат 2-е 6-ки од 24 фрлања на 2 коцки?

Решение

Проблеми со "барем", "најмалку", "најмногу", "не помалку", "не повеќе" често пати позгодно се решаваат преку обратните настани. Во овој случај имаме

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i = 1,2,...,6\}$, $n = |\Omega| = 6^4$ и сега ако

А = "барем 1-на 6-ка од 4 фрлања" тогаш

$\bar{A}$ = "нема 6-ка од 4 фрлања"

и користејќи варијации со повторување добиваме

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0.5177$$

За вториот проблем, на сосема идентичен начин добиваме

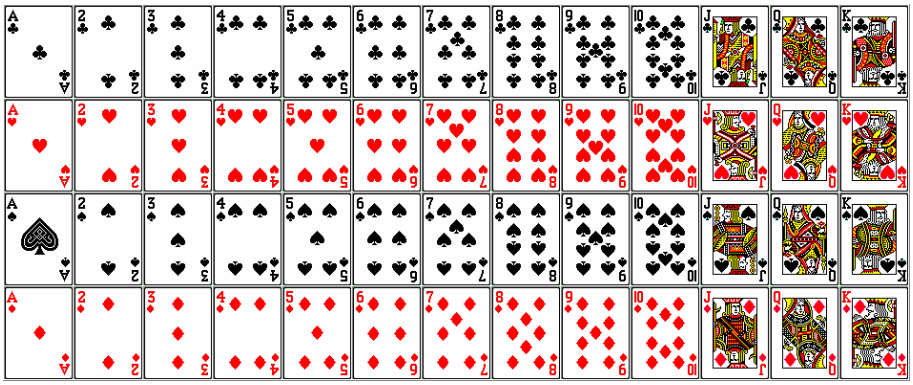
$\Omega = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{24}, y_{24})) \mid x_i, y_i = 1,2,\ldots,6\}$, $n = |\Omega| = 36^{24}$ и

A = "барем еднаш 2-е 6-ки од 24 фрлања"

$\bar{A}$ = "нема 2-е 6-ки од 24 фрлања"

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0.4914. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.7 Од шпил се влечат 3 карти. Колкава е веројатноста да се добие: а) еден ас; б) барем една треф карта; в) барем 2 црвени карти?



Решение

Бидејќи редоследот на извлечените карти не е важен туку само содржината, за пресметка на поволните и можните случаи користиме комбинации.

$\Omega = \{(x, y, z) \mid x, y, z = 1, 2, \ldots, 52$ и $x \neq y \neq z\}$, $n = |\Omega| = \binom{52}{3}$

а) $p(\text{"еден ас"}) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{48}{2}}{\binom{52}{3}} = 0.2042;$

б) p("барем една треф") = $1 - p$("ниедна треф") $= 1 - \dfrac{\binom{13}{0}\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = 0.5865;$

в) p("барем 2 црвени") = p("2 црвени") + p("3 црвени") =

$$= \frac{\binom{26}{2}\binom{26}{1}+\binom{26}{3}\binom{26}{0}}{\binom{52}{3}} = 0.4246. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.8 На полица на случаен начин се поставени 40 книги меѓу кои и еден 4-томен роман. Колкава е веројатноста томовите да се во добар редослед, одлево-надесно (не мора соседни)?

Решение

Ω = {сие пермурации од 40 книги}, $n = |\Omega| = 40!$

За поволните случаи да забележиме дека 4-те тома може во правилен редослед да се ставаат меѓу другите 36 книги колку што има избори на 4 елементи од 40 (тоа се комбинации). За секој таков избор другите 36 книги може произволно да се пермутираат. Оттука добиваме

$$p(\text{"томовите се во добар редослед"}) = \frac{\binom{40}{4}\cdot 36!}{40!} = \frac{1}{24} = 0.0417. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.9 Се запишува случаен троцифрен број. Колкава е веројатноста да биде делив барем со еден од броевите 2 и 5.

Решение

Ω = {целите броеви од 100 до 999}, $n = |\Omega| = 900$ и ако

A = "делив со 2", B = "делив со 5" треба да се најде p(A+B)

$$p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = \frac{450}{900} + \frac{180}{900} - \frac{90}{900} = 0.6$$

или со обратниот настан $\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$ = "не е делив со 2 и со 5"

$$p(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = 1 - p(\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}) = 1 - \left(\frac{450}{900} - \frac{90}{900}\right) = 1 - 0.4 = 0.6. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2.10 Изгубен е 4-цифрениот код (pin) на кредитна картичка. Колкава е веројатноста: а) сите цифри да се различни; б) да има 3 различни цифри; в) да има 2 различни цифри; г) сите цифри да се исти?

Решение

Бидејќи редоследот на цифрите е важен, работиме со варијации.

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i = 0,1,2,...,9\}$, $n = |\Omega| = 10^4$

а) p("сите цифри се различни") $= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10^4} = 0.5040$;

б) Имаме $120 = \binom{10}{3}$ различни тројки различни цифри и за секоја тројка имаме 12 пермутации со 2 повторувања на првата, 12 пермутации со 2 повторувања на втората и 12 пермутации со 2 повторувања на третата цифра. Тоа дава

p("има 2 различни цифри") $= \dfrac{(12+12+12)120}{10^4} = 0.4320$;

в) Имаме 45 различни парови различни цифри и за секој пар имаме 4 пермутации со 3 повторувања на првата, 4 пермутации со 3 повторувања на втората и 6 пермутации со 2 повторувања и на првата и на втората цифра. Тоа дава

p("има 3 различни цифри") $= \dfrac{(4+4+6)45}{10^4} = 0.0630$;

г) p("сите цифри се исти") $= \dfrac{10}{10^4} = 0.0010$.

Се разбира, за контрола проверуваме дека збирот на сите 4 веројатности дава 1 (тоа е сигурен настан). ■

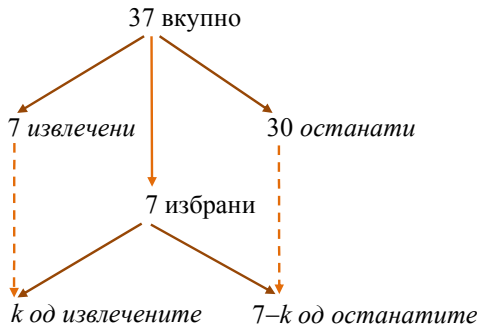
ПРИМЕР 2.11 Се извлекуваат 7 од броевите 1, 2, ..., 37 без враќање (лотарија 7 од 37). Колкава е веројатноста со избрани 7 броја да се добијат k погодоци (k = 0,1, ..., 7)?

Решение

Бидејќи редоследот на броевите не е важен, работиме со комбинации.

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_7) \mid \omega_i = 0, 1, 2, ..., 37\}$, $n = |\Omega| = \binom{37}{7} = 10295472$

Поволните случаи ги пресметуваме со помош на шемата



k	p("k погодоци")
0	0.197737413
1	0.403713885
2	0.290673997
3	0.093164743
4	0.013802184
5	0.000887283
6	0.000020397
7	0.000000097

добиваме $p(\text{"}k \text{ погодоци"}) = \dfrac{\binom{7}{k}\binom{30}{7-k}}{\binom{37}{7}}$. ■

Интуитивната проверка на резултатот при решавање на веројатносни проблеми може да биде важен чекор за контрола на исправноста на решението. Ако резултатот не се совпаѓа со нашата интуиција, логично е да се направи проверка на решението. Следниот пример е славен по својата репутација на конфликт со интуицијата.

ПРИМЕР 2.12 Колкава е веројатноста во група од k луѓе барем двајца да имаат ист роденден?

Решение

Како и во други случаи, проблем со "барем" позгодно се решава преку обратниот настан. Нека

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \mid \omega_i = 1,2,\ldots,356\}$, $n = |\Omega| = 356^k$ и сега ако

A = "барем 2-ца имаат ист роденден" тогаш

$\bar{A}$ = "сите имаат различен роденден"

и со помош на варијациите добиваме

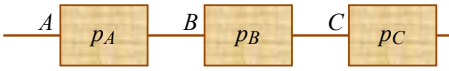
$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-k+1)}{365^k}.$$

Во следната табела се дадени решнијата за некои k:

k	p(A)
10	0.1169
20	0.4115
23	0.5073
30	0.7064
40	0.8912
50	0.9704

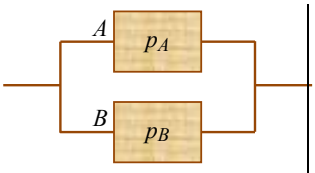
Да забележиме дека ова е еден од проблемите што не е во согласност со нашата интуиција бидејќи доволни се само 23 луѓе за веројатноста да имаат ист роденден биде преку 50%. ■

ПРИМЕР 2.14 Во инжинерските системи, компонентите (подсистемите) може да се поврзуваат сериски, но за поголема сигурност и паралелно. Секоја компонента има веројатност дека ќе работи исправно. Системот работи исправно кога која било серија од компоненти работи исправно. На пример, подолу е пресметана надежноста на еден сериски и паралелен систем S со дадени надежности на компонентите p_A, p_B и p_C.



Сериски систем работи исправно ако секоја компонента е исправна,

$$p(S) = p_A \cdot p_B \cdot p_C.$$



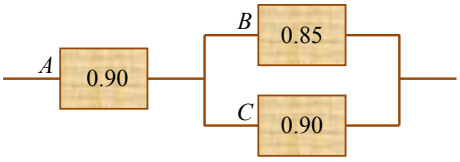
Паралелен систем работи исправно ако барем една од компонентите е исправна,

$$p(S) = p_A + p_B - p_A \cdot p_B.$$

Користејќи обратни настани го имаме истото

$$p(S) = 1 - (1 - p_A)(1 - p_B).$$

Пресметај ја надежноста на системот



Решение

Ако со A, B и C ги означиме настаните на исправна работа на трите компоненти, системот работи исправно кога се случува настанот

A(B + C) , A е исправно и B или C е исправно. Оттука

$$p(\mathrm{A}(\mathrm{B} + \mathrm{C})) = p(\mathrm{AB} + \mathrm{AC}) = p(\mathrm{AB}) + p(\mathrm{AC}) - p(\mathrm{ABAC}) =$$

$$p(\mathrm{A})p(\mathrm{B}) + p(\mathrm{A})p(\mathrm{C}) - p(\mathrm{A})p(\mathrm{B})p(\mathrm{C}) =$$

$$0.90 \cdot 0.85 + 0.90 \cdot 0.90 - 0.90 \cdot 0.85 \cdot 0.90 = 0.8865.$$

Паралелните компоненти често пати позгодно се работат со обратните настани. Со таков пристап системот работи исправно кога се случува

$\mathrm{A}(\overline{\overline{\mathrm{B}} \cdot \overline{\mathrm{C}}})$, A е исправно и не се неисправни и B и C. Оттука

$$p(\mathrm{A}(\overline{\overline{\mathrm{B}} \cdot \overline{\mathrm{C}}})) = p(\mathrm{A})p(\overline{\overline{\mathrm{B}} \cdot \overline{\mathrm{C}}}) = p(\mathrm{A})(1 - p(\overline{\mathrm{B}})p(\overline{\mathrm{C}})) =$$

$$0.90(1 - (1 - 0.9)(1 - 0.85)) = 0.8865. \blacksquare$$

2.4. Геометриска веројатност

Дефинирањето на веројатноста во недискретен случај, кога Ω е бесконечно и непребројиво води кон одредени проблеми. На пример, нека $\Omega = \{x \mid x \in [0, 1]\}$ и нека го повторуваме 10^6 пати експериментот на случаен избор на број од Ω. Сега еден елементарен настан, да речеме појавување на бројот 0.82025342341725, може да се случи еднаш или ниеднаш (поверојатно) во овие 10^6 повторувања на експериментот. Која веројатност да му доделиме на овој настан?

$$p(0.82025342341725) = 10^{-6} \quad \text{или} \quad p(0.82025342341725) = 0.$$

Многу напори се вложени во обидите веројатноста да се дефинира "логично", како граница на релативната честота на случување на настаните

$$p(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{W}(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n}.$$

иако физички секој експеримент се повторува само конечен број пати (n е секогаш конечно). За жал, оваа граница не постои во математичка смисла. Интуитивно е јасно дека за непребројиви множества оваа граница кога би конвергирала, би конвергирала кон 0. Оттука, единствен модел кој би можел да функционира во недискретен случај е на секој елементарен настан да му се додели веројатност 0. Од друга страна, при повторување на вакви експерименти се случуваат елементарни настани па се поставува прашањето, каде е веројатноста?

Решението на оваа ситуација е (ненулта) веројатност да се доделува на области (на пример, на реалната оска на интервали), а не на поединечни настани.

Горенаведените проблеми од теоријата на веројатност имаат свој корен во старите парадокси како што се: Ахил и желката, истрелана стрела и многу други. Имено сите тие сугерираат дека реалните брови се измислен, т.е. нереален концепт. На пример, парадоксот на Ахил и желката е во следното: ако пред почеток на трката Ахил ѝ даде предност на желката, тој веќе никогаш нема да ја стигне. Имено, кога тој ќе стигне до позицијата на желката таа ќе биде малку понапред, па кога тој ќе дојде до следната нејзина позиција таа повторно ќе биде малку понапред, и така до бескрајност тој ќе ѝ се приближува, но никогаш нема да ја стигне.

Се разбира во реалноста тоа не се случува и Ахил брзо ја престигнува желката. Едно логично објаснување е дека намалување до бескрајност на простор-временското растојание не е можно, туку движењето се одвива по некој минимален интервал (веројатно Планков = 1.616252(81) $\times 10^{-35}$ метри) во кој Ахил поминува поголем пат од желката и ја престигнува. Тоа значи дека позициите на Ахил и желката треба да се одредат преку поделбата на растојанието на минимални интервали и потоа да се пресмета кој од нив за одредено време колку интервали поминал. Така парадоксот исчезнува.

Ова сугерира дека и многу малите рационални броеви се исто така сомнителен концепт поради кој се јавуваат истите парадокси. Сомнителниот концепт за бескрајност (чија спротивност се бескрајно малите броеви) е основен концепт во модерната математика и затоа таа може да се смета како релативно добра (или не толку добра, но неверојатно корисна) апроксимација на реалноста. Можно е реалноста да се потчинува на логиката на дискретни големини, но така прилагоден (дискретен) математички апарат споредлив со оној на модерната математика базирана на бесконечности едноставно не постои.

Сега ќе ја воведеме геометриската веројатност што е пандан на класичниот простор на веројатност, во непрекинат простор на веројатност. Нека Ω е бесконечно и непребројиво и претставува некој геометриски објект: 1-димензионален ако е на реалната оска, 2-димензионален во рамнината, 3-димензионален во просторот, или општо, n-димензионален во просторот R^n. Нека $\mathrm{S} \subseteq \Omega$ означува случаен настан.

Дефиниција 2.4 Геометриска веројатност на S е бројот $p(\mathrm{S})$ даден со

$$p(\mathrm{S}) = \frac{m(\mathrm{S})}{m(\Omega)}\,,$$ каде што $m(\cdot)$ е мера[1] на множеството.

Типична мера на множеството претставува: *должина на интервал* на реалната оска, *плоштина* во рамнината, *волумен* во просторот, или општо, *n-димензионален волумен* во просторот R^n.

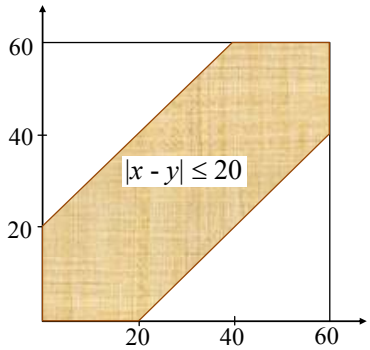
[1] Прецизно зборувајќи, мера не може да се дефинира на секое множество. Во математиката се прави рестрикција на множествата за кои мерата се дефинира, со цел таа да задоволи некои "логични" правила.

ПРИМЕР 2.15 Двајца пријатели закажале средба меѓу 10 и 11 часот со договор секој да го чека другиот најмногу 20 минути. Колкава е веројатноста дека ќе се сретнат ако времето на доаѓање е случајно?

Решение

Ако со x, y ги означуваме времињата на пристигнувањето, за Ω добиваме

$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 60]\}$, $m(\Omega) = 3600$



$S = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 60], |x - y| \le 20\}$

Плоштината на S ја добиваме едноставно од сликата

$m(S) = 3600 - 2 \cdot 40 \cdot 40/2 = 2000.$

Така добиваме

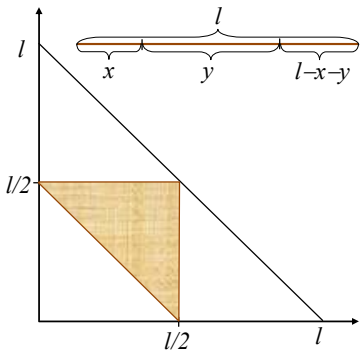
$p(\text{"ќе се сретнат"}) = \dfrac{2000}{3600} = 0.5556.$ ■

ПРИМЕР 2.16 Стап се крши на две случајни места. Колкава е веројатноста дека од деловите може да се направи триаголник?

Решение

Ако со x, y ги означуваме должините на првите два дела, добиваме

$\Omega = \{(x, y) \mid x \ge 0, y \ge 0, x+y \le l\}$, $m(\Omega) = l^2/2$



S ќе го добиеме од условите за постоење на триголник:

$x \le y + (l - x - y) \Rightarrow x \le l/2$

$y \le x + (l - x - y) \Rightarrow y \le l/2$

$(l - x - y) \le x + y \Rightarrow x + y \le l/2$ што дава

$S = \{(x, y) \mid x \le l/2, y \le l/2, x+y \le l/2\}.$

$p(\text{"може да се формира триаголник"}) =$

$$= \frac{(l/2)(l/2)/2}{l^2/2} = 0.25.$$ ■

ЗАДАЧИ

1. Да се провери кои од следните равенства со настани се точни:

   а) $\overline{A}+\overline{B}=\overline{A\cdot B}$; б) $(A+B)-B=A-A\cdot B$; в) $(A+B)-C=A+(B-C)$;

   г) $A\cdot\overline{B}\cdot C\subset A+B$; д) $A\cdot B\cdot C=A\cdot B(B+C)$; ѓ) $(\overline{A+B})C=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$.

2. Нека A, B и C се три произволни настани. Да се најдат изразите со операции со сите три настани такви што:

   а) се случил само A;

   б) се случиле A и B, но не C;

   в) се случиле сите три настани;

   г) се случил најмалку еден од настаните;

   д) се случил еден и само еден од настаните;

   ѓ) не се случил ниеден од настаните;

   е) се случиле не повеќе од два настана.

3. Еден инженерски систем има две компоненти. Ги дефинираме следните настани

   A = "првата компонента е исправна" и
   B = "втората компонента е исправна".

   Опиши ги следните настани преку A, $\overline{A}$, B и $\overline{B}$:

   а) Најмалку една компонента е исправна;
   б) Една компонента е исправна, а една е дефектна.

4. Ако $p(A)=0.3$, $p(B)=0.2$ и $p(AB)=0.1$, најди ги следните веројатности:

   а) $p(A+B)$; б) $p(\overline{A}B)$; в) $p(\overline{A+B})$; г) $p(\overline{A}+B)$.

5. Производител на сијалички за автомобили ги тестира сијаличките на интензитет (на осветлување) и трајност. Во следната табела се дадени резултатите од 130 светилки

		Трајност:	
		задоволува	не задоволува
Интензитет:	задоволува	117	3
	не задоволува	8	2

   а) Оцени ја веројатноста дека една сијаличка ги задоволува двата теста;

   б) Оцени ја веројатноста дека една сијаличка задоволува во интензитет, но не по трајност;

в) Оцени ја веројатноста дека една сијаличка не ги задоволи и двата теста.

6. Број на кредитна картичка има 16 цифри, но само околу 100 милиони броеви се валидни. Колкава е веројатноста случајно да се погоди валиден број?

7. Треба да се погоди број на регистерска табличка што се состои од 3 цифри следени со 2 букви (A-Z). Колкава е веројатноста таа да се погоди ако:

   а) нема никаква додатна информација,

   б) се знае дека има 8-ца и буква C,

   в) почнува со 4 и завршува со H.

8. Четири машини произведуваат исти делови. Првата машина е најмодерна, додека втората и третата произведуваат само 60% од првата, а најслабата 4-та машина само 30% од првата. Колкава е веројатноста случајно избран дел да е од втората или четвртата машина?

9. Страните на една коцка се нумерирани со броевите 1, 1, 3, 3, 3, 3, а на друга со броевите 2, 2, 2, 2, 4, 4. Да се пресмета веројатноста дека при фрлањето на двете коцки на првата ќе се појави помал број отколку на втората.

10. Во џеп имаме 9 парички и тоа, 4 од 50 денари, 2 од 20 денари и 3 од 10 денари. Вадиме од џепот 5 парички. Пресметај ја веројатноста вредноста на извадените да е поголема од вредноста на оние што останале во џепот.

11. На полици се наоѓаат расфрлани n парови кондури. Ако $2r$ кондури се одберат случајно ($2r < n$), пресметај ја веројатноста дека:

    а) меѓу нив ќе нема комплетен пар;

    б) меѓу нив ќе има точно 2 комплетни пара.

12. Паричка се фрла сé додека два пати последователно не се појави иста страна. Опиши го просторот на елементарни настани и пресметај ги веројатностите дека:

    а) експериментот ќе заврши до 6-тото фрлање;

    б) експериментот ќе заврши по парен број фрлања;

    в) експериментот ќе заврши по конечен број фрлања.

13. Познато е дека во една серија од 100 производи има 10 неисправни. Контролата на квалитетот за проверка случајно избрала 15 производи. Колкава е веројатноста дека меѓу нив има:

    а) точно еден неисправен;

    б) барем 2 неисправни.

14. Од 8 вработени на случаен начин се избираат 3-ца за учество во една комисија. Во наредниот период повторно случајно се избрани 4-ца од нив за друга комисија, а потоа и 5-мина од нив за трета комисија. Пресметај ја веројатноста дека секој од 8-те вработени е член на некоја комисија.

15. Нека A, B и C се три произволни настани. Најди ја веројатноста да се случи точно еден од овие настани.

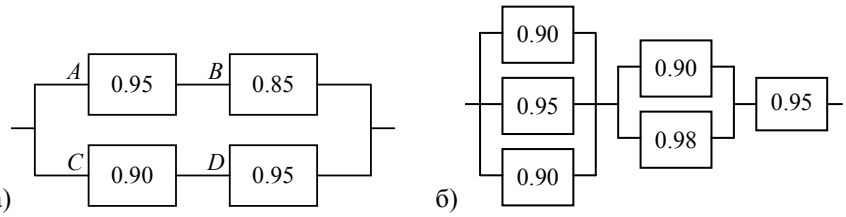
16. Двајца играат руски рулет со пиштол што има буренце со максимум 6 куршуми (по секое повлекување на чкрапалото буренцето што содржи еден куршум се завртува). Пресметај ја веројатноста оној што ја почнува играта да погине.

17. Некој ни кажал дека една непозната фамилија има 2 деца и дека едното е девојче. Се претпоставува дека се еднакви шансите за раѓање на машко и женско дете.

    а) Колкава е веројатноста дека другото дете е девојче?

    б) Се менува ли веројатноста под а) ако им поѕвониме на врата и ни отвори девојче?

18. Пресметај ја надежноста на следните системи



а) б)

19. Градовите A, B, C и D се поврзани со следните патишта: $A \Leftrightarrow B$, $A \Leftrightarrow C$, $B \Leftrightarrow C$, $C \Leftrightarrow D$, $B \Leftrightarrow D$. По зимска ноќ снегот може да го блокира секој од патиштата независно, со веројатност p. Колкава е веројатноста дека утрента ќе може да патуваме од градот A до D?

20. Пресметај ја веројатноста во покер (пет поделени карти) да ги има сите 4 типа (каро, херц, треф и пик).

21. Два големи брода треба да пристигнат во едно пристаниште во непознато време, но во следните 24 часа. Двата не може истовремено да се укотват. Пресметај ја веројатноста дека едниот ќе мора да го чека другиот, ако првиот се очекува да стои во пристаништето 1 час, а вториот 2 часа.

22. Во квадрат со страна a се фрла точка. Пресметај ја веројатноста точката да е на растојание поголемо од $a/2$ од темињата на квадратот.

24. На шаховска табла (бесконечна) со квадрати со страна a се фрла паричка со радиус r, $2r < a$. Да се пресмета веројатноста дека:

    а) паричката комплетно ќе падне во еден квадрат,

    б) паричката ќе пресече не повеќе од една страна на квадратот.

25. Да се пресмета веројатноста дека две случајно избрани точки A и B на

    а) една кружница, заедно со центарот O формираат остроаголен триаголник (аголот AOB е остар);

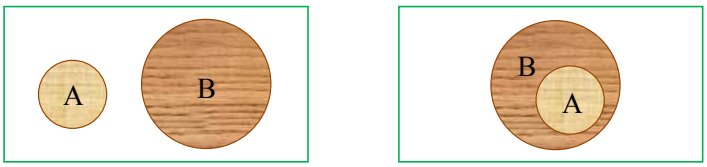
    б) една сфера, заедно со центарот O формираат остроаголен триаголник.

26. Нека V е случајно избрана точка на отсечката меѓу точките (0, 1) и (3, 4) во рамнината. Пресметај ја веројатноста плоштината на триаголникот со темињата (0, 0), (3, 0) и V да е поголема од 2.

3

Условна веројатност

Често се јавува проблем на пресметка на веројатност на случување на некој настан B, кога веќе се знае дека се случил некој друг настан A. Почетнички би било да се смета дека веројатноста на B останува каква што била, т.е. дека случувањето на A не влијае на случувањето на B. На пример, нека се дадени настани A и B како на сликата 3.1.



Слика 3.1 *Илустрација на влијание на еден настан на друг*

На левиот дијаграм од сл. 3.1 важи $A \cdot B = \varnothing$, па очигледно ако се случил A, тогаш B не може да се случи и во таква ситуација неговата веројатност треба да е 0. На десниот дијаграм е $A \subseteq B$, па очигледно ако се случил A, тогаш се случил и B и во таква ситуација неговата веројатност треба да е 1.

Веројатноста на случување на настан B, кога веќе се случил настанот A се нарекува условна веројатност, се означува со $p(B \mid A)$ и се дефинира на следниот начин.

Дефиниција 3.1 Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност. Условна веројатност $p(B \mid A)$ на настан $B \in \Phi$ при услов $A \in \Phi$ е дадена со

$$p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}, \text{ за } p(\mathrm{A}) > 0.$$

За левиот дијаграм од сл. 3.1 според дефиницијата имаме $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = p(\varnothing) / p(\mathrm{A}) = 0$, а за десниот дијаграм важи $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = p(\mathrm{A}) / p(\mathrm{A}) = 1$.

Мотивацијата зад дефиниција 3.1 е во следното. Нека при n повторувања на некој експеримент, настанот A се случил точно m пати. Случувањата на A може да се сметаат за нов експеримент и нека во тие m случувања на A, настанот B се случил k пати. Тогаш релативната честота на случување на B во m-те експерименти во кои се случил настанот A е

$$\mathrm{W}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{\mathrm{W}(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})}{\mathrm{W}(\mathrm{A})}$$

Дека $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$ е добро дефинирано покажува и следната теорема.

Теорема 3.1 Ако (Ω, Φ, p) е простор на веројатност и ако $\mathrm{A}\in\Phi$ е таков настан што $p(\mathrm{A}) > 0$, тогаш со $p_c(\mathrm{A}) = p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$, $\mathrm{B}\in\Phi$ е дефинирана веројатност на Ω таква што $p_c(\mathrm{A}) = 1$.

Доказ: Треба да се покаже дека важат аксиомите на веројатност.

a1) $\forall \mathrm{B}\in\Phi$ имаме $p_c(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) / p(\mathrm{A}) \geq 0$

a2) $p_c(\Omega) = p(\mathrm{A}\cdot\Omega) / p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}) / p(\mathrm{A}) = 1$

a3) $p_c(\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2) = p(\mathrm{A}(\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2)) / p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}_1+\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}_2) / p(\mathrm{A}) = (*)$

Од $\mathrm{B}_1\cdot\mathrm{B}_2 = \varnothing$ следува $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}_1)(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}_2) = \varnothing$, па имаме

$(*) = (p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}_1) + p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}_2)) / p(\mathrm{A}) = p_c(\mathrm{B}_1) + p_c(\mathrm{B}_2)$

На крај, $p_c(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{A})/p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{A}) / p(\mathrm{A}) = 1$. ■

Од условната веројаност следува дека веројатноста може да се дефинира така што покрај сигурниот настан Ω, да има и други настани со веројатност 1. Аналогно, покрај $\varnothing$, може да има и други настани со веројатност 0.

Следните неколку особини на условната веројатност се сосема аналогни со оние на обичната веројатност:

1) $p(\overline{\mathrm{B}} \mid \mathrm{A}) = 1 - p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$;

2) ако $\mathrm{B}\subseteq\mathrm{C}$, тогаш $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) \leq p(\mathrm{C} \mid \mathrm{A})$;

3) ако $\mathrm{B}\cdot\mathrm{C} = \varnothing$, тогаш $p((\mathrm{B} + \mathrm{C}) \mid \mathrm{A}) = p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) + p(\mathrm{C} \mid \mathrm{A})$ и поопшто

$$p((B + C) \mid A) = p(B \mid A) + p(C \mid A) - p(B \cdot C \mid A);$$

Условната веројатност е основната алатка што се користи во многу области на веројатносната анализа. Таа овозможува користење на секое додатно сознание при анализата на настаните во еден простор на веројатност.

ПРИМЕР 3.1 Веројатноста една светилка да откаже при првото вклучување е 2%. Ако не откаже при првото вклучување, веројатноста да трае една година е 82%. Колкава е веројатноста светилката да трае една година?

Решение

B = "светилката трае една година", $p(B) = ?$
A = "светилката откажува при прво вклучување", $p(A) = 0.02$

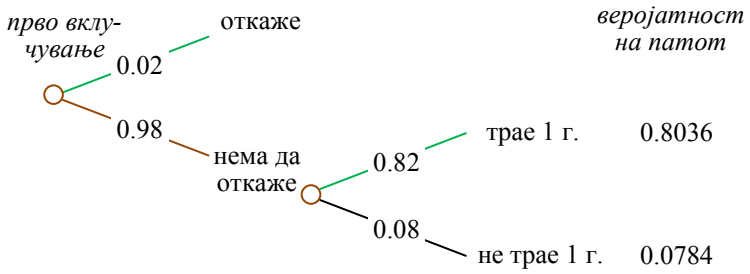
$B \mid \bar{A}$ = "светилката трае една година ако не откажала при прво вклучување", $p(B \mid \bar{A}) = 0.82$

Сега, со директна примена на формулата за условна веројатност добиваме

$p(B \mid \bar{A}) = p(B \cdot \bar{A}) / p(\bar{A})$ т.е. $p(B \cdot \bar{A}) = p(B \mid \bar{A})p(\bar{A}) = 0.82 \cdot 0.98 = 0.8036$

Ако се има предвид дека $B \subset \bar{A}$, имаме $B \cdot \bar{A} = B$, т.е. $p(B) = 0.8036$. ■

Корисна алатака за претставување на веројатностите преку постапно прикажување на несигурноста и ризиците е *дрвото на шанси*. Тоа на многу луѓе им дава појасна слика за условните веројатности преку декомпозиција на настаните на поедноставни случаи. Дрвото на шанси за примерот 3.1 би можело да изгледа вака



Од дрвото на шанси бараната веројатност се добива како производ на веројатностите по патот "нема да откаже" - "трае 1 г.".

Во случај кога во дрвото на шанси имаме повеќе патеки што одговараат на барањата од проблемот, веројатноста ја добиваме како *веројатност од поволната патека поделена со збир на веројатностите на овие патеки*.

ПРИМЕР 3.2 При пописот на население во Англија и Велс 1991 година, покрај другото добиени се и следните податоци:

Татковци со *темни* очи и деца со *темни* очи = 5%,
Татковци со *темни* очи и деца со *светли* очи = 7.9%,
Татковци со *светли* очи и деца со *темни* очи = 8.9%,
Татковци со *светли* очи и деца со *светли* очи = 78.2%.

Ако има статистичка стабилност на врската меѓу боите на очите на татковците и децата да се пресмета веројатноста при случаен избор на едно дете тоа да има *темни* очи ако таткото има *темни* очи; и веројатноста при случаен избор на едно дете тоа да има *темни* очи ако таткото има *светли* очи

Решение

Нека A = "таткото има темни очи" , а B = "детето има темни очи".
Треба да се пресметаат веројатностите $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$ и $p(\mathrm{B} \mid \bar{\mathrm{A}})$

Од пописот ги имаме следните податоци

$p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = 0.05,\ p(\mathrm{A}\cdot\bar{\mathrm{B}}) = 0.079,\ p(\bar{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}) = 0.089,\ p(\bar{\mathrm{A}}\cdot\bar{\mathrm{B}}) = 0.782.$

Сега со помош на овие веројатности добиваме

$$p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = \frac{p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})}{p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}+\mathrm{A}\cdot\bar{\mathrm{B}})} = \frac{0.05}{0.05+0.079} = 0.3876$$

$$p(\mathrm{B} \mid \bar{\mathrm{A}}) = \frac{p(\bar{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B})}{p(\bar{\mathrm{A}})} = \frac{p(\bar{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B})}{p(\bar{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}+\bar{\mathrm{A}}\cdot\bar{\mathrm{B}})} = \frac{0.089}{0.089+0.782} = 0.1022. \blacksquare$$

Понекогаш е корисно да се знае верижното правило (chain rule) за условната веројатност. Имено, од дефиницијата на условната веројатност

$p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) / p(\mathrm{A})$ следи дека $p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})p(\mathrm{A})$

и симетрично од

$$p(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) / p(\mathrm{B}) \text{ следи дека } p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})p(\mathrm{B}).$$

Ова може да се обопшти

$$p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C}\cdot\mathrm{D}\ \ldots) = p(\mathrm{A})p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})p(\mathrm{C} \mid \mathrm{A}\cdot\mathrm{B})p(\mathrm{D}|\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C})\ \ldots\ .$$

Производот на првите два члена е $p(\mathrm{AB})$, понатаму $p(\mathrm{C} \mid \mathrm{AB})p(\mathrm{AB}) = p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C})$, така што производот на првите три члена е $p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{C})$, итн.

3.1. Тотална веројатност

Формулата за тотална веројатност овозможува пресметка на неусловните веројатности преку условните.

За изведување на формулата тргнуваме од равенството

$$\mathrm{B} = \mathrm{B}\cdot\mathrm{A} + \mathrm{B}\cdot\bar{\mathrm{A}} \text{ од што следува } p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B}\cdot\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}\cdot\bar{\mathrm{A}}).$$

Од друга страна, од дефиницијата за условна веројатност имаме дека

$$p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})p(\mathrm{A}) \text{ и } p(\bar{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \mid \bar{\mathrm{A}})p(\bar{\mathrm{A}}).$$

Заменувајќи ги овие две равенства во равенството за $p(\mathrm{B})$, ја добиваме формулата за тотална веројатност

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B} \mid \bar{\mathrm{A}})p(\bar{\mathrm{A}}).$$

Се разбира, како и во другите формули за условна веројатност, и тука важи симетричната формула (се добива со замена на местата на A и B). Тоталната веројатност покажува дека веројатноста на некој настан B е тежински просек на веројатностите на B условени со A и $\bar{\mathrm{A}}$ (за произволен настан A).

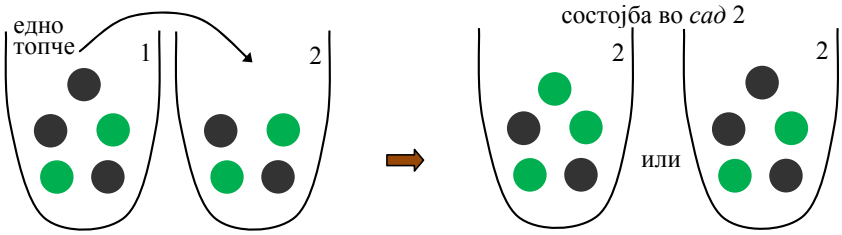
ПРИМЕР 3.4 Во еден сад имаме 2 зелени и 3 црни топчиња, а во друг 2 зелени и 2 црни топчиња. Случајно се одбира топче од првиот сад и без да се види се става во вториот. Потоа се извлекува топче од вториот сад. Колкава е веројатноста тоа да е црно?

Решение

B = "извлечено црно топче од сад 2", $p(\mathrm{B}) = ?$

A = "префрленото топче е зелено"

$\bar{\mathrm{A}}$ = "префрленото топче е црно"



$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B} \mid \bar{\mathrm{A}})p(\bar{\mathrm{A}}) = \frac{2}{5}\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{3}{5} = 0.5200. \blacksquare$$

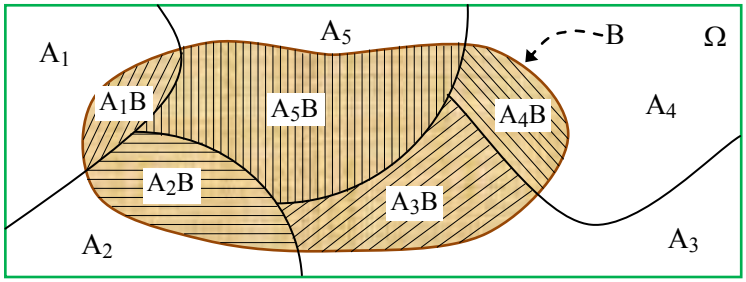
Обопштената формула за тотална веројатост ја даваме во облик на теорема.

Теорема 3.2 Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност и нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е разбивање на Ω, што значи $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ и $A_i \cdot A_j = \varnothing$. Тогаш за произволен настан $B \in \Phi$ важи

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}_1)p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_1) + p(\mathrm{A}_2)p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_2) + \ldots + p(\mathrm{A}_n)p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_n).$$

Доказ: Од дисјунктност на A_i следи дисјунктност на $A_i \cdot B$. Понатаму, од $\Omega = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ следува $B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B + \ldots + A_n \cdot B$ што повлекува $p(B) = p(A_1 \cdot B) + p(A_2 \cdot B) + \ldots + p(A_n \cdot B)$. Со примена на условната веројатност $p(A_k \cdot B) = p(B \mid A_k)p(A_k)$ на секој собирок се добива тоталната веројатност. $\blacksquare$

На сл. 3.2 е прикажан пример на разбивање на Ω.



Слика 3.2 *Илустрација на разбивање на Ω*

ПРИМЕР 3.5 Од шпил од кој се изгубени 3 карти се влече една карта. Колкава е веројатноста дека е извлечена срце карта?

Решение

B = "извлечена срце карта", $p(B) = ?$

A_k = "изгубени k срце карти", $k = 0, 1, 2, 3$ е разбивање на множеството елементарни настани $\Omega = \{(x, y, z) \mid x, y, z = 1, 2, ..., 52\}$

$$p(A_k) = \frac{\binom{13}{k}\binom{39}{3-k}}{\binom{52}{3}} \text{ за } k = 0, 1, 2, 3, \text{ т.е.}$$

$p(A_0) = 0.4135,\ p(A_1) = 0.4359,\ p(A_2) = 0.1377,\ p(A_3) = 0.0129$

и сега според формулата за тотална веројатност добиваме

$$p(B) = p(A_0)p(B \mid A_0) + p(A_1)p(B \mid A_1) + p(A_2)p(B \mid A_2) + p(A_3)p(B \mid A_3) =$$

$$= 0.4135\frac{13}{49} + 0.4359\frac{12}{49} + 0.1377\frac{11}{49} + 0.0129\frac{10}{49} = 0.2500. \blacksquare$$

3.2. Формула на Баес

Нека се дадени настани A и B со $p(A) > 0$ и $p(B) > 0$. Тогаш од двете симетрични формули за условна веројатност

$$p(B \mid A) = p(A \cdot B) / p(A) \text{ и } p(A \mid B) = p(A \cdot B) / P(B)$$

ја користиме втората во која броителот $p(A \cdot B)$ го заменуваме со $p(A \cdot B)$ од првата формула со $p(A \cdot B) = p(B \mid A)p(A)$ што дава

$$p(A \mid B) = \frac{p(B \mid A)p(A)}{p(B)}.$$

Добиената формула е наједноставната верзија на Баесовата формула. Понекогаш неа ја нарекуваат Баесова теорема или Баесово правило (што е погрешно). Баесовото правило е поврзано со методологијата на донесување одлуки (decision-making), што е екстремно контраверзна тема во статистиката. Важноста на Баесовата формула е во тоа што таа овозможува пресметка на една условна веројатност $p(A \mid B)$ преку "обратна" условна веројатност $p(B \mid A)$.

Следниот пример ја покажува важноста на Баесовата формула во ситуации (чести) кога таа дава "контраинтуитивно" решение што може да нè спаси од кардинални грешки.

ПРИМЕР 3.6 Во тек на рутински преглед, докторот открива тумор (грутка) во градите на една жена што може да биде канцер. Без дополнителни тестови, веројатноста жената да има канцер е 1%. Мамографијата е тест што со 90% сигурност одредува дали туморот е бениген или малиген. Која е веројатноста де-

ка жената има канцер на градите ако мамографијата дала позитивен резултат, т.е. дека туморот е малиген ?

Решение

Кога би го имале пред себе овој резултат, многу доктори би помислиле дека веројатноста p("канцер" | "позитивен") е само малку пониска од p("позитивен" | "канцер"), и би ја процениле на околу 80%. Со Баесовата формула добиваме

$$p(\text{"канцер"} \mid \text{"позитивен"}) = \frac{p(\text{"позитивен"} \mid \text{"канцер"}) \cdot p(\text{"канцер"})}{p(\text{"позитивен"})}.$$

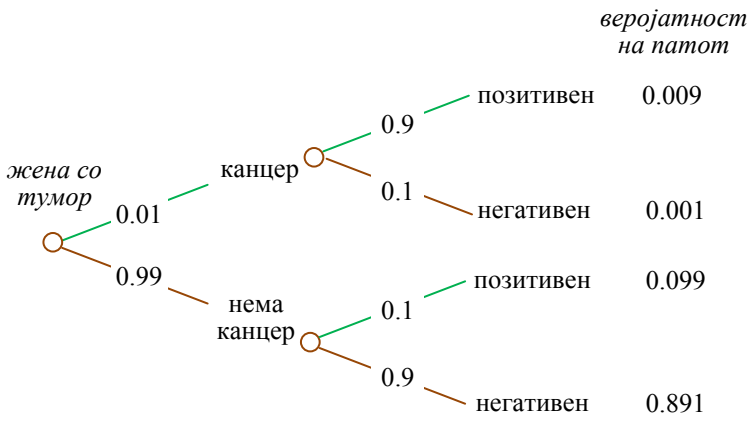
И сега, ако имаме предвид дека:

p("позитивен" | "канцер") = 0.9; p("канцер") = 0.01;
p("позитивен" | "нема канцер") = 0.1; p("нема канцер") = 0.99;
p("позитивен") = p("позитивен" | "канцер")·p("канцер") +
+ p("позитивен" | "нема канцер") p("нема канцер") =
= 0.9·0.01 + 0.1·0.99 = 0.108, добиваме дека

p("канцер" | "позитивен") = 0.009/0.108 = 0.0833.

Оваа веројатност од 8.33% е речиси 10 пати пониска од интуитивната проценка на докторот. Од каде доаѓа ваквиот резултат? Тој логично следува ако се земе предвид (не се заборави) дека почетните шанси за канцер се само 1% и тоа се "искомбинира" со 10%-ната можна грешка на мамографијата.

Дрвото на шанси изгледа вака



и од него веднаш се добива истиот резултат

$$p(\text{"канцер"} \mid \text{"позитивен"}) = \frac{p(\text{"пат 1"})}{p(\text{"пат 1"}) + p(\text{"пат 3"})} = \frac{0.009}{0.009 + 0.099}. \blacksquare$$

Горниот пример покажува колку е важно да се држат на око почетните веројатности меѓу различните категории. Во овој пример тоа се жените со тумор на градите што имаат и немаат канцер. Игнорирањето на почетните веројатности води до чудни заклучоци како "Статистиката покажува дека 10% од сообраќајките се предизвикани од пијани возачи", што значи дека останатите 90% се предизвикани од трезни возачи . . . па оттука може да се заклучи дека е посигурно луѓето да возат пијани.

Поопштата верзија на Баесова формула ја даваме како теорема.

Теорема 3.3 Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност и нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е разбивање на Ω. Тогаш за произволен настан $B \in \Phi$ со $p(B) > 0$ важи

$$p(A_k \mid B) = \frac{p(B \mid A_k)p(A_k)}{p(B)} = \frac{p(B \mid A_k)p(A_k)}{p(A_1)p(B \mid A_1) + \ldots + p(A_n)p(B \mid A_n)}.$$

Доказ: Од дефицијата на условна веројатност имаме дека

$p(A_k \cdot B) = p(A_k)p(B \mid A_k) = p(B)p(A_k \mid B)$ што повлекува

$$p(A_k \mid B) = \frac{p(B \mid A_k)p(A_k)}{p(B)}. \blacksquare$$

Баесовата формула дава начин како веројатностите треба да се ажурираат во светло на ново-добиени информации. Најопштата идеја е во следното: A_k се хипотези со априорни веројатности $p(A_k)$ коишто не се експериментално потврдени. По извршување на експеримент во врска со избран настан B, проценети се веројатностите $p(B \mid A_k)$. Сега, Баесовата формула овозможува пресметка на постериорните веројатности $p(A_k \mid B)$ откако станал познат исходот на експериментот. Значи веројатностите на хипотезите A_k се проценуваат преку експеримент во врска со погодно избран настан B.

ПРИМЕР 3.7 Три машини изработуваат некој ист производ, и тоа, првата машина покрива 25%, втората 35% и третата 40% од производството. Шкартот на првата машина е 5%, на втората 4% и на третата 2%.

а) Колкава е веројатноста дека случајно избраниот производ е шкартен?

б) Ако случајно избраниот производ е шкартен, колкава е веројатноста дека е произведен на втората машина?

Решение

а) Да ставиме

B = "производот е шкарт", $p(\mathrm{B}) = ?$

A_1 = "производот е од првата машина"
A_2 = "производот е од втората машина"
A_3 = "производот е од третата машина"

$p(\mathrm{A}_1) = 0.25, \quad p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_1) = 0.05$
$p(\mathrm{A}_2) = 0.35, \quad p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_2) = 0.04$
$p(\mathrm{A}_3) = 0.40, \quad p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_3) = 0.02$

Со директна примена на формулата за тотална веројатност добиаме

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}_1)p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_1) + p(\mathrm{A}_2)p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_2) + p(\mathrm{A}_3)p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_3) =$$
$$= 0.25 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.04 + 0.\ 40 \cdot 0.\ 02 = 0.0345.$$

б) Треба да се пресмета $p(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B})$, а ја имаме $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_2) = 0.04$. Од Баесовата формула веднаш добиваме

$$p(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_2)p(\mathrm{A}_2)}{p(\mathrm{B})} = \frac{0.04 \cdot 0.35}{0.0345} = 0.4058$$

За другите две машини на истиот начин добиваме

$$p(\mathrm{A}_1 \mid \mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_1)p(\mathrm{A}_1)}{p(\mathrm{B})} = \frac{0.05 \cdot 0.25}{0.0345} = 0.3623$$

$$p(\mathrm{A}_3 \mid \mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}_3)p(\mathrm{A}_3)}{p(\mathrm{B})} = \frac{0.02 \cdot 0.4}{0.0345} = 0.2319$$

Се разбира, за контрола проверуваме дека

$$p(\mathrm{A}_1 \mid \mathrm{B}) + p(\mathrm{A}_2 \mid \mathrm{B}) + p(\mathrm{A}_3 \mid \mathrm{B}) = 1,$$

т.е. настанот "шкарт производот да е произведен на некоја од 3-те машини" е сигурен настан. ■

3.3. Независност на настани

Во формулата за условна веројатност $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = p(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) / p(\mathrm{A})$ треба да се пресметува $p(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})$ што почесто е потежок проблем од директната пресметка на $p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})$. Затоа почесто се користат пресметките

$p(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})p(\mathrm{A})$ и
$p(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})p(\mathrm{B})$.

Интуитивно, независност на настаните најприродно се дефинира преку условната веројатност.

Дефиниција 3.2 Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност. Настанот $B \in \Phi$ е независен од настанот $A \in \Phi$ акко $p(B \mid A) = p(B)$.

Од дефиницијата 3.2 и формулата за условна веројатност веднаш следува дека ако B е независен од A, тогаш $p(A \cdot B) = p(A)p(B)$ и сега ако ова се замени во дуалната формула за условна веројатност се добива

$$p(A)p(B) = p(A \mid B)p(B),$$

што ако се има предвид дека $p(B) > 0$, дава $p(A \mid B) = p(A)$. Значи ако B е независен од A, тогаш и A е независен од B, т.е. независноста е секогаш взаемна. За проверка на независност на настани обично се користи следната тривијална теорема.

Теорема 3.4 Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност. Настаните $A \in \Phi$ и $B \in \Phi$ се независни акко $p(A \cdot B) = p(A)p(B)$. ■

ПРИМЕР 3.9 *Независност*. Од шпил карти случајно се извлекува една карта. Испитај ја независноста на настаните

A = "извлечен ас" и B = "извлечена лист карта".

Решение

а) Имаме дека

A·B = "извлечен е лист ас", од што следува

$$p(A \cdot B) = \frac{1}{52} = \frac{4}{52}\frac{13}{52} = p(A) \cdot p(B)$$

што значи дека A и B се независни настани.

Ако сега во шпилот додадеме една карта (да речеме од друг шпил) што не е ниту ас ниту лист карта добиваме

$$p(A \cdot B) = \frac{1}{53} \neq \frac{4}{53}\frac{13}{53} = p(A) \cdot p(B),$$

што значи дека сега A и B се зависни настани. ■

Независноста на настани што тука е воведена понекогаш се нарекува теоретско-веројатносна, стохастичка или статистичка бидејќи таа не секогаш соодветствува на интуитивната проценка (верување) за зависност на настаните. Кога ние априори прифаќаме независност на настани (на пример како во серија независни експерименти) таквата независност се нарекува физичка независност. Физичката независност е во основа особина на самите настани. Ние разумно веруваме дека настаните A и B се физички независни и го изразуваме тоа верување со инси-

стирањето дека важи $p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)$. Теоретско-веројатносната независност е особина на веројатноста (како мера) и таа не секогаш значи дека настаните се и физички независни. Примерот 3.4 покажува дека со минимална промена во просторот на веројатност, два настана што претходно биле независни, стануваат зависни.

Да нагласиме дека не треба да се меша поимот независност со поимот дисјунктност на настани. Имено, дисјунктни настани A и B со ненулти веројатности се секогаш зависни бидејќи во таков случај имаме дека

$$p(A \cdot B) = p(\varnothing) = 0 \neq p(A) \cdot p(B).$$

Исто така треба да се има предвид дека независноста не е "транзитивна". Имено, ако A, B и C се по пар независни настани тоа не повлекува дека и $p(A \cdot B \cdot C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)$. На пример, нека фрламе две коцки и нека A = "на првата коцка паднал парен број", B = "сумата е непарна" и C = "на втората коцка паднал парен број ". Тогаш настаните се по пар независни, но $p(A \cdot B \cdot C) = 0 \neq (1/18)(1/18)(1/18) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)$. Генерално, настаните A_1, A_2, ..., A_n се сметаат за независни ако важи $p(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = p(A_{i_1}) \cdot p(A_{i_2}) \cdots p(A_{i_k})$ за секој $2 \leq k \leq n$.

Без да ја формулираме како теорема, ќе ја наведеме следната особина. Ако A и B се независни настани, тогаш се независни и настаните $\bar{A}$ и B, A и $\overline{B}$, како и $\bar{A}$ и $\overline{B}$.

3.4. Серии независни експерименти

Ако некој експеримент повторуваме n пати при исти услови и секоја следна реализација не зависи од претходната добиваме серија од n независни експерименти. При секоја реализација на експериментот може да не интересира дали се случил или не, некој настан A. Основниот проблем е да се пресмета веројатноста во n-те повторувања на експериментот, k пати да се случи настанот A.

Теорема 3.5 (Шема на Бернули) Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност и нека реализираме серија од n независни експерименти во кои еден настан A се случува со веројатност $p(A)$. Тогаш, веројатноста A да се случи k пати е

$$p(\text{"A се случил } k \text{ пати од } n\text{"}) = \binom{n}{k} p(A)^k \, p(\overline{A})^{n-k} .$$

Доказ: Веројатноста во една низа од n случувања или неслучувања на A (на пример $A\cdot A\cdot \bar{A}\cdot A\cdot \bar{A}\cdot \bar{A}\cdot \ldots \cdot \bar{A}$), тој да се случи k пати, поради независноста е $p(A)^k p(\bar{A})^{n-k}$. Бројот на такви различни низи е еднаков со бројот на избори на k елементи од множество со n елементи, т.е $\binom{n}{k}$. ■

Независноста на серија експерименти попрецизно се нарекува физичка независност и таа не треба да се поистоветува со теоретско-веројатносната независност воведена во поглавјето 3.3. Физичката независност е верување што ни овозможува веројатноста на производ на настаните да ја пресметаме како производ на веројатностите (на пример $p(A\cdot A\cdot \bar{A}\cdot A\cdot \bar{A}\cdot \bar{A}\cdot \ldots \cdot \bar{A}) = p(A)p(A)p(\bar{A})p(A)p(\bar{A})p(\bar{A}) \ldots p(\bar{A})$). Физичката независност не може да се докажува, т.е. ние не можеме да докажуваме дека настаните од серијата експерименти се независни, туку само можеме да веруваме дека случувањето на настаните од една реализација на експериментот не влијае на случувањето на настаните од која било друга реализација. Дали е тоа навистина така?

На пример, да ја разгледаме наједноставната серија експерименти, фрлање паричка n-пати. Кога се размислува локално, интуитивно е јасно дека резултатот на секое следно фрлање е независен од резултатот на претходното фрлање (фрлања). Од друга страна, поради стабилноста на експериментот (релативните честоти на 2-та настана одат кон 1/2) јасно е дека ако при претходните реализации имало дебаланс во однос на појавувањето, на пример, на "петка", тогаш при понатамошните реализации ќе има тренд тој дебаланс да се корегира, па би очекувале настанот "петка" да има нешто поголема шанса на случување. Тоа би значело дека верувањето за физичка независност не е реално. Некој би можел да забележи дека ова размислување е погрешно бидејќи стабилноста се достигнува само при доволно големи n (блиску до ∞), така што распоредот на "петка" и "глава" не е стабилен за секое конечно n, и независноста останува. Се чини дека овие проблеми повторно се појавуваат поради воведувањето на поимот ∞ што не може лесно да се усогласи со реалноста и води до парадокси (види поглавје 2.3).

ПРИМЕР 3.10 Што е поверојатно, меч меѓу рамноправни противници да заврши 3:2 или 5:5?

Решение

A = "победил првиот", P(A) = 0.5,

$$p(\text{"3:2"}) = \binom{3}{2} 0.5^3 (1-0.5)^2 = 0.3125,$$

$$p(\text{"5:5"}) = \binom{10}{5} 0.5^5 (1-0.5)^5 = 0.2461. \blacksquare$$

ПРИМЕР 3.11 Колкава е веројатноста во автобус со 50 луѓе да има повеќе од двајца левораци ако се знае дека леворакоста во популацијата е 13%?

Решение

A = "леворак", $p(\text{A}) = 0.13$

Многу е подобро да се решава со обратниот настан.

p("повеќе од 2-ца левораки") =

= 1 – p("0 левораки") – p("1 леворак") – p("2 левораки") =

$$1 - \binom{50}{0} 0.13^0 0.87^{50} - \binom{50}{1} 0.13^1 0.87^{49} - \binom{50}{2} 0.13^2 0.87^{48} =$$

$$= 1 - 0.0009 - 0.0071 - 0.0259 = 0.9661. \blacksquare$$

Низата веројатности што се добива за $k = 0, 1, \ldots, n$ во серијата независни експерименти не е монотона. Вредноста на k за која таа достигнува максимум е

$$k_0 = \begin{cases} [(n+1)p(\text{A})], & \text{ако } (n+1)p(\text{A}) \text{ не е цел број} \\ (n+1)p(\text{A}) \text{ и } (n+1)p(\text{A})-1, & \text{во спротивно} \end{cases}$$

каде што [...] означува цел дел.

ПРИМЕР 3.12 Колкава е веројатноста со пополнети 80 колони (десет ливчиња) на лото 7 од 37 да се добијат барем 5 погодоци. Колкава е веројатноста да се добијат 7 погодоци? Кои се најверојатните броеви случувања за k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 погодоци?

Решение

A = "барем 5 погодоци" = "5 погодоци" + "6 погодоци" + "7 погодоци"

Овие веројатности ги пресметавме во примерот 2.10.

$p(\text{A}) = 0.000887283 + 0.000020397 + 0.000000097 = 0.000807777$

Бидејќи бараме A да се случи барем еднаш, многу е подобро да се решава со обратниот настан.

p("од 80 колони барем еднаш A") = 1 – p("од 80 колони ниедаш A") =

$$= 1 - \binom{80}{0} 0.000807777^{0} 0.999192223^{80} = 0.0626 = 6.26\%$$

Сосема аналогно, за барем еднаш да имаме 7 погодоци се добива

p("од 80 колони барем еднаш 7 погодоци") =

$= 1 - p$("од 80 колони ниедаш 7 погодоци ") =

$$= 1 - \binom{80}{0} 0.000000097^{0} 0.999999903^{80} = 0\ .00000776 = 0.000776\%$$

Во следната табела се дадени веројатностите заедно со најверојатниот број на случувања на погодоци:

k	p("точно k погодоци со 1-а колона")	p("барем еднаш точно k погодоци со 80 колони")	најверојатен број случувања на k погодоци во 80 колони
0	0.197737413	0.999999978	16
1	0.403713885	0.999999999	32
2	0.290673997	0.999999999	23
3	0.093164743	0.999601048	7
4	0.013802184	0.670997002	1
5	0.000887283	0.068551287	0
6	0.000020397	0.001019341	0
7	0.000000097	0.000007760	0

Поради земање цел дел од броевите, изгубен е еден број во најверојатен број случувања на k погодоци во 80 колони (збирот во последната колона е 79 наместо 80). ■

Постои праволиниско обопштување на теоремата 3.5, во коешто наместо да се разгледува случување на само еден настан, се разгледуваат случувања на повеќе настани.

Теорема 3.6 Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност и нека реализираме серија од n независни експерименти во кои може да се случат настаните A, B, C, . . . со веројатности p(A), p(B), p(C), ... Тогаш, веројатноста A да се случи k_1 пати, B да се случи k_2 пати, C да се случи k_3 пати, ... е

p("A - k_1 пати, B - k_2 пати, C - k_3 пати, ... од n") =

$$= \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots} p(\mathrm{A})^{k_1} p(\mathrm{B})^{k_2} p(\mathrm{C})^{k_3} \ldots .$$

Доказ: Веројатноста во една низа од n експерименти, А да се случи k_1 пати, В да се случи k_2 пати, С да се случи k_3 пати, ... поради независноста е $p(\mathrm{A})^{k_1}\, p(\mathrm{B})^{k_2}\, p(\mathrm{C})^{k_3} \ldots$. Бројот на вакви различни низи е еднаков на бројот на пермутации со повторување од n елементи каде што имаме $k_1, k_2, k_3, \ldots$ исти, и $k_1+k_2+k_3+ \ldots = n$. ■

Теоремата 3.5 е специјален случај на теоремата 3.6 кога разгледуваме само 2 настани А и $\bar{\mathrm{A}}$ и тогаш $k_2 = n - k_1$, па

$$\frac{n!}{k_1!k_2!}\, p(\mathrm{A})^{k_1}\, p(\overline{\mathrm{A}})^{k_2} = \binom{n}{k_1} p(\mathrm{A})^{k_1}\, p(\overline{\mathrm{A}})^{n-k_1},$$

т.е. се добива формулата од теоремата 3.5 ако се замени k_1 со k.

Формулите за пресметка на веројатност при сериите независни експерименти (теоремите 3.5 и 3.6) не се ништо друго од една додатна шема за пресметка на веројатност во специфична ситуација. Се разбира, при еднаковеројтни елементарни настани, веројатностите кај сериите независни експерименти може да се пресметуваат и на класичен начин (поволни случаи / сите можни) како што е направено во примерот 2.5 за задачата 19, но тоа вообичаено е многу потежок начин.

ЗАДАЧИ

1. Настаните А и В се дисјунктни. Кои од следните равенства се точни:

   а) $p(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = p(\mathrm{A})$; б) $p(\mathrm{A} + \mathrm{B} \mid \mathrm{C}) = p(\mathrm{A} \mid \mathrm{C}) + p(\mathrm{B} \mid \mathrm{C})$;

   в) $\dfrac{p(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})}{p(B)} = \dfrac{p(\mathrm{B} \mid \mathrm{A})}{p(\mathrm{A})}$; г) $p(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{B})$.

   Повтори го сето кога настаните А и В се независни.

2. Се фрлаат две (фер) коцки. Пресметај ја веројатноста:

   а) Сумата да е 6 ако се знае дека паднал различен број;

   б) Сумата да е 7 ако се знае дека паднал различен број;

   в) Првата коцка да е 6 ако се знае дека паднал различен број.

3. Нека играч (во бриџ) има 13 карти меѓу кои има ас.

а) Пресметај ја веројатноста дека играчот има точно еден ас;

б) Што се менува во веројатноста ако се знае дека играчот има срце ас?

4. Секоја вечер, две метеоролошки станици даваат прогноза за времето независно една од друга. Станицата 1 погодува во 90% од случаите, а станицата 2 во 80% без разлика на времето. Една вечер станицата 1 предвидува сончево време, а станицата 2 дожд. Пресметај ја веројатноста дека прогнозата на станицата 1 е точна.

5. Патуваме со едно парче багаж од Скопје за Сиднеј со преседнување во Дубаи и Сингапур. На секое преседнување багажот се префрла во другиот авион. Во Скопје веројатноста багажот да се стави во погрешен авион е 5%. Оваа веројатност во Дубаи е 2%, а во Сингапур 0.5%.

   а) Најди ја веројатноста дека багажот нема да стигне во Сиднеј со нас;

   б) Ако багажот не стигнал во Сиднеј со нас, пресметај ја веројатноста дека е изгубен во Скопје.

6. На една раскрсница на главна со споредна улица, од секои 100 растојанија меѓу колите на главната улица, 65 од нив се прифатливи, т.е. може да се приклучи кола од споредната улица. Кога пристигнува кола од споредната улица:

   а) која е веројатноста дека првото растојание не е прифатливо;

   б) која е веројатноста дека првите две растојанија не се прифатливи;

   в) првата кола ја поминала раскрсницата. Која е веројатноста дека втората ќе ја помине раскрсницата веднаш на следното растојание.

7. Во еден магацин има 500 контејнери со смрзнат сок од портокал и притоа во просек 1% од нив се расипуваат. Купец купува 2 контејнера. Колкава е веројатноста дека:

   а) вториот контејнер е расипан ако се знае дека првиот бил расипан;

   б) и двата се расипани;

   в) и двата се исправни;

   г) ако A="1-от е расипан", B="2-от е расипан", дали A и B се независни ? Дали се независни ако расипаните се враќаат. (замена)

8. Располагаме со 3 карти обоени од двете страни со една боја и тоа: зелена со зелена, црвена со црвена и зелена со црвена. Влечеме една карта (без гледање) и забележуваме дека бојата од едната страна е зелена. Пресметај ја веројатноста дека и другата страна е зелена.

9. Група од 15 туристи пристигнуваат во град со 4 хотели: A, B, C, D, од кои во секој има доволно место за сите 15. Туристите се сместуваат во хотелите

така што секој турист случајно избира хотел во кој ќе се смести. Пресметај ја веројатноста дека во секој од хотелите ќе се смести барем еден турист.

10. Контролата на квалитетот на транзистори ги класифицирала по производител и квалитет во следната табела

Произ-водител		Квалитет: добар	граничен	лош	вкупно
	A	128	10	2	140
	B	97	5	3	105
	C	110	5	5	120

Процени ја веројатноста дека случајно избран транзитор е:

а) од производителот А со добар квалитет;

б) добар ако се знае дека од производителот С;

в) од производителот В ако се знае дека е со граничен квалитет.

11. Во една елементарна студија за синхронизација на семафорите, разгледуваме систем од 4 последователни семафори со црвено светло во времетраење од 30 секунди во циклус од 50 секунди. Нека

$$p(S_{j+1} \mid S_j) = 0.15 \quad \text{и} \quad p(S_{j+1} \mid \overline{S}_j) = 0.40, \ \text{за} \ j = 1,2,3$$

каде што S_j означува настан "возачот запрел на j-тиот семафор". Пресметај ја веројатноста на настаните дека возачот ќе го фатат:

а) сите 4 семафори; б) ниеден од семафорите;

в) најмногу еден семафор.

12. Пристигнати повици до еден компјутерски сервис се класифицирани како рекламации (75% од повиците) или барање информација (25% од повиците). Од рекламациите, 40% се хардверски, 57% софтверски, а останатите 3% се проблеми на погрешно следење на упатствата за инсталација од страна на корисникот. Барањата информации се поделени на технички прашања (50%) и нови нарачки (50%). Пресметај ја веројатноста:

а) дека еден повик до сервисот е од корисник кој не го следел упатството за инсталација;

б) дека еден повик е барање за нова нарачка.

13. Воведена е нова медицинска процедура за рано откривање на една болест и спроведен е медицински скрининг. Веројатноста дека тестот коректно идентификува некого со болест е 99%, а веројатноста дека идентификува некого како болен а тој ја нема болеста е 95%. Болеста се јавува во популацијата во 0.01%. Ако некој направил тест и тој бил позитивен, пресметај ја веројатноста дека ја има болеста.

14. Дигиталниот пренос на податоци се состои од пренос на низи од 0-ли и 1-ци. Познато е дека при преносите 0-та се јавува 4 пати почесто од 1-цата. Поради несовршеноста на опремата за пренос веројатноста дека 0-та ќе биде примена како 1-ца е 0.01, а веројатноста дека 1-цата ќе биде примена како 0 е 0.05. Да се пресмета веројатноста дека

   а) е испратена 0, ако е примена 0;

   b) е испратена 1-ца, ако е примена 1-ца.

15. Возачите во една област се тестираат редовно за алкохолизираност од страна на полицијата преку тест со дување. Само после позитивен резултат од дувањето возач се испраќа на крвен тест кој определува дали возачот е под дејство на алкохол. Тестот со дување дава позитивен резултат за 90% од пијаните возачи и 5% позитивен резултат за трезните возачи. Вообичаено, еден возач е подложен на тестот со дување после сомнително возачко однесување, но полицијата во дадената област сметала дека е добро да се тестираат возачите по случаен избор. Тековната статистика покажува дека еден од 20 возачи во областа вози под дејство на алкохол. Пресметај ја веројатноста дека случајно тестиран возач ќе биде непотребно испратен на крвен тест после позитивен резултат од тестот со дување.

16. Се тестира нов метод за детекција на загадувачи во водата. Тој може да детектира (според произведувачот) органски загадувачи со 99.7% сигурност, испарливи загадувачи со 99.95% сигурност и хлорни компоненти со 89.7% сигурност. Ако нема загадување методот тоа исто така го детектира. Припремени се примероци за калибрација од кои 60% се со органски загадувач, 27% со испарливи загадувачи и 13% со хлорни компоненти. Примерокот за тестирање се избира случајно.

   а) Пресметај ја веројатноста дека методот ќе открие загадување;

   б) Ако е откриено загадување, пресметај ја веројатноста дека тоа е од хлорни компоненти.

17. Процент на неисправност во една серија на произведени LED монитори е 5.2%. Колку монитори од серијата треба да се земат за веројатноста меѓу нив да има неисправен монитор биде не помала од 98%?

18. Осум машини независно полнат туби со синтетичко лепило коишто потоа одат на заедничка подвижна лента. Примерок-туба се зема на секои неколку минути. Под претпоставка дека примероците се независни, пресметај ја веројатноста:

   а) дека 5 последователни туби се произведени на првата машина;

   б) дека 5 последователни туби се произведени на иста машина;

   в) дека 4 од 5 последователни туби се произведени на првата машина.

19. (Chevalier de Méré). Користејќи ја шемата за независни експерименти пресметај ја, а) веројатноста да се добие 6-ка од 4 фрлања на коцка и б) веројатноста да се добијат две 6-ки од 24 фрлања на 2 коцки?

20. Стрелец пука во кружна мета со радиус r и секогаш ја погодува. Метата е поделена на 4 области со 3 концетрилни кружници чиишто радуси се зголемуваат за $r/4$ тргнувајќи од центарот на метата. Погодоците во секој од 4-те кружни прстени тргнувајќи од центарот носи 10, 6, 3 и 1 поен последователно. Ако местата на погодување на метата се случајни, пресметај ја веројатноста дека од 10 пукања стрелецот ќе собере најмалку 90 поени.

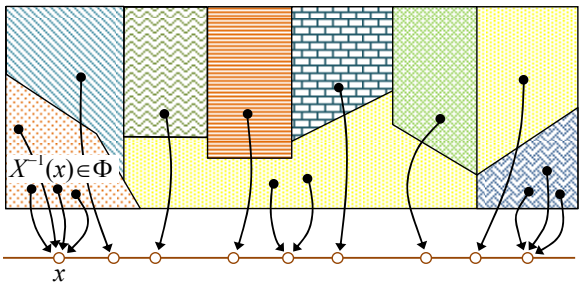
4

Случајни променливи

Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност и нека X: $\Omega \to \mathrm{R}$ е пресликување, т.е. реална функција што на секој елементарен настан $\omega \in \Omega$ му придружува реален број $X(\omega) \in \mathrm{R}$. Интуитивно, случајна променлива X е променлива што зема вредности со одредени веројатности. Идејата за нивното воведување е од простори на настани да се префрлиме во просторот на реалните броеви каде што располагаме со добро разработен математички апарат.

Дефиниција 4.1 За реалната фукција X: $\Omega \to \mathrm{R}$ велиме дека е случајна променлива акко за секој $x \in \mathrm{R}$ важи $\mathrm{A} = \{\omega \mid X(\omega) < x\} \in \Phi$.

Дефиницијата бара елементарните настаните што се пресликуваат во интервалот $(-\infty, x)$ да формираат настан од Φ. Ако Ω е конечно или пребројиво овој услов е секогаш исполнет (А е секогаш во Φ) кога сите подмножества елементарни настани се во Φ. Кога Ω е непребројиво бараниот услов е битен бидејќи σ-алгебрата Φ може да не го содржи А.



Слика 4.1 *Пресликување настан → случајна променлива*

Случајните променливи речиси секогаш се означуваат со испуштање на аргументот: X, Y, A, B, а не $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $A(\omega)$, $B(\omega)$. Ова е добро позната практика да се испуштаат аргументите на функциите кога од интерес се функционалните односи, на пример $\mathrm{d}(u{\cdot}v) = u{\cdot}\mathrm{d}v + v{\cdot}\mathrm{d}u$. Понатаму и ние како што е вообичаено ќе го испуштаме ω при работа со настаните определени од случајните променливи, т.е. наместо $X(\omega) < x$, $X(\omega) = x$ или $X(\omega)\in[a, b]$ едноставно ќе пишуваме $X < x$, $X = x$ или $X\in[a, b]$.

Ние и до сега понекогаш имплицитно користевме случајни променливи. На пример, при фрлање коцка наместо се случил настанот "паднала 6-ка" кажуваме се случил бројот 6. Многу случувања во реалноста добро се опишуваат преку нумеричка квантификација, а тоа природно резултира во случајни променливи. На пример:

X = "дневен број на пациенти кај некој стоматолог"; X зема вредности од множеството $\{0, 1, 2, ...\}$;

X = "време меѓу пристигања на автомобили во еден сервис за поправка"; X зема вредности од временскиот интервал $[0, T]$;

X = "локација на пад на метеор на земјата"; X зема вредности од рамнината (x, y) каде што тој пар може да означува географска должина и широчина.

Од дефиницијата за случајна променлива 5.1, веднаш следува

$$(X \geq x) = (\overline{X < x}) \in \Phi,$$

$$(x_1 \leq X < x_2) = (X < x_2) - (X < x_1) \in \Phi,$$

$$(X = x) = \prod_{n=1}^{\infty} (x \leq X < x + \frac{1}{n}) \in \Phi,$$

така што веројатноста на овие настани е дефинирана.

За пресметка на веројатностите на настаните од ваков вид не е потребно да се знае веројатноста на секој елементарен настан, туку е доволно да се знае веројатноста на настаните од облик $(X < x)$. Ова не води до добро познатиот поим на функција на распредеба (distribution).

Дефиниција 4.2 Фукцијата $F(x) = p(X < x)$ е функција на распределба за случајната променлива X.

Интуитивно, функцијата на распределба $F(x)$ ги дава веројатностите на сите "растечки" настани од Φ тргнувајќи од ∅ кога таа има вредност 0, па преку настаните што се состојат од оние елементарни настани што се пресликани во помали реални броеви од x, сè до Ω кога таа добива вредност 1.

Јасно е дека $F(x)$ е дефинирана за секој $x \in \mathrm{R}$. Од равенството меѓу настани

$$(X < x_2) = (x_1 \le X < x_2) + (X < x_1)$$

според аксиомата а3 за збир на дисјунктни настани добиваме

$$p(X < x_2) = p(x_1 \le X < x_2) + p(X < x_1)$$

од што следува

$$p(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Имајќи предвид дека $X \ge x = \overline{X < x}$, веднаш следува дека

$$p(X \ge x) = 1 - p(X < x) = 1 - F(x).$$

На крај имаме

$$p(X = x) = \lim_{n \to \infty} (F(x + \frac{1}{n}) - F(x)) = F(x + 0) - F(x).$$

Некои основни особини на функцијата на распределба $F(x)$ се дадени во следната теорема.

Теорема 4.1 За секоја фукцијата на распределба $F(x)$ точни се следните тврдења:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ е монотоно неопаѓачка функција;

3) $F(x)$ е прекината функција (непрекината е од лево);

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(+\infty) = 1$;

5) $p(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Доказ: Следува директно од дефиницијата, а 5) е веќе докажано. ■

Особините изнесени во теоремата 4.1 се карактеристични за функциите на распределба $F(x)$ во таа смисла што секоја функција што ги задоволува овие особини (поточно 2), 3) и 4)) е функција на распределба за некоја случајна променлива. Да ја забележиме особината 5) што овозможува праволиниска пресметка на веројатноста на настаните преку функцијата на распределба.

Секое задавање на X што овозможува да се најде нејзината функција на распределба $F(x)$ вообично ќе го нарекуваме закон за распределба на X.

4.1. Дискретни случајни променливи

Случајната променлива X е *дискретна* акко зема вредности од конечно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или преброиво[2] $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ множество броеви и притоа важи

$$\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} p(X = x_i) = 1.$$

Очигледно за дискретна случајна променлива, законот на распределба целосно е определен со задавање на нејзините вредности и соодветните веројатности

x_1	x_2	...	x_n	...
$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$	...

Функцијата на распределба во овој случај е скалеста со скокови во точките $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ еднакви на $p(x_i)$. За случајна променлива со конечен број вредности, функцијата на распределба $F(x)$ го има обликот

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x < x_1 \\ \sum_{1 \le i \le k-1} p(x_i) & \text{за } x_{k-1} \le x < x_k \\ 1 & \text{за } x \ge x_n \end{cases}$$

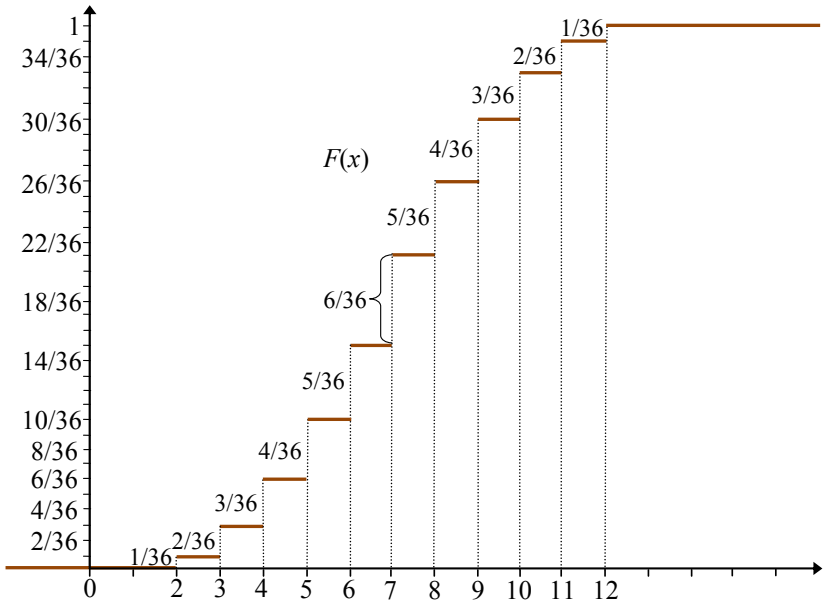
[2] Не сè што е преброиво е дискретно. На пример, рационални броеви од кој било интервал не се дискретни бидејќи меѓу кои било два рационални броја има трет. За дискретност е неопходно да важи $x_i < x_{i+1}$, т.е. броевите да се "дискретно распоредени" што значи да може да се подредат во монотона низа (без точки на натрупување).

Сите веројатносни информации за случајната променлива X се сумирани во нејзиниот закон на распределба и следователно во нејзината функција на распределба.

ПРИМЕР 4.1 Да го разгледаме експериментот е фрлање 2 коцки. Дефинираме случајна променлива X = "збир на паднатите броеви". Законот на распределба на X е даден во следната табела

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X=x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

На сликата подолу е прикажана функција на распределба за случајната променлива X.



За одговор на прашањето, колкава е веројатноста да при фрлање 2 коцки се добие збир поголем од 7, едноставно се пресметува

$$p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) + p(X = 11) + p(X = 12) = 15/36 = 0.4167$$

или едноставно

$$p(\text{"збир поголем од 7"}) = F(\infty) - F(7.1) = 1 - 21/36 = 15/36 = 0.4167. \blacksquare$$

Некои дискретни случајни и нивните закони на распределба се јавуваат често во практиката.

БИНОМНА РАСПРЕДЕЛБА. Разгледуваме серија од n независни експерименти при што во секој од нив настанот А се случува со веројатност p. Дефинираме случајна променлива X = "број на случувања на А". Тогаш законот на распределба на X е даден со шемата на Бернули

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \text{ за } k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

За $n = 1$ се добива Бернулиевата распределба која кажува само дали при реализација на експериментот се случил или не настанот А, $p(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$, за $k = 0,\ 1$.

ПРИМЕР 4.3 Раководството на една фирма е загрижено поради високиот одлив на вработените на одредено време. Од претходно овој број е проценет на 10% годишно. Одбирајќи на случаен начин 8 вака вработени колкава е веројатноста дека повеќе од 2-ца ќе ја напуштат фирмата во следната година?

Решение

Работиме на ист начин како кај сериите независни експерименти.

$p = 0.1$, и потребни ни се вредностите на распределбата за

$k = 0,\ 1,\ 2$, што дава

$p(X > 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) - p(X = 2) =$

$$= 1-\binom{8}{0}0.1^0 0.9^8-\binom{8}{1}0.1^1 0.9^7-\binom{8}{2}0.1^2 0.9^6 = 0.0381. \blacksquare$$

ХИПЕРГЕОМЕТРИСКА РАСПРЕДЕЛБА. Од N објекти, r се означени како поволни. Се одбираат n објекти и се разгледува случајната променлива X = "број на поволни објекти во n-те избрани". Тогаш, законот на распределба на X е даден со

$$p(X=k)=\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ за } k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

ПРИМЕР 4.6 При вадењето на 4 потрошени батерии од еден иструмент, тие по грешка се измешани со новите 4 батерии коишто изгледаат идентично. Колкава е веројатноста при избор на 4 батерии од 8-те барем 3 да се исправни?

Решение

Слични проблеми решававме кај класичната веројатност, како на пример лотаријата (пример 2.11).

$N = 8$, $n = 4$, и $r = 4$. Потребни се вредностите на распределбата за $k = 3$, 4.

$$p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{1}}{\binom{8}{4}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{0}}{\binom{8}{4}} = 0.2429. \blacksquare$$

ГЕОМЕТРИСКА РАСПРЕДЕЛБА. Се повторува некој експеримент сè до појавување на настан А. Нека p е веројатноста на случување на А, и нека поторувањата на експериментот се независни. Ако ја дефинираме случајната променлива X = "број на повторувања на експериментот додека не се случи А", тогаш законот на распределба на X е даден со

$$p(X = k) = (1-p)^{k-1} p \text{, за } k = 1, 2, ..., n, ... \ .$$

Речиси тривијално е да се провери дека

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(X = x_k) = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1 .$$

ПРИМЕР 4.7 Веројатноста да во една минута дојде странка на некој шалтер е 26%. Колкава е веројатноста во следните 10 минути да нема странка, а во 11-тата да се појави?

Решение

Ова е типичен случај на геометриска распределба.

$p = 0.26$, па бараната веројатност е

$p(X = 11) = 0.74^{10} \cdot 0.26 = 0.0128. \blacksquare$

4.2. Непрекинати случајни променливи

Веќе дискутиравме дека не е можно да се доделуваат веројатности на поединечни реални броеви, туку тоа мора да се прави на интервали. Непрекинатите случајни променливи земаат вредности на интервал или колекција на интервали.

Формално, случајната променлива X е (апсолутно) непрекината акко постои ненегативна функција $f(x)$, таква што за секор x важи

$$F(x) = p(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \ .$$

Функцијата $f(x)$ се нарекува *густина* на распределбата на случајната променлива X. Понатаму секогаш ќе претпоставуваме дека $f(x)$ е непрекината скоро секаде, што е потребно за интеграбилност. Веднаш имаме,

$$p(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx \ .$$

Оттука следува дека за непрекинати случајни променливи важи

$$p(a \le X \le b) = p(\mathrm{a} \le X < \mathrm{b}) = p(a < X \le b) = p(a < X < b) \ .$$

Теорема 4.3 За секоја густина на распределба $f(x)$ точни се следните тврдења:

1) $f(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathrm{R}$

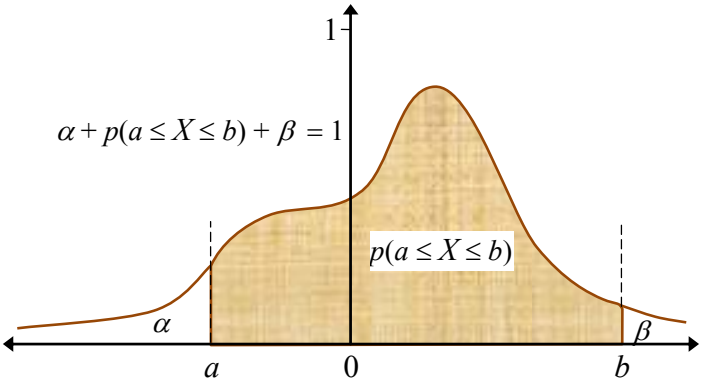
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,

3) $F'(x) = \dfrac{dF}{dx} = f(x)$.

Доказ: Следува директно од дефиницијата. ■

Се разбира, важи и тврдењето дека секоја функција $f(x)$ што ги задоволува наведените особини е густина на распределба за некоја случајна променлива X.

Геометриски претставено, веројатноста случајната променлива X да земе вредност во интервалот [a, b] е еднаква на плоштината меѓу нејзината густина на распределба и x-оската во истиот интервал (сл. 4.4).



Слика 4.4 *Пресметка на веројатност преку густина на распределба*

Интуитивно, а тоа и ќе го видиме понатаму, позгодно е да се работи со густината на распределба отколку со функцијата на распределба. Во многу практични ситуации, густината на распределба за релевантната случајна променлива се обезбедува полесно. Понекогаш тоа се прави приближно, користејќи симулации.

Да забележиме дека кога едната од нив, функцијата или густината на распределба е обезбедена, другата може лесно да се добие со диференцирање или интегрирање на другата.

ПРИМЕР 4.9 Доцнењето на воз во минути е дадено со следната густина на распределба

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{540}(39-x^2), & \text{за } -3\le x\le 6\\ 0, & \text{во спротивно}\end{cases}.$$

Определи го a така што $f(x)$ да биде густина на распределба? Колкава е веројатноста возот да доцни повеќе од 2 минути? Колкава е веројатноста возот да дојде предвреме?

Решение

За $f(x)$ да биде густина на распределба, потребно е и доволно

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, па оттука добиваме равенка по a,

$$\int_{-3}^{6}\frac{a}{540}(39-x^2)dx=\frac{39a}{540}x\Big/_{-3}^{6}-\frac{x^3a}{3\cdot 540}\Big/_{-3}^{6}=a\left(\frac{351}{540}-\frac{243}{3\cdot 540}\right)=1,$$

од што следува $a=2$.

Веројатноста возот да доцни повеќе од 2 минути е

$$p(x>2)=\int_{2}^{6}\frac{2}{540}(39-x^2)dx=\frac{78}{540}x\Big/_{2}^{6}-\frac{2x^3}{3\cdot 540}\Big/_{2}^{6}=\frac{520}{1620}=0.3210.$$

Веројатноста возот да дојде предвреме е

$$p(x<0)=\int_{-3}^{0}\frac{2}{540}(39-x^2)dx=\frac{78}{540}x\Big/_{-3}^{0}-\frac{2x^3}{3\cdot 540}\Big/_{-3}^{0}=\frac{216}{540}=0.4000. \blacksquare$$

Како и во случај на дискретни случајни променливи, некои непрекинати случајни променливи и нивните закони на распределба се исклучително важни во практиката и се темел на статистичките оценки и тестови.

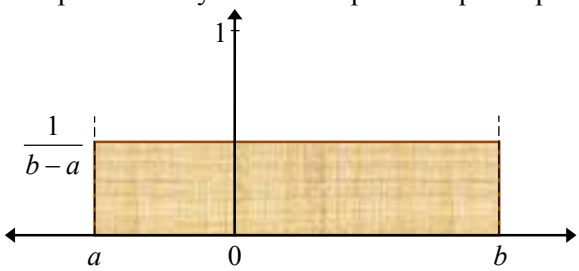
РАМНОМЕРНА РАСПРЕДЕЛБА. Густината на рамномерната распределба, како што името сугерира, е едноставно константа на определен интервал, т.е.

$$f(x)=\begin{cases} c, \text{ за } a\le x\le b \\ 0, \text{ во спротивно} \end{cases}, \text{ и од } \int_a^b c\,dx=1 \quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{b-a} \text{ што ја}$$

дава густината

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \text{ за } x\in[a,b] \\ 0, \text{ во спротивно} \end{cases}.$$

На сл. 4.5 е прикажана густината на рамномерната распределба.



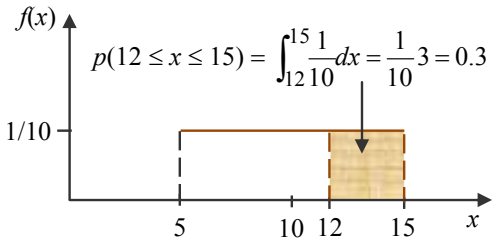
Слика 4.5 *Густина на рамномерна распределба*

ПРИМЕР 4.10 На гостите на еден ресторан им се наплатува количината на салата што ја земаат. Испитување на примерок сугерира дека количеството земена салата е со приближно рамномерна распределба меѓу 5 и 15 унци

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{10}, \text{ за } x\in[5,15] \\ 0, \text{ во спротивно} \end{cases}$$

каде што x = тежина на салатата во чинија. Колкава е веројатноста гостин да нарача повеќе од 12 унци салата?

Решение

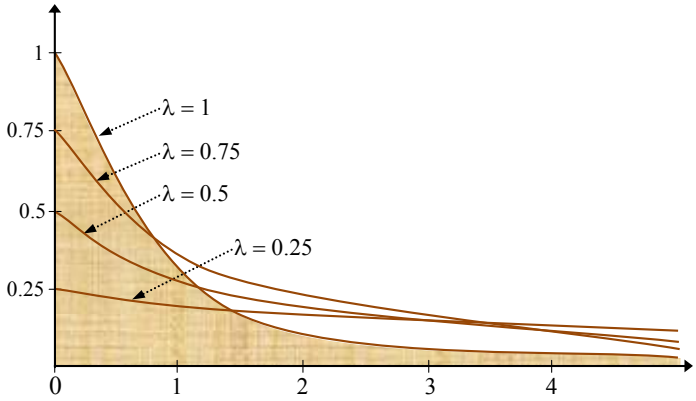


. ■

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА РАСПРЕДЕЛБА. Експоненцијалната распределба ја користи функцијата $\lambda e^{-\lambda x}$, т.е. дел од неа за кој областа под неа и x оската има плоштина 1. Густината е дадена со

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{за } x \geq 0 \\ 0, & \text{во спротивно} \end{cases}$$

На сл. 4.6 се прикажани функции на експоненцијалната распределба за неко вредности на λ.

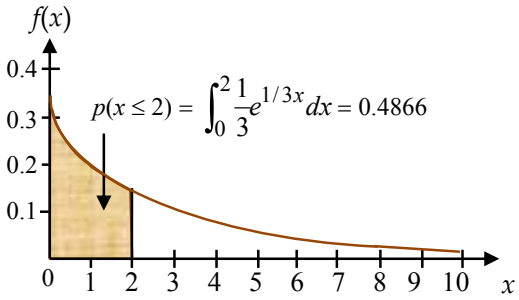


Слика 4.6 *Густина на експоненцијална распределба*

Генерално, експоненцијалната распределба ги опишува процесите во кои настаните се случуваат континуирано и независно во правилни временски растојанија.

ПРИМЕР 4.11 Пристигнувањето на автомобилите во еден сервис за миење има експоненцијална распределба со просечно време на пристигнување од 3 минути. Колкава е веројатноста времето меѓу две сукцесивни пристигнувања да биде помало од 2 минути?

Решение



■

Експоненцијалната распределба игра голема улога во доверливоста на уредите и системите. Недостатокот на "мемориска особина" на експоненцијалната распределба повлекува дека уредите "не стареат". Значи без разлика колку долго уредот работел претходно, веројатноста на откажување во следните, на пример 1000 часа, останува иста. Затоа, уредите што откажуваат со случајни кварови може да се моделираат со експоненцијална распределба. Од друга страна, уредите што "стареат" подобро се моделираат со Веибул распределба.

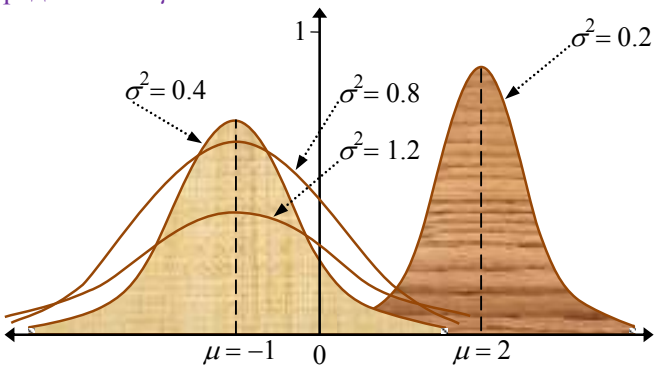
НОРМАЛНА РАСПРЕДЕЛБА. Нормалната (или Гаусовата) распределба е базична и сигурно најкористената распределба во статистиката. Таа ги опишува случајните променливи што имаат тенденција да ги групираат вредностите околу една просечна вредност. Нејзината важност доаѓа од централната гранична теорема што кажува дека при одредени услови, сума на доволен број случајни променливи со произволна распределба има приближно нормална распределба.

Густината на нормалната распределба е дадена со

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

каде што μ е просекот (локацијата на максимумот), а σ^2 е дисперзијата (ширината на распределбата). Просекот и дисперзијата се броеви што ја изразуваат просечната вредност (просекот) и раштркаността околу просечната вредност (дисперзијата) на една случајна променлива. Тие формално ќе бидат воведени во следната глава. Нормалната распределба вообичаено ќе ја означуваме со $Z(\mu, \sigma^2)$.

На сл. 4.7 се прикажани функции на нормалната распределба за различни вредности на μ и σ.



Слика 4.7 *Густина на нормална распределба*

Густината на нормалната распределба е крива во облик на звоно (bell-like). Поголемо σ води кон посплескано звоно. Во пракса обично се прави смената

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma},$$

така што новата случајна променлива има нормална распределба со $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, и го добива едноставниот облик

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

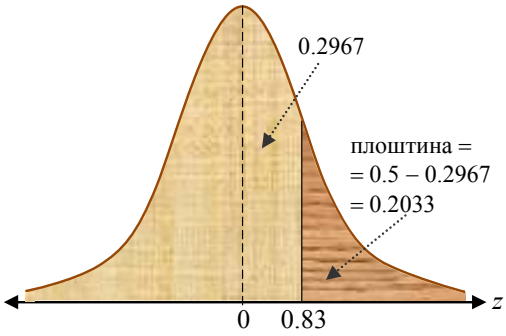
кој вообичаено се нарекува стандардна нормална распределба $Z(0,1)$.

Со оглед на тоа што интегралот на нормалната распределба не е решлив преку примитивна функција, за исчитување на неговите вредности се користат готови табели или подобро, соодветен софтвер.

ПРИМЕР 4.12 Сервис за автомобили продава популарно масло за мотори. Кога резервите ќе паднат на 20 галони се прави нарачка на масло. Менаџерот е загрижен дека лесно може да се случи недостаток на масло додека не дојде нарачката. Проценето е дека испораките на маслото се со нормална распределба со просек од 15 и дисперзија од 36 галони. Колкава е веројатноста дека ќе се случи недостаток на масло, додека дојде нарачката, т.е. $p(x > 20)$?

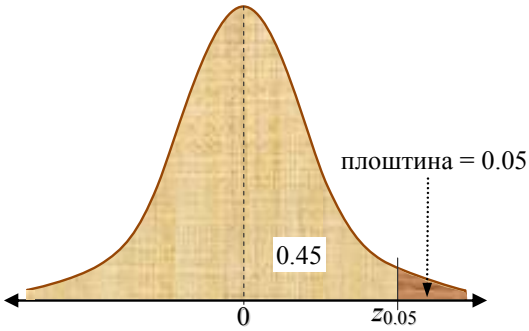
Решение

Преминуваме кон стандардна нормална распределба $z = \frac{20 - 15}{6} = 0.83$.



Од таблицата за нормална распределба (додаток B) ја читаме плоштината под кривата од 0 до 0.83 и оттука (види ја сликата) веднаш се добива $p(x > 20) = 0.2033$.

Оваа веројатност му изгледа на менаџерот релативно висока, и тој би сакал веројатноста да се случи недостаток на масло да не биде поголема од 0.05. Тогаш треба да се најде точката од која надесно плоштината межу кривата и x-оската биде 0.05 (види ја сликата).



Од таблицата добиваме $z_{0.05} = 1.645$, па оттука ја добиваме вредноста

$$x = \mu + \sigma \cdot z_{0.05} = 15 + 6 \cdot 1.645 = 24.87$$

што значи дека со правење нарачки кога резервите ќе паднат на 24.87 галони, веројатноста да се случи недостаток на масло е само 0.05. ■

ХИ-КВАДРАТ РАСПРЕДЕЛБА. Сума на квадрати на n случајни променливи со стандардна нормална распределба ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) дава случајна променлива со $\chi 2$ (хи-квадрат) распределба со n степени на слобода.

Формално, за заедничката густина на распределба на n независни случајни променливи со стандардна нормална распределба може да ставиме

$$p(Q)dQ = \int_D \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2} dx_i = \int_D \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

каде што D е површина на инфенитезималната сфера определена со $Q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ и радиус $R = \sqrt{Q}$, т.е. $dR = (1/2\sqrt{Q})dQ$. Подинтегралниот експонент едноставно се изразува со Q и е константа во интегралот што дава

$$p(Q)dQ = \frac{e^{-Q/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int_D dx_1 dx_2 \ldots dx_n \ .$$

Плоштината на n-димензионална сфера е $\dfrac{nR^{n-1}\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})}$, што дава

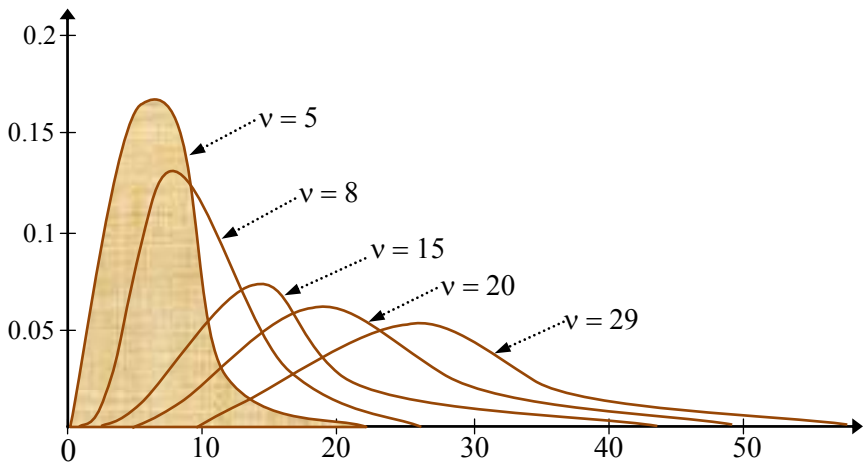
$$p(Q)dQ = \frac{e^{-Q/2}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{nR^{n-1}\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} dR = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} Q^{n/2-1} e^{-Q/2} dQ .$$

Значи густината на $\chi 2$ распределбата е $f(x) = \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$.

Степените на слобода опишуваат колку од параметрите се слободни да варираат. На пример, ако разгледуваме 3 коцки и вкупниот збир 13, тогаш со случаен избор на два броја третиот е веќе одреден до збир 13. Значи од 3-те коцки, две може да варираат, а третата е секогаш определена од другите 2, па имаме 2 степени на слобода. Во многу ситуации, бројот на степени на слобода е еднаков на бројот на параметри намален за 1. Ова не е случај кај $\chi 2$ распределбата бидејќи сите n случајни променливи што се во сумата на квадрати може да варираат, па бројот на степени на слобода е n.

Хи-квадрат распределбата е специјален случај на гама распределбите и се добива за $\alpha = n/2$ и $\beta = 2$.

На сл. 4.11 се прикажани густини на $\chi 2$ распределба за различни степени на слобода (ν).



Слика 4.11 *Густина на хи-квадрат распределба*

$\chi 2$ распределбата се користи за тестирање на случајните променливи на независност, хомогеност, квалитет на апроксимација, итн.

ПРИМЕР 4.16 Компанија за производство на батерии за мобилни телефони има развиено нов тип литиумска батерија што во просек трае 250 часа со стандардна девијација од 14 часа. Траењето на батериите има нормална распределба. При контрола на квалитетот случајно се избрани и испитани 7 батерии и добиена е стандардна девијација од 22 часа. Истиот тест е повторен на други случајно избрани 7 батерии. Колкава е веројатноста дека стандардната девијација на повторениот тест да биде поголема од 22?

Решение

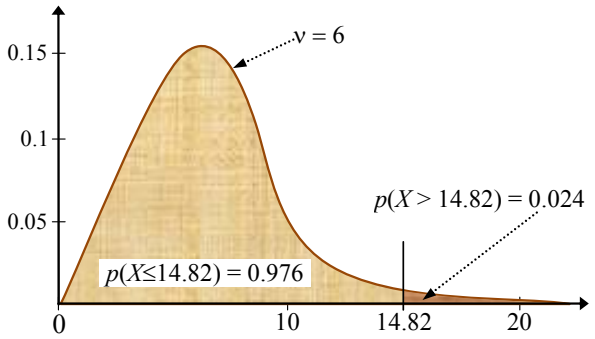
Нека Y_i = "траење на батерија". Сумата на квадратите на $\frac{Y_i - \mu}{\sigma}$ каде што μ е просекот, а σ стандардната девијација, е сума на квадрати на случајни променливи со стандардна нормална распределба, т.е. случајна променлива X со $\chi 2$ распределба. Случајната променлива X може да се претстави со

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = (n-1) \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu)^2 = (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2},$$

каде што S^2 е случајна променлива $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu)^2$ што ја дава дисперзијата на траењето на батериите. Нејзиниот корен е стандардната девијација.

Во нашиот случај имаме дека бројот на степени на слобода е 7 – 1 = 6, σ = 14 и S = 22 и оттука добиваме $X = 6 \frac{22^2}{14^2} = 14.8163$.

Значи X има $\chi 2$ распределба со 6 степени на слобода и ние ја бараме веројатноста $p(X > 14.8163)$, како што тоа е прикажано на следната слика.



Значи веројатноста стандардната девијација при повторениот тест да биде поголема од 22 е само 2.4%. ■

СТУДЕНТОВА РАСПРЕДЕЛБА. Ако случајната променлива X има стандардна нормалната распределба, а Y има $\chi 2$ распределба со n степени на слобода и ако X и Y се независни, тогаш случајната променлива T дефинирана со

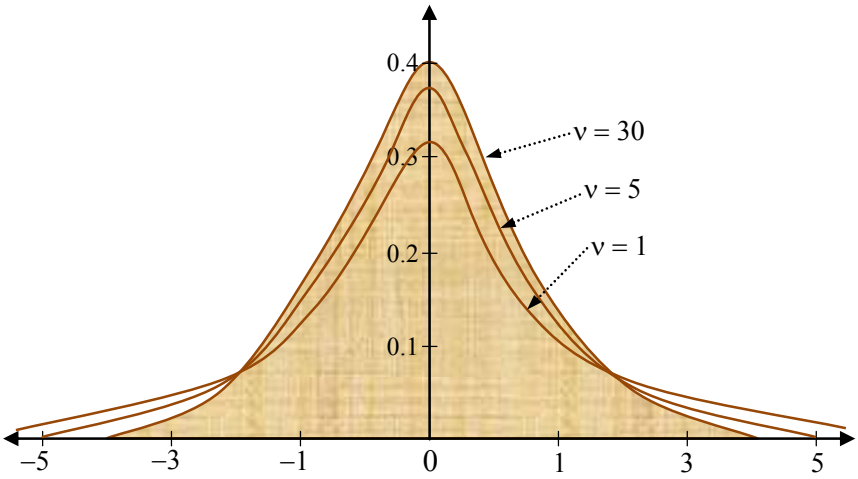
$$T = \frac{X\sqrt{n}}{\sqrt{Y}}$$

има студентова распределба со n степени на слобода. Густината на студентовата распределба е

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

што бара користење на таблица за исчитување на нејзините интеграли (веројатности).

Генералниот облик на густината на студентовата распределба е сличен на густината на стандардната нормална распределба ($\mu = 0$ и $\sigma = 1$), со разлика дека е малку поспуштена и поширока.



Слика 4.12 *Густина на студентова распределба*

Со растење на бројот на степени на слобода, T-рапределбата се приближува кон стандардната нормална распределба.

ПРИМЕР 4.17 Компанија произведува сијалици. Таа тврди дека просечниот век на нивните сијалици е 300 денови. Контролата на квалитет избрала случај-

но 15 сијалици за тестирање. Овие сијалици просечно траеле 290 денови со стандардна девијација од 50 денови. Ако тврдењето на компанијата е точно, колкава е веројатноста дека 15 случајно избрани сијалици ќе имаат просечен век на траење не поголем од 290 денови?

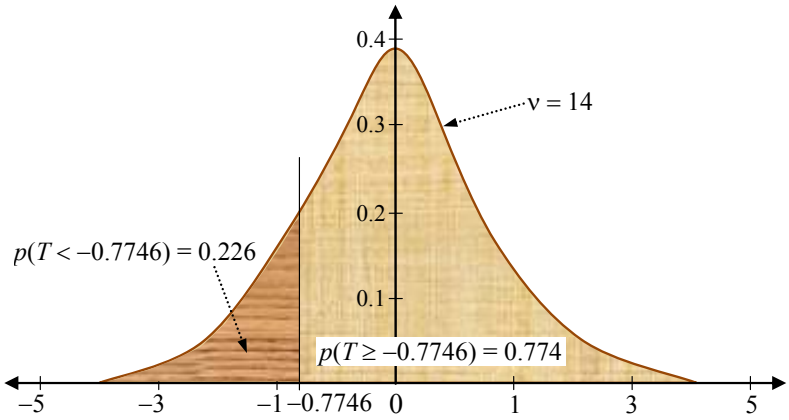
Решение

Ако случајната променлива X = "просечен век на траење на сијалица", таа има нормална распределба со просек μ и стандардна девијација $\sigma/\sqrt{n}$ додека $(n-1)S/\sigma$ има $\chi 2$ распределба со $n-1$ степени на слобода. Тогаш, случајната променлива T дадена со

$$T = \frac{\dfrac{X-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1}\,\dfrac{S}{\sigma}} = \frac{X-\mu}{S}\sqrt{n}$$

има студентова распределба со n–1 степени на слобода. Во нашиот пример имаме

$$T = \frac{290-300}{50}\sqrt{15} = -0.7746 \quad \text{со 14 степени на слобода.}$$



Така добиваме дека веројатноста просечниот век на траење на сијалиците да биде не поголем од 290 денови е плоштината под густината на студентовата распределба налево од –0.7746 и изнесува 22.6%. ■

ФИШЕРОВА РАСПРЕДЕЛБА. Ако случајната променлива X има $\chi 2$ распределба со n_1 степени на слобода, а Y има $\chi 2$ распределба со n_2 степени на слобода и ако X и Y се независни, тогаш случајната променлива F дефинирана со

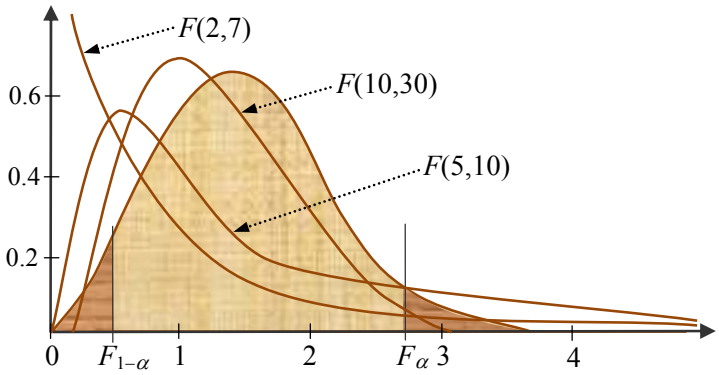
$$F = \frac{X / n_1}{Y / n_2} = \frac{X \cdot n_2}{Y \cdot n_1}$$

има фишерова распределба со (n_1, n_2) степени на слобода. Густината на фишеровата распределба е релативно комплицирана

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} n_1^{\frac{n_2}{2}} n_2^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} (n_2 + n_1 x)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, \ x \geq 0.$$

Јасно е дека ако случајната променлива F има фишерова распределба, тогаш и $1/F$ има исто така фишерова распределба. Ако пак T има студентова распределба со n степени на слобода, тогаш T^2 има фишерова распределба $F(1, n)$.

На сл. 4.13 е прикажана типична густина на фишеровата распределба за некои вредности на n_1 и n_2. Очигледно, нејзиниот облик за определени вредности на параметрите n_1 и n_2 наликува на $\chi 2$ распределбата иако, се разбира, таа се добива како нивен количник и како таква има 2 параметра – степени на слобода.



Слика 4.13 *Густина на фишерова распределба*

F распределбата се користи за споредба на случајни променливи со $\chi 2$ распределба. Имено, разликата меѓу 2 случајни променливи со $\chi 2$ распределба не дава $\chi 2$ распределба, па оттука наместо разлика се разгледува однос. Така, F распределбата може да се користи за проверка која од 2 случајни променливи има поголема или помала дисперзија.

ПРИМЕР 4.18 Од група на жени и мажи пливачи, на случаен начин се избрани 7 жени и 12 мажи со цел да се испитаат варијациите во нивните висини. Од

порано познатите стандардни девијации заедно со стандардните девијации за избраните мажи и жени се дадени во следната табела:

Популација	*стандардна девијација*	*стандардна девијација на избраните*
жени	30	35
мажи	50	45

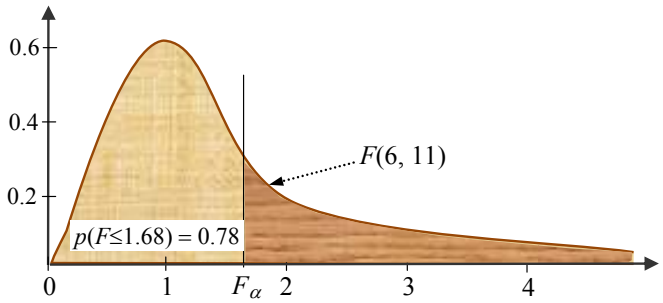
Колкава е веројатноста дека стандардната девијација кај жените е поголема од онаа кај мажите?

Решение

Ако случајната променлива X = "стандардна девијација во висината на жените пливачи", а Y = "стандардна девијација во висината на мажите пливачи" тогаш случајната променлива

$F = \dfrac{X^2}{Y^2}$ има фишерова распределба со (6, 11) степени на слобода.

Нејзината вредност ја добиваме со $F = \dfrac{(X/\sigma_1)^2}{(Y/\sigma_2)^2} = \dfrac{(35/30)^2}{(45/50)^2} = 1.68$ и оттука добиваме веројатност од 0.78.



Ако пак пресметуваме реципрочно, добиваме фишерова распределба со (11, 6) степени на слобода и вредност

$$F = \frac{(Y/\sigma_2)^2}{(X/\sigma_1)^2} = \frac{(45/50)^2}{(35/30)^2} = 0.595\,,$$

што исчитувајќи од таблица дава веројатност 0.22. ■

Како што се гледа, случајните променливи се карактеризираат преку нивната функција на распределба. Од друга страна, функцијата на распределба е многу понезгодна за користење од законот на распределба во дискретен случај или густината на распределба во непрекинат случај. Некој би поставил прашање зошто тогаш таа воопшто се дефи-

нира и изучува. Концептот на функција на распределба е многу општ и се применува идентично на секоја случајна променлива, дискретна, непрекината или мешана. Секоја случајна променлива X има функција на распределба дефинирана на идентичен начин $F(x) = p(X < x)$, за $-\infty < x < \infty$. Дискретните случајни променливи пак имаат закон на распределба, непрекинатите имаат густина на распределба, мешаните имаат комбинација на двете. Значи заедничките особини на сите типови случајни променливи може да се сумираат во форма на функција на распределба наместо да се користат различни формули. Сепак, изучувањето на особините на случајните променливи преку функцијата на распределба е често пати заплеткана работа и затоа се користат законите и густините на распределба. Функцијата на распределба вообичаено се користи за добивање на општи тврдења за случајните променливи.

4.3. Случајни вектори

Во многу случаи од интерес се повеќе од една случајна променлива и тоа разгледувани заеднички а не индивидуално. На пример, при попис на население, некој вообичаено е заинтересиран за повеќе случајни променливи како заработувачката, возраста, полот итн. Секоја од овие променливи е интересна, но кога 2 или повеќе се изучуваат симултано, се добиваат нови информации за населението. На пример, изучувањето на овие променливи симултано може да даде увид во еманципацијата на жените. Во екологијата се изучуваат случајните променливи на растителните и животинските видови. На пример, симултаното изучување на случајните променливи на предаторите и пленовите даваат увид во еколошката рамнотежа. Заедничката распределба на просторните компоненти, на пример компонентите на брзината на ветровите се користи во студиите за атмосферските турболенции.

Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност и нека $X_1, X_2, ..., X_n$ се случајни променливи со домен во Ω. Тогаш, подредената n-торка $(X_1, X_2, ..., X_n)$ се нарекува случаен вектор. Како и во други случаи, заради едностаност се ограничуваме на разгледување на дводимензионалните случајни вектори, а дискусијата праволиниски се обопштува на n-димензионалните случајни вектори.

Веројатностите поврзани со случаен вектор (X, Y) вообичаено се означуваат со $p(X = x, Y = y) = p((X = x)$ и $(Y = y))$.

За случајниот вектор (X, Y) може да се дефинира следната функција на распределба (од 2 променливи)

$$F(x, y) = p(X < x,\ Y < y)$$

определена на целата R^2, со особини аналогни на секоја функција на распределба. Имено, важи:

1) $0 \le F(x, y) \le 1$,

2) $F(x, y)$ е монотоно неопаѓачка по секој од аргументите,

3) $F(x, y)$ е непрекината од лево по секој аргумент,

4) $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$,

5) ако $F_1(x)$ и $F_2(x)$ се функции на распределба на X и Y соодветно, тогаш $F(x, +\infty) = F_1(x)$ и $F(+\infty, y) = F_2(y)$.

Случајниот вектор (X, Y) е дискретен, ако се дискретни случајните променливи X и Y. Во дискретен случај, законот на распределба на случајниот вектор (X, Y) е даден со матрица

$$p_{ij} = p(X = x_i,\ Y = y_j), \quad \sum p_{ij} = 1 .$$

Сега, која било веројатност се добива со сумирање на соодветните елементи од матрицата на веројатности

$$p(a \le X \le b,\ c \le Y \le d) = \sum_{\substack{i,j:a \le x_i \le b,\\ c \le y_j \le d}} p_{ij} .$$

Засебните закони на распределба на X и Y праволиниски се добиваат од заедничкиот закон $p(X = x_i,\ Y = y_j)$ со

$$p(X = x_i) = \sum_j p_{ij} \quad \text{и} \quad p(Y = y_j) = \sum_i p_{ij} .$$

ПРИМЕР 4.20 Двајца експерти оценувале еден производ при што првиот на примероците на призводите им давал оценка од 1 до 5 (случајна променлива X), а вториот од 1 до 3 (случајна променлива Y). Заедничкиот закон на распределба на дадените оценки на производите е даден во следната табела:

		X					
		1	2	3	4	5	
Y	1	0.02	0.04	0.05	0.04	0.01	0.16
	2	0.05	0.10	0.13	0.12	0.07	0.47
	3	0.01	0.05	0.08	0.10	0.13	0.37
		0.08	0.19	0.26	0.26	0.21	

На пример, веројатноста првиот експерт да го оценил производот со 4, а вториот со 2 е $p(X = 4,\ Y = 2) = 0.12$.

Да се најдат законите на распределба на X и Y.

Решение

Индивидуалните закони на распределба на X и Y се добиваат со сумирање на веројатностите по колони за X и по редици за Y (тоа е веќе направено во горната табела).

X	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0.08	0.19	0.26	0.26	0.21

Y	1	2	3
$p(Y = x_i)$	0.16	0.47	0.37

. ■

Случајниот вектор (X, Y) се смета за непрекинат, ако постои ненегативна функција $f(x, y)$, таква што за секој x, y важи

$$F(x,y) = p(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

што повлекува $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Функцијата $f(x, y)$ е заедничка густина на распределбата на случајните променливи X и Y, т.е. густина на распределба на случајниот вектор (X, Y). Секогаш претпоставуваме дека $f(x, y)$ е интеграбилна функција. Јасно е дека

$$p((x,y) \in D) = \iint_D f(x,y)dxdy .$$

Индивидуалните функции на распределба $F_1(x)$ и $F_2(x)$, како и густините на распределба $f_1(x)$ и $f_2(x)$ се добиваат од заедничката со

$$F_1(x) = p(X < x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv \quad \text{и}$$

$$F_2(x) = p(Y < x) = F(+\infty,x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dvdu \text{, т.е.}$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv \quad \text{и} \quad f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,x)du .$$

Кога распределбата на случајниот вектор (X, Y) е позната, распределбата на секоја од компонентните случајни променливи може да се добие. Овие индивидуални распределби на случајните променливи што се елементи на случајниот вектор се нарекуваат *маргинални* распределби. Во општ случај, обратното не важи. Но ако компонентните случајни променливи се независни, тогаш маргиналните распределби ја определуваат распределбата на случајниот вектор.

ПРИМЕР 4.21 Во некој регион познато е дека има 4 видови карпи. При испитувањата, земани се примероци (карпести структури) со одреден волумен. Нека X_1, X_2 и X_3 бидат пропорциите на волумените на карпите од вид 1, 2 и 3 во случајно избран примерок (пропорцијата за видот 4 е редундантна и се добива од $X_4 = 1 - X_1 - X_2 - X_3$). Заедничката густина на распределбата на волумените на карпите е

$$f(x, y, z) = kxy(1 - z),\ \ x, y, z \in [0, 1],\ \ x + y + z \le 1;$$

$$f(x, y, z) = 0, \text{ во спротивно.}$$

Определи го k? Најди ја веројатноста во случајно избрана карпеста структура, видот 3 да учествува со најмаку 50%.

Решение

Од условот интегралот на густината на распределба да биде 1 добиваме

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^{1-y-z} kxy(1-z)dxdydz \ = \frac{k}{2}\int_0^1\int_0^1(1-y-z)^2\, y(1-z)dydz \ =$$

$$\frac{k}{2}\int_0^1(1-z)(\int_0^1(y+y^3+yz^2-2y^2-2yz+2y^2z)dy)dz \ =$$

$$\frac{k}{2}\int_0^1(1-z)(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}z+\frac{1}{2}z^2)dz \ = \frac{k}{2}(\frac{z}{12}-\frac{5z^2}{24}+\frac{5z^3}{18}-\frac{z^4}{8})\Big|_0^1 \ = \ \frac{k}{72}.$$

Оттука следува $k = 72$.

Веројатноста видот 3 да учествува со повеќе од 50% е еднаква на интегралот

$$72\int_{0.5}^1\int_0^1\int_0^{1-y-z} xy(1-z)dxdydz \ = 36\left(1-(\frac{1}{24}-\frac{5}{96}+\frac{5}{144}-\frac{1}{128})\right) \ = \ 0.4060. \ \blacksquare$$

Распределбите на случајните вектори, дури и ако се составени од случајни променливи со релативно едноставни распределби, често се доста комплицирани. Во поглавјето 5.5.3 посебно ќе ги разгледуваме случајните вектори со нормална распределба.

4.3.1. Независност на случајни променливи

Нека (Ω, Φ, p) е простор на веројатност и нека X и Y се случајни променливи со домен во Ω.

Дефиниција 4.3 Случајните променливи X и Y се независни акко за кој било $x, y \in \mathrm{R}$ важи $p(X < x,\ Y < y) \ = p(X < x)p(Y < y)$.

Значи случајните променливи X и Y се независни ако се независни случајните настани $(X < x)$ и $(Y < y)$. Сега ако $F(x, y)$ е заедничка функција на распределба на (X, Y), а $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ се функции на распределба на X и Y, веднаш следува дека

$$F(x, y) = p(X < x,\ Y < y) = p(X < x)p(Y < y) = F_X(x)F_Y(y)$$

што е еквивалентно тврдење на дефиницијата 4.2. Често од полза е и следното еквивалентно тврдење.

Во дискретен случај, заедничката распределба на случајните променливи X и Y е дадено со матрица

$$p_{ij} = p(X = x_i,\ Y = y_j), \quad \sum p_{ij} = 1 .$$

Тогаш X и Y се независни акко за секој i и j важи

$$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}$$

каде што $p_{i.} = p(X = x_i) = \sum_j p_{ij}$, $p_{.j} = p(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$.

ПРИМЕР 4.22 Да се најдат законите на распределба на случајните променливи $S = X + Y$ и $T = X \cdot Y$ ако X и Y се независни дискретни случајни променливи со закони на распределба

X	10	11	12	16
$p(X = x_i)$	0.4	0.2	0.1	0.3

Y	2	3
$p(Y = x_i)$	0.4	0.6

Решение

Условот за независност $p(X = x_i,\ Y = x_j) = p(X = x_i)p(Y = x_j)$ овозможува лесно да се најдат бараните закони на распределба.

S	12	13	14	15	18	19
$p(S = x_i)$	0.16	0.32	0.16	0.06	0.12	0.18

T	20	22	24	30	32	33	36	48
$p(T = x_i)$	0.16	0.08	0.04	0.24	0.12	0.12	0.06	0.18

. ■

Во непрекинат случај, нека заедничката распределба на случајните променливи X и Y е дадена со заедничката густината $f_{X,Y}(x, y)$. Тогаш X и Y се независни акко во секоја точка на непрекинатост на функциите $f_{X,Y}(x, y)$, $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ важи $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

ЗАДАЧИ

1. Нека X е случајна променлива што означува број на грешни битови при дигитална трансмисија на 8 бита. Нејзиниот закон на распределба е

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(X=x_i)$	0.6245	0.3132	0.0562	0.0054	0.0004	0.0002	0.00008	0.00002	0.00000

Пресметај ја веројатноста при една трансмисија на 8 бита:

а) да има не повеќе од 2 грепни бита;

б) да има повеќе од 3 грепни бита;

в) да има непарен број грешни бита.

2. Една машинска компонента се состои од 3 механички компоненти. Веројатностите секој од 3-те компоненти да ги задоволува спецификациите се 0.95, 0.98 и 0.99. Под претпоставка дека компонентите се независни, најди го законот на распределба на случајната променлива X = "број на компоненти што ги задоволуваат спецификациите".

3. Дебелината на даските (во инчи) што купувачите ги нарачуваат е случајна променлива X со функција на распределба

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ за } x<1/8 \\ 0.2, \text{ за } 1/8\le x<1/4 \\ 0.9, \text{ за } 1/4\le x<3/8 \\ 1, \text{ за } x\ge 3/8 \end{cases}$$

Определи ги веројатностите

а) $p(X\le 1/4)$; б) $p(3/16\le X\le 5/16)$;

в) $p(X>1/4)$; г) $p(1/5\le X\le 1/2)$.

4. Се извршува серија независни експерименти сé додека по втор пат не се случи настанот А. Ако случувањето на А е со веројатнос p, најди го законот на распределба на случајната променлива X = "број на извршени експерименти".

5. Економично е да се лимитираат меѓудржавните телефонските разговори на помалку од 3 минути. Нека счучајната променлива X = "траење на меѓудржавен телефонски разговор". Функцијата на распределба на X може да биде

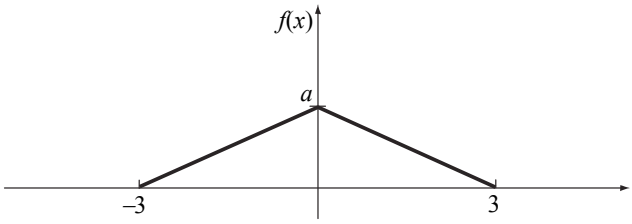
$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ за } x<0 \\ 1-e^{-x/3}, \text{ за } 0\le x<3 \\ 1-e^{-x/3}/2, \text{ за } x\ge 3 \end{cases}$$

а) Најди ја веројатноста телефонскиот повик да е подолг од 2 минути;

б) Најди ја веројатноста телефонскиот повик да е меѓу 2 и 6 минути;

в) Нацртај ја густината на распределба. Каква е оваа случајна променлива?

6. Густината на распределба на случајна променлива X е како на сликата



а) Определи го a;

б) Скицирај ја $F(x)$;

в) Пресметај ги веројатностите $p(X > 2)$ и $p(X > 2 \mid X > 1)$.

7. Нека случајната променлива X означува дијаметар на отворот што дупчалка го прави во еден метален дел. Дијаметарот треба да биде 12.5 милиметри, а секој направен отвор со дијаметар поголем од 12.6 милиметри го прави делот неупотреблив. Вообичаено, грешките настануваат од вибрации што резултира во зголемен дијаметар. Од поранешни податоци познато е дека густината на распределба на X е приближно $f(x) = 20e^{-20(x-12.5)}$. Пресметај ја веројатностите дека делот ќе биде добар и дека делот ќе биде неупотреблив.

8. Животниот век X (во часови), на една електронска компонента има густина на распределба

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ за } x < 100 \\ \dfrac{200a}{x^2}, \text{ за } x \geq 100 \end{cases}$$

Определи го a и веројатноста компонентата да преживее 150 часови работа.

9. Дебелината на обвивката на фоторезистентност при производството на полупроводниците е рамномерно распределена од 0.2050 до 0.2150 микрометри.

а) Определи го процентот на обвивките подебели од 0.2125 микрометри;

б) Која дебелина ја надминуваат 10% од обвивките.

10. Концетрацијата на некој загадувач во една средина предизвикан од изворот на загадувањето може да се моделира со следната густина на распределба ($a > 0$)

$$f(r) = \begin{cases} 0, \text{ за } r < 0 \\ ae^{-ar}, \text{ за } r \geq 0 \end{cases}$$

каде што r е растојанието од изворот на загадувањето. Определи го радиусот во кој е содржано 95% од загадувањето.

11. Времето на откажување на вентилаторот за ладење на еден тип процесор може да се моделира со експоненцијална распределба со $\lambda = 0.0003$.

    а) Која е пропорцијата на вентилаторите што траат најмалку 10000 часа?

    б) Која е пропорцијата на вентилаторите што траат најмногу 7000 часа?

12. Времето меѓу пристигнувањата на таксијата на базната станица е експоненцијално распределена случајна променлива со очекување од 10 минути.

    а) Пресметај ја веројатноста дека таксито ќе се чека подолго од 1 час;

    б) Под претпоставка дека некој веќе чека еден час за такси, пресметај ја веројатноста дека такси ќе дојде во следните 10 минути.

13. Радиусот на држач во еден оптички мемориски уред (како DVD, Bluray) е со нормално распределена димензија со очекување 0.2508 инчи и стандардна девијација 0.00005 инчи. Спецификациите на држачот се 0.2500 ± 0.0015 инчи. Која пропорција на држачите е во согласност со спецификациите?

14. Дијаметарот на точката што ја печати еден печатач е со нормална распределба со очекување 0.002 инчи и стандардна девијација од 0.0004 инчи.

    а) Пресметај ја веројатноста дијаметарот на точката да надмине 0.0026 инчи;

    б) Колкава е вројатноста дијаметарот да е меѓу 0.0014 и 0.0026 инчи?

    в) Која стандардна девијација на дијаметарот е потребна за веројатноста под б) да биде 0.995?

15. Дебелината на ламинатната покривка за дрвени површини е нормално распределена со просек од 5 милиметри и стандардна девијација од 0.2 милиметри.

    а) Колкава е веројатноста дебелината на покривката да надмине 5.5 милиметри?

    б) Ако спецификациите бараат дебелината да биде меѓу 4.5 и 5.5 милиметри, колкава пропорција од покривките е во спецификацијата?

    в) Под која дебелина се 95% од покривките?

19. Нека скорот на тест на интелегенција (IQ) е нормално распределена случајна променлива X со очекување 100. Тестирани се 20 случајно избрани луѓе

при што е добиена стандардна девијација 15. Колкава е веројатноста дека просечниот скор на групата ќе биде најмногу 110?

20. Животниот век на спакуван магнетен диск изложен на корозивен гас има Веибул распределба со $\beta = 2$ и просечен животен век од 600 часови.

а) Пресметај ја веројатноста дека дискот ќе трае најмалку 500 часови;

б) Пресметај ја веројатноста дека дискот ќе откаже пред 400 часови.

21. Заедничката распределба на дискретните случајни променливи X, Y и Z е дадена во табелата:

X	Y	Z	$p(x, y, z)$
1	1	1	0.05
1	1	2	0.10
1	2	1	0.15
1	2	2	0.20
2	1	1	0.20
2	1	2	0.15
2	2	1	0.10
2	2	2	0.05

Определи ги веројатностите:

а) $p(X = 2)$; б) $p(X = 1, Y = 2)$;
в) $p(Z < 1.5)$; г) $p(X = 1$ или $Z = 2)$;
д) $p(X = 1 \mid Y = 1)$;
ѓ) $p(X = 1, Y = 2 \mid Z = 2)$;
е) $p(X = 1 \mid Y = 1, Z = 2)$;
ж) Определи ја распределбата на X под услов дека е $Y = 1$ и $Z = 2$.

22. Во една нарачка од 15 печатачи: 4 се со проширени графички можности, 5 со проширена меморија и 6 со двете карактеристики. Случајно се бираат 4 печатачи. Нека X, Y и Z се бројот на печатачите во примерокот со проширени графички можности, проширена меморија и двете карактеристики соодветно.

а) Дефинирај ја областа на распределбата на случајниот вектор (X, Y, Z);

б) Определи ја условната распределба на X ако $Y = 2$;

в) Пресметај ги веројатностите: $p(X = 1, Y = 2, Z = 1)$, $p(X = 1, Y = 2 \mid Z = 1)$ и $p(X = 2 \mid Y = 2)$.

23. Една квалитетна WEB страна за мал бизнис содржи 100 страни при што 60%, 30% и 10% од страните содржат мала, средна и висока графичка содржина соодветно. Земен е примерок од 4 страни и нека X и Y означуваат број на страни со средна и висока графичка содржина соодветно. Определи ги

а) $f_{XY}(x, y)$; б) $f_X(x)$; в) $f_{Y|3}(y)$; г) Дали се X и Y независни?

24. Нека случајната променлива X означува потребно време (во милисекунди) за конекција на компјутер со компјутерски сервер, а Y потребно време (во милисекунди) до авторизацијата на корисникот на компјутерот на серверот ($Y = X +$ ауторизација). Распределбата на счучајниот вектор (X, Y) е

$$f_{XY}(x, y) = 6 \cdot 10^{-6} e^{(-0.001x - 0.002y)}, \quad \text{за } x < y.$$

а) Покажи дека $f_{XY}(x, y)$ е густина на распределба;

б) Најди ја веројатноста дека конекцијата е покуса од 1000, а авторизацијата од 2000 милисекунди;

в) Најди ја веројатноста авторизацијата да е покуса од 2000 милисекунди;

г) Пресметај ја веројатноста дека авторизацијата трае подолго од 2000 милисекунди ако конекцијата траела 1500 милисекунди;

д) Дали X и Y се независни?

25. Популарен производител на автомобилски делови прима Интернет нарачки преку 2 независни WEB адреси. Времето меѓу нарачките за секоја адреса во типичен ден е со експоненцијална распределба со очекување од 3.2 минути.

а) Пресметај ја веројатноста дека нема да има нарачка во 5-минутен период. Колку е истото во 10-минутен период.

б) Колкава е веројатноста дека на двете адреси ќе примат по 2 нарачки меѓу 10 и 15 минути откако сајтовите официјално се отворени за нарачување?

26. Тежината на циглите што се користат во одредени градби е со нормална распределба со очекување од 3 фунти и стандардна девијација од 0.25 фунти. Под претпоставка дека тежините на циглите се независни земен примерок од 20 цигли.

а) Колкава е веројатноста дека сите цигли од примерокот се потешки од 2.75 фунти?

б) Колкава е веројатноста дека најтешката цигла во примерокот ќе надмине 3.75 фунти?

5

Бројни карактеристики на случајни променливи

Една случајна променлива X е наполно определена со својот закон на распределба, т.е. густината на распределба ако X е непрекината или со функцијата на распределба. Во многу практични ситуации законот, густината или функцијата на распределба не може да се определат или пак од интерес е некоја "сумарна" карактеристика на X што се обезбедува многу поедноставно отколку распределбата.

5.1. Очекување

Нека е дадена случајна променлива X со закон на распределба

x_1	x_2	...	x_n
p_1	p_2	...	p_n

или густина $f(x)$.

Дефиниција 5.1 Очекување или просек (expectation) на X е бројот $E(X)$ даден со

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx .$$

Очекувањето е мера за локација во смисла што тоа дава идеја за тоа каде се наоѓа распределбата на X.

Често пати наместо терминот очекување и ознака $E(X)$, се користи терминот просек и ознака μ. Сепак, μ понекогаш се користи како пара-

метар во некои распределби, а не е очекување на распределбата, па е потребно малку внимание при користење на ознаките.

Во пракса, во дискретен случај, често се случува вредностите на X да се еднаквоверојатни ($p_i = 1/n$) и тогаш очекувањето се сведува на стандарден просек $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. На пример, просечен успех на студирање, просечна старост на жител на една држава, просечна тежина на пастрмка во Охридското езеро итн.

Најважните особини на очекувањето се дадени во следната теорема.

Теорема 5.1 Очекување ги има следните особини:

1) $E(C) = C$, кога C е константа,
2) $E(CX) = CE(X)$,
3) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$,
4) $E(X\cdot Y) = E(X)E(Y) + K_{X,Y}$, каде што $K_{X,Y} = E(X–E(X))(Y–E(Y))$ и се нарекува момент на корелација или коваријација. Ако X и Y се независни, $K_{X,Y} = 0$, т.е. $E(X\cdot Y) = E(X)E(Y)$.

Доказ: Следува директно од дефиницијата. ■

Понатаму, вообичаено ќе ги испуштаме заградите при работа со бројните карактеристики на случајите променливи и наместо, на пример $E(X)$, ќе пишуваме едноставно EX или во случаи кога е тоа соодветно ќе користиме едноставно μ.

5.2. Дисперзија

Нека е дадена случајна променлива X со закон на распределба

x_1	x_2	…	x_n
p_1	p_2	…	p_n

или густина $f(x)$.

Дефиниција 5.2 Дисперзија (variance) на X е бројот DX даден со

$$DX = E(X - EX)^2 = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \ldots + (x_n - EX)^2 p_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 p_i$$

или во непрекинат случај $\int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx$.

Диспезијата на X е мера за раштрканоста на вредностите на X околу нејзиното очекување.

Во пракса, во дискретен случај, често се случува вредностите на X да се еднаквоверојатни ($p_i = 1/n$), и тогаш дисперзијата се сведува на $DX = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - EX)^2$. На пример, при пописот на население во една држава, од голема важност е просечната старост на населението, но речиси од слична важност е и дисперзијата на староста на населението. Имено, поголема дисперзија значи дека во државата има поголем број на старо и младо население.

Најважните особини на дисперзијата се дадени во следната теорема.

Теорема 5.2 Дисперзијата ги има следните особини:

1) $DC = 0$, кога C е константа,

2) $D(CX) = C^2D(X)$,

3) $D(X + Y) = DX + DY + 2K_{XY}$; Ако X и Y се независни, $K_{X,Y} = 0$, т.е. $D(X + Y) = DX + DY$,

4) $DX = EX^2 - (EX)^2$.

Доказ: Следува директно од дефиницијата. На пример, за особината 4) имаме

$$DX = E(X-EX)^2 = E(X^2-2XEX + (EX)^2) =$$
$$= EX^2 - 2\,(EX)(EX) + (EX)^2 = EX^2 - \,(EX)^2. \blacksquare$$

Како што за очекувањето EX се користи μ, за дисперзијата често пати се користи ознаката σ^2. И двете ознаки потекнуваат од нормалната распределба. Квадратниот корен на дисперзијата $\sigma = \sqrt{DX}$ се нарекува стандардна девијација и има голема примена во статистичките оценки.

ПРИМЕР 5.1 Се разгледува дизајн на три нови производи од аспект на можна повратна добивка. Одделот за маркетинг има проценки дека дизајнот А ќе даде добивка од 3 милиони евра. Дизајнот В е понесигурен од аспект на добивката и грубо е проценето дека со 30% шанси ќе донесе 7 милиони, а со 70% шанси само 2 милиони евра. Проценката за дизајнот С е дека со 30% шанси ќе донесе 6 милиони, со 50% шанси 3 милиони и со 20% шанси само 1 милион евра. Кој дизајн би го преферирале?

Решение

Нека X, Y и Z се случајни променливи дефинирани со:

X = "добивка од дизајнот А",

Y = "добивка од дизајнот В",

Z = "добивка од дизајнот С".

Очекувањата на секоја од трите случајни променливи се:

$EX = 3\cdot 1 = 3$ милиони €,

$EY = 7\cdot 0.3 + 2\cdot 0.7 = 3.5$ милиони €,

$EZ = 6\cdot 0.3 + 3\cdot 0.5 + 1\cdot 0.2 = 3.5$ милиони €,

Според очекувањето, дизајните В и С се во предност во однос на А. Од друга страна, за дисперзиите добиваме:

$DX = 0 \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{DX} = 0$ милиони €,

$DY = (7-3.5)^2\cdot 0.3 + (2-3.5)^2\cdot 0.7 = 5.25 \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{DY} = 2.29$ милиони €,

$DZ = 2.5^2\cdot 0.3 + 0.5^2\cdot 0.5 + 2.5^2\cdot 0.2 = 3.25 \Rightarrow \sigma_Z = 1.80$ милиони €.

Дизајните В и С имаат исто очекување, но поради помалата стандардна девијација, дизајнот С секако е посигурен дека ќе ја донесе добивка според неговото очекување. Како да се одлучиме меѓу дизајните А и С? Тука би било логично да дадеме лесна предност за дизајнот А, бидејќи разликата во очекуваната добивка во корист на дизајнот С не е доволно голема да ја компензира стандардната девијација од 1.80 милиони €. Но некој што е наклонет на ризици може да го форсира дизајнот С и со добри шанси да оствари добивка од 3.25 ± 1.80 милиони €. ■

Една од предностите на користење на σ наместо σ^2 како мера за дисперзираност е во тоа што таа е изразена во исти единици како очекувањето и може директно да се споредува со него. Бездимензионалниот број $v = \sigma/\mu$ се нарекува *коефициент на варијација* и понекогаш се користи за олеснување на споредбите на случајните променливи што се со различни димензии или се изразуваат во различни единици. Односот меѓу σ и μ е сличен како односот меѓу апсолутна и релативна грешка.

ПРИМЕР 5.2 Парадокс на чекање: Зошто кога чекаме, на пример автобус што поминува на 10 минути, обично го чекаме поголго од очекуваното време од 5 минути? Зошто тоа е така може да се види од следниот исконструиран пример. Нека автобус поминува во 20% случаи на 30 минути и во 80% случаи секоја секунда. Колкаво е времето на чекање X на случајно пристигнат патник ако се знае дека случајната променлива T = "време меѓу пристигнување на два автобуса" има распределба

$\frac{1}{2}(1+v_T)ET$, каде што v_T е коефициентот на варијација на T.

Решение

$ET = 30\cdot 0.2 + (1/60)\cdot 0.8 = 6.0133$ минути,

$DT = (30-6.0133)^2\cdot 0.2 + (1/60-6.0133)^2\cdot 0.8 = 143.8398 \Rightarrow \sigma_T = 11.9933$

За коефициентот на варијација имаме $v_T = 11.9933/6.0133 = 1.9945$.

На крај добиваме $EX = 0.5(1+1.9945)6.0133 = 14.9667$ минути.

Значи иако просечното време на пристигнување на автобусите е околу 6 минути, просечното време на чекање е околу 15 минути. ■

5.3. Бројни карактеристики на некои случајни променливи

Очекувањето и дисперзијата се основни бројни карактеристики на случајните променливи. Во следната табела е прикажана аналогијата во пресметката на очекувањето и дисперзијата во случај на случајна променлива зададена со законот на распределба (дискретен случај) и густината на распределба (непрекинат случај).

Дискретна случајна променлива **Закон на распределба**		*Непрекината случајна променлива* **Густина на распределба**
$f(x):\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \sum p_i = 1$	$\Leftrightarrow$	$f(x)$: R $\to$ R, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
$p(a \le X \le b) = \sum\limits_{i:x_i \in [a,b]} p_i$	$\Leftrightarrow$	$p(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$
$\mu = EX = \sum_1^n x_i p_i$	$\Leftrightarrow$	$\mu = EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
$DX = \sum_1^n (x_i - \mu)^2 p_i = = \sum_1^n x_i^2 p_i - \mu^2$	$\Leftrightarrow$	$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$

Очекувањето и дисперзијата за некои непрекинати распределби се:

Распределба	**Густина *f*(*x*)**	***EX***	***DX***

Хи-квадрат $x\geq 0$, $n\in Z^+$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$	n	$2n$
Експоненцијална x, $\lambda\geq 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Фишерова $x\geq 0$, $m,n\in Z^+$	$\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}(1+\frac{m}{n}x)^{-\frac{m+n}{2}}$	$\frac{n}{n-2}$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$
Гама $x\geq 0$, α, $\beta\in R^+$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Нормална $\sigma\in R^+$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Рамномерна $[a, b]$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Студентова $n\in Z^+$	$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$	0 за $n>1$	$\frac{n}{n-2}$ за $n>2$

5.5. Бројни карактеристики на случајни вектори

Очекувањето и дисперзијата на праволиниски начин може да се обопштат на случајните вектори. Имено, нека е даден случајниот вектор (X, Y) со закон на распределба

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
y_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}

или густина на распределба $f(x, y)$.

Тогаш, очекувањето и дисперзијата на случајниот вектор (X, Y) се дадени едноставно со (EX, EY) и (DX, DY), каде што $E(\cdot)$ и $D(\cdot)$ се очекување и дисперзија на соодветните случајни променливи добиени од со-

одветните индивидуални (маргинални) закони или густини на распределба.

Многу поважни и поинтерсни се случите на наоѓање на бројни карактеристики на функции од случајни променливи. Имено, нека $h(X, Y)$ е функција од случајните променливи X и Y. Тогаш, очекувањето на случајната променлива $h(X, Y)$ е дадено со

$$Eh(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} h(x_i, y_j)p_{ij} \text{ или } \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy .$$

Ако е пак $h(X, Y) = g(X)$, тогаш

$$Eg(X) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)p_i \text{ или}$$

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx .$$

Сосема аналогно се може да се добијат и заедничките моменти од повисок ред на X и Y. Така, момент од ред (k, l) на случајниот вектор (X, Y) е бројот

$$E(X^k \cdot Y^l) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^k y_j^l p_{ij} \text{ или } \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^l f(x,y)dxdy .$$

Централните моменти од ред (k, l) се добиваат на идентичен начин како $E(X-\mu_X)^k(Y-\mu_Y)^l$. Од овие централни моменти, ние веќе го воведовме моментот од ред (1, 1) за кој се користи терминот коваријација $K_{X,Y}$ на X и Y. Интуитивно, таа ја дава зависноста меѓу случајните променливи X и Y, и добива вредност 0 само кога X и Y се независни. Оваа особина е таа поради која коваријацијата е основа на коефициентот на корелација – основната мера за оценка на степенот на линеарна зависност меѓу случајните променливи.

5.6. Коефициент на корелација

Во особините на очекувањето и дисперзијата кога се работи со две зависни случајни променливи X и Y се појавува ненулта коваријација дадена со $K_{X,Y} = E(X-EX)(Y-EY)$. Значи коваријацијата може да се користи како мера за зависноста на случајните променливи.

Најпозната едноставна мера на зависноста меѓу две случајни променливи изведена од коваријацијата е Пирсоновиот (Pearson) коефици-

ентот на корелација. Тој се добива со делење на коваријацијата $K_{X,Y}$ на X и Y со производот на нивните стандардни девијации.

Дефиниција 5.5 Коефициент на корелација на случајните променливи X и Y е бројот $\rho_{X,Y}$ дефиниран со

$$\rho_{X,Y} = \frac{K_{X,Y}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{E(X-EX)(Y-EY)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{E(XY)-EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}.$$

Коефициентот на корелација е дефиниран само ако дисперзиите на двете случајни променливи се ненулти.

Теорема 5.3 За коефициентот на корелација $\rho_{X,Y}$ важи:

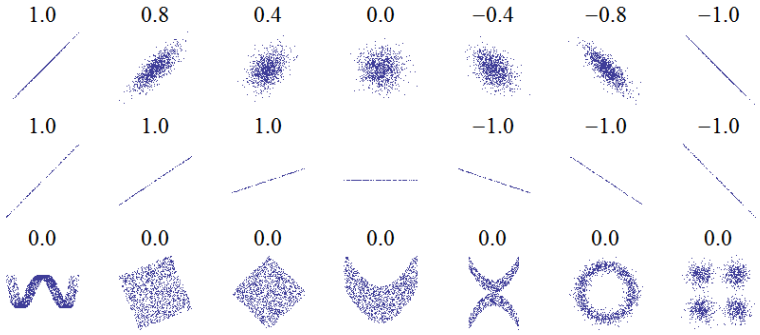
1) $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$ (симетричност),

2) $|\rho_{X,Y}| \leq 1$,

3) ако X и Y се независни, $\rho_{X,Y} = 0$,

4) ако $Y = aX + b$, a и b се константи, тогаш $|\rho_{X,Y}| = 1$.

Коефициентот на корелација има вредност +1 во случај на идеална позитивна (растечка) или –1 во случај на идеална негативна (опаѓачка) линеарна зависност. Вредностите меѓу –1 и +1 го одразуваат степенот на линеарната зависност меѓу случајните променливи. Кога неговата вредност се приближува кон 0, случајните променливи се сè поблиску до некорелираност во линеарна смисла, и обратно, колку коефициентот е поблиску до –1 или +1, толку е посилна корелацијата меѓу нив. На сл. 5.2 се прикажани вредностите на некои парови случајни променливи и соодветниот коефициент на корелација.



Слика 5.2 *Вредности на парови случајни променливи и соодветниот коефициент на корелација*

Значи ако променливите се независни, коефициентот на корелација е 0, но обратното не важи бидејќи коефициентот ги детектира само

линеарните зависности меѓу случајните променливи. На пример, ако случајната променлива X е симетрично распределена околу 0 (на пример, со нормална или студентова распределба) и ако $Y = X^2$, тогаш Y е комплетно одредена со X, т.е. Y и X се комплетно зависни, но нивната корелација е 0 (тие се некорелирани). Сепак, во специјален случај кога X и Y се со заедничка нормална распределба, некорелираноста е еквивалентна со независноста (види поглавје 5.5.3).

ПРИМЕР 5.4 Еден камион за достава секој ден оди до супермаркет и назад, враќајќи се по друг пат. При одење до супермаркетот поминува 3 семафори, а при враќање 2 семафори. Нека случајната променлива X = "број на црвени светла при одење" и Y = "број на црвени светла при враќање". Сообраќајниот инженер со испитување на релативните честоти на црвени светла ја добил следната заедничка распределба

		X = 0	1	2	3	
Y	0	0.02	0.05	0.10	0.03	0.20
	1	0.04	0.09	0.13	0.08	0.34
	2	0.05	0.15	0.17	0.09	0.46
		0.11	0.29	0.40	0.20	

На пример, веројатноста да се случат 2 црвени светла при одење и едно црвено светло при враќање е 0.13.

Најди го коефициентот на корелација за бројот на црвени светла при одење и враќање и интерпретирај го добиениот резултат.

Решение

$EX = 1(0.05+0.09+.15) + 2(0.10+0.13+0.17) + 3(0.03+0.08+0.09) = 1.69$

$EY = 1(0.04+0.09+0.13+0.08) + 2(0.05+0.15+0.17+0.09) = 1.27$

$DX = 0.29\cdot 1^2 + 0.40\cdot 2^2 + 0.20\cdot 3^2 - 1.69^2 = 0.83$

$DY = 0.34\cdot 1^2 + 0.46\cdot 2^2 - 1.27^2 = 0.58$

$E(XY) = 1\cdot 0.09 + 2\cdot 0.13 + 3\cdot 0.08 + 2\cdot 0.15 + 4\cdot 0.17 + 6\cdot 0.09 = 2.11$

$$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{2.11 - 1.69\cdot 1.27}{\sqrt{0.83\cdot 0.58}} = -0.06$$

Бидејќи коефициентот на корелација е многу близок до 0, заклучуваме дека нема линеарна зависност меѓу бројот на црвени светла при одењето и враќањето на камионот. ■

Генерално, може да сметаме дека ако коефициентот на корелација $|\rho| \geq 0.9$, корелацијата е многу силна. За $0.7 \leq |\rho| \leq 0.9$ имаме силна корелација, додека за $0.5 \leq |\rho| \leq 0.7$ може да сметаме на умерена корела-

ција. Вредностите $|\rho| \le 0.5$ значат дека немаме корелација меѓу случајните променливи.

Во практиката, често пати заедничката распределба на случајните променливи X и Y (со ист број вредности) се задава просто како низа на соодветни парови вредности

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

каде што веројатностите на заедничката распределба се имплицитно дадени со

$$p(X = x_i, Y = y_j) = \begin{cases} 1/n & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \ne j \end{cases}.$$

ПРИМЕР 5.5 На пример, едно европско истражување за сигурност на патиштата било за тоа како староста на автомобилите влијае на способноста на кочење. За таа цел биле тестирани 10 автомобили со различна старост (X) и мерени должините на запирање во метри (Y) при брзина од 40 км/час. Податоците се дадени во следната табела:

X	9	15	24	30	38	46	53	60	64	76
Y	28.4	29.3	37.6	36.2	36.5	35.3	36.2	44.1	44.8	47.2

Најди го коефициентот на корелација и дискутирај го добиениот резултат.

Решение

Низата парови вредности ја означува следната заедничка распределба

$$p(X = x_i, Y = y_j) = \begin{cases} 1/10 = 0.1 & \text{за } i = j \\ 0 & \text{за } i \ne j \end{cases}$$

од каде добиваме

$$EX = (9+15+24+30+38+46+53+60+64+76)\cdot 0.1 = 41.5$$

$$EY = (28.4+29.3+37.6+36.2+36.5+35.3+36.2+44.1+44.8+47.2)\cdot 0.1 = 37.56$$

$$DX = (9^2+15^2+24^2+30^2+38^2 + 46^2+53^2+60^2+64^2+76^2)\cdot 0.1 - 41.5^2 = 440.05$$

$$DY = (28.4^2+29.3^2+37.6^2+36.2^2+36.5^2 + 35.3^2+36.2^2+44.1^2+44.8^2+47.2^2)\cdot 0.1 - 37.56^2 = 35.02$$

$$E(XY) = (255.6+439.3+902.4+1086+1387+ 1623.8+1918.6+2646+2867.2+3587.2)\cdot 0.1 = 1671.31$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{R(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{1671.31 - 41.5 \cdot 37.56}{\sqrt{440.05 \cdot 35.02}} = 0.915$$

Коефициентот на корелација е близок до 1, па заклучуваме дека има силна линеарна зависност меѓу X и Y. ■

ЗАДАЧИ

1. Трговска фирма има 8 компјутери со кои договара размена на стоки и услуги. Веројатноста дека компјутер ќе откаже во еден ден е 0.005 (откажувањето е независно). Компјутерите се поправаат навечер секој ден, што е независен настан.

   а) Пресметај ја веројатноста дека сите 8 компјутери ќе откажат во ист ден;

   б) Кој е просечниот број денови до откажување на еден компјутер?

   в) Кој е просечниот број денови до откажување на сите 8 компјутери во ист ден?

2. Еден автоматизарана лента за полнење конзерви застанува кога се детектираат 3 конзерви со помала тежина. Веројатноста конзерва да има помала тежина е 0.001, а секое полнење е независно.

   а) Кој е просечниот број полнења пред линијата да запре?

   б) Која е стандардната девијација на број на полнења пред линијата да запре?

5. Времето на чекање X (во минути) пред шалтер има густина на распределба

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{за } x \geq 0 \\ 0, & \text{во спротивно} \end{cases}$$

   Пресметај го просечното време на чекање и дисперзијата.

6. Дебелината X на кондуктивната обвивка во микрометри има густина на распределба $600x^{-2}$ за $100 < x < 120$ микрометри.

   а) Определи го просекот и дисперзијата на дебелината на обвивката;

   б) Ако обвивката чини 0.50 евра по микрометар колкава е просечната цена на обвивката по дел?

7. Нака времето X потребно еден оператор да пополни електронска форма со податоци е со рамномерна распределба меѓу 1.5 и 2.5 минути. Определи го просекот и дисперзијата на времето потребно на операторот да пополни форма.

8. Времето на чекање T на патник за авионски лет се карактеризира со мешана функција на распределба

$$F(t)=\begin{cases} p+(1-p)(1-e^{-\lambda t}), \text{ за } t\geq 0 \\ 0, \text{ за } t<0 \end{cases}$$

Опредечи го просечното време на чекање ET, како и просечното време на чекање ако чекањето е неопходно, $E(T \mid T>0)$.

9. Тежината на тркачките патики е нормално распределена со просек од 12 унци и стандардна девијација од 0.5 унци.

а) Пресметај ја веројатноста патиките да тежат повеќе од 13 унци?

б) Колкава треба да биде стандардната девијација на тежината на патиките за компанијата да може да тврди дека 99.9% од патиките се полесни од 13 унци?

в) Ако стандардната девијација е 0.5 унци, колкав треба да биде просекот за компанијата да може да тврди дека 99.9% од патиките се полесни од 13 унци?

15. Определи го c така што $f_{XYZ}(x, y, z) = c$ да биде густина на распределба за случајниот вектор (X, Y, Z) во областа $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x + y + z < 1$. Потоа пресметај го EX.

16. Инженер сака да ја тестира применливоста на законот за идеален гас на затворен резервоар со фиксна количина гас. Тој смета дека во такви услови, законот предвидува линеарна зависност меѓу температурата и притисокот на гасот. Мерењата што ги направил се дадени во следната табела:

Притисок (atm)	1.2	1.3	1.5	1.7	1.8	2	2.1	2.3	2.8
Температура (K)	298	301	302	310	312	323	337	341	349

Дали мерењата покажуваат линеарна зависност температура – притисок?

17. Определи го коефициентот на корелација за X и Y со дадена заедничка густина на распределба $f_{XY}(x, y) = e^{-x-y}$ во областа $0 < x$ и $0 < y$.

18. Членак опишува студија за врската меѓу изложувањето на бучава и високиот крвен притисок. Во членакот се дадени следните податоци каде што X = "покачување на крвниот притисок", Y = "бучава во децибели".

X (mm/hg)	1	0	1	2	5	1	4	6	2	3	5	4	6	8	4	5	7	9	7	6
Y (atm)	60	63	65	70	70	70	80	90	80	80	85	89	90	90	90	90	94	100	100	100

а) Пресметај го коефициентот на корелација;

б) Креирај го најдобриот линеарен предвидувач по најмали квадрати и најди ја минималната квадратна грешка;

ц) Колкав пораст на крвниот притисок предвидува овој модел за бучава од 85 децибели.

19. Нека (X, Y) има дводимензионална нормална распределба со $DX = DY$. Покажи дека случајните променливи $X+Y$ и $X-Y$ се независни и нормално распределени.

20. Да претпоставиме дека тежините на луѓето се независни и нормално распределени со просек од 160 фунти и стандардна девијација од 30 фунти. Нека 25 луѓе влезат во индустриски лифт со носивост од 4300 фунти.

а) Колкава е веројатноста дека тие ќе ја надминат носивоста на лифтот?

б) Која носивост се надминува од 25 луѓе со веројатност 0.0001?

6

Гранични теореми и примени

Граничните теореми го сочинуваат математичкиот костур на кој се држи теоријата на веројатност. За практичните цели, тие се во главно корисни поради тоа што обезбедуваат приближни одговори на прашањата и проблемите врзани со определување на однесувањето на статистичките податоци при статистичките оценки и заклучоци. Двете главни гранични теореми, кои постојат во голем број варијанти и околу кои сè се врти, се законот на големите броеви и централната гранична теорема.

Законот на големите броеви е фундаментален резултат на теоријата на веројатност. На еден интуитивен начин ние многу пати досега го дискутиравме овој закон. Имено, интуитивниот начин да се гледа на веројатноста на некој настан е да се пресмета релативната честота на неговото појавување во доволно долго повторување на експериментот. Законот на големите броеви покажува дека математичкиот модел на веројатноста е конзистентен со релативните фреквенции на случување, т.е. е во согласност со стабилноста на експериментите кои теоријата на веројатност ги изучува.

Централната гранична теорема е веројатно најкорисен и најмаркантен резултат во теоријата на веројатност. Во нејзината наједноставна варијанта таа тврди дека *сума* на независни случајни променливи, под одредени доста општи услови, приближно има нормална распределба. Нејзината огромна важност е во тоа што секој примерок во статисти-

ката е низа на случајни променливи, а сумата на распределбите на доволно голем примерок, какви и да се распределбите на неговите елементи, приближно секогаш се потчинува на нормалната распределба. Оваа тенденција случајните променливи сумарно да формираат нормална распределба е аналогно на нешто сосема природно, како тенденцијата каменот да паѓа на земјата или водата да тече надолу. Со други зборови, нормалната распределба е како гравитациона сила што ги собира во себе сумите на независните распределби какви и да се тие. Зачудувачки и спротивен на интуиција изгледа фактот што сума на елементите на примерокот со каква било распределба (или различни распределби) се потчинува на една единствена распределба – нормалната. Уште повеќе, се покажува дека за повеќето распределби, приближувањето кон нормалната распределба се случува многу брзо.

6.1. Некои неравенства со моменти

Во практичните апликации, кога се работи со очекувања и дисперзии, т.е. со моменти, треба да се имаат предвид два аспекта. Првиот, којшто го дискутиравме, се однесува на пресметка на моментите на случајната променлива X со позната распределба. Вториот аспект, што е посилно врзан со практиката каде што расположивите информации се лимитирани, се однесува на проценка на однесувањето на случајната променлива X кога се знаат само некои нејзини моменти. Знаењето на вредностите на очекувањето и дисперзијата не овозможува одговор на прашањата од тип "колку е $p(X \geq 8)$" и секако е недоволно да се процени распределбата. Сепак, како што сега ќе покажеме, возможно е да се постават некои веројатносни проценки знаејќи ги само очекувањето и дисперзијата.

Следните две неравенства, дадени во следните две теореми, се важни за проценка на отстапувањето на случајната променлива од нејзиното очекување.

Теорема 6.1 (Markov) За секое $\varepsilon > 0$, важи неравенството

$$p(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|}{\varepsilon}.$$

Доказ: Ако ставиме

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{за } X < \varepsilon \\ \varepsilon, & \text{за } X \geq \varepsilon \end{cases},$$ очигледно важи $X \geq Y$, па и $EX \geq EY$.

Очекувањето на случајната променлива Y е

$EY = \varepsilon p(X \geq \varepsilon) \leq EX$, од што веднаш следува дека $p(|X| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E|X|}{\varepsilon}$. ■

Второто неравенство следи од претходното и е познато под име неравенство на Чебишев.

Теорема 6.2 За секое $\varepsilon > 0$, важи

$$p(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Доказ: Ако ставиме $Y = (X - EX)^2$ имаме дека

$$p(|X - EX| \geq \varepsilon) = p((X - EX)^2 \geq \varepsilon^2) \overset{\text{теорема 7.1}}{\leq} \frac{E(X - EX)^2}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}. \blacksquare$$

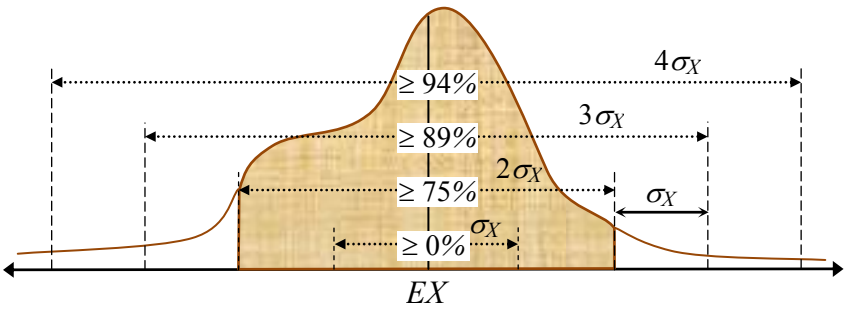
Неравенството на Чебишев покажува дека за мали дисперзии, вредностите на случајната променлива се концентрираат околу нејзиното очекување со веројатност блиска до 1, т.е.

$$p(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Ако ставиме $\varepsilon = k\sqrt{DX} = k\sigma_X$, каде што σ_X е стандардната девијација, неравенството го добива добро познатиот облик

$$p(|X - EX| < k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}, \ k \geq 1,$$

што графички е прикажано на сл. 6.1.



Слика 6.1 *% на податоци што паѓаат во околините σ_X, $2\sigma_X$, $3\sigma_X$ и $4\sigma_X$ на очекувањето*

Значи веројатноста случајната променлива X да е во околина на $2\sigma_X$ околу EX е 0.75 (за $k = 2$, $1-1/4 = 0.7500$), во околина на $3\sigma_X$ е 0.8999 ($1 - 1/9 = 0.8999$), во околина на $4\sigma_X$ е 0.9735 ($1 - 1/16 = 0.9375$) итн.

ПРИМЕР 6.1 Фрламе паричка n пати. Колкава е горната граница на веројатноста да добиме $3n/4$ петки?

Решение

Нека X = "број на петки во n фрлања на паричка" $= X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Тогаш $EX = n/2$ бидејќи во секое фрлање очекувањето е $EX_i = 1/2$, а X е сума на n независни случајни променливи со очекувања 1/2.

Според неравенството на Марков имаме

$$p(X \geq \frac{3n}{4}) \leq \frac{n/2}{3n/4} = \frac{2}{3}.$$

Според неравенството на Чебишев, имајќи предвид дека $DX_i = E(X_i)^2 - (EX_i)^2 = 1/2 - 1/4 = 1/4$ и $DX = n/4$, добиваме

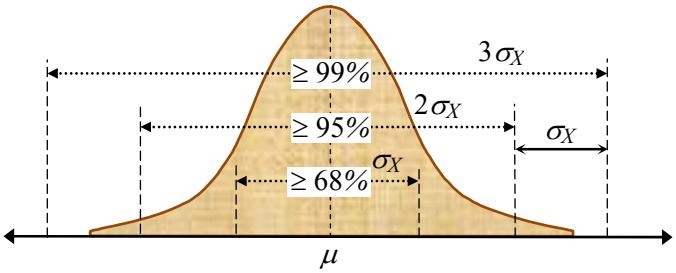
$$p(X \geq \frac{3n}{4}) = p(X - \frac{n}{2} \geq \frac{3n}{4} - \frac{n}{2}) = \frac{1}{2} p(|X - EX| \geq \frac{n}{4}) = \frac{1}{2}\frac{n/4}{(n/4)^2} = \frac{2}{n}$$

што е многу подобра проценка од онаа со неравенството на Марков. Се разбира тоа е сосема логично ако се има предвид дека во неравенството на Чебишев се користи додатна информација, добиена од моментот од 2 ред даден со дисперзијата. ■

Сепак, неравенството на Чебишев е доста слабо. На пример, нека X има стандардна нормална распределба $Z(0,1)$. Тогаш, со неравенството на Чебишев добиваме, на пример,

$$p(|X| \geq 3) \leq \frac{1}{9}$$

што е многу песимистички во однос на вистинската вредност што се добива од распределбата, $p(|X| \geq 3) \approx 2 \cdot 10^{-3}$. Се разбира, проценката на бројот на податоци што паѓаат во околината на очекувањето кога се знае распределбата на X може да се определи многу попрецизно. На пример, за нормалната распределба $Z(\mu,\sigma^2)$, веројатностите X да има вредност во околината на k стандардни девијации околу нејзиното очекување се: во $\mu \pm \sigma$ е 68.3%, во $\mu \pm 2\sigma$ е 95.5% и во $\mu \pm 3\sigma$ дури 99.7% (види слика 6.2).



Слика 6.2 *% на податоци што паѓаат во околините на очекувањето σ_X, $2\sigma_X$ и $3\sigma_X$, кај нормалната распределба*

Вредноста на неравенството на Чебишев е во неговата општост. Тоа е применливо на сите случајни променливи без разлика на типот или обликот на нивната распределба. Се разбира, кога ја имаме распределбата, неравенството на Чебишев е практично безполезно.

6.2. Закон на големите броеви

Многу експерименти и набљудувања во врска со природните феномени обично се повторуваат повеќе пати во наизглед идентични услови и вообичаено резултираат во различни исходи. Неконтролираните влијанија се причина за ваквите "случајни" варијации. За надминување на оваа ситуација експериментот или набљудувањето се повторува повеќе пати и резултатите на некој начин се упросечуваат. Во ова поглавје ќе видиме зошто ваков модел на повторување и упросечување работи така добро. Секоја реализација на мерење или набљудување резултира во случајна променлива и така се добива низа независни случајни променливи, се разбира со непозната распределба. Од веројатносен аспект, од таква низа случајни променливи во основа може да се извлечат особините на распределбата што е последица од законот на големите броеви.

Луѓето вклучени во експериментална работа со векови знаеле дека поточни резултати се добиваат кога мерењата или екпериментите се повторуваат, а добиените резултати се упросечуваат. На пример, при мерењето на брзината на светлината во 1879 година, Мајкелсон (Michelson) ги повторувал мерењата за да добие поточна вредност. Денеска, некој би рекол дека Мајкелсон ја искористил моќта на упросечувањето да ја редуцира варијабилноста на мерењата. Упросечувањето има тенденција да ги измазни сите поголеми флуктуации во вредностите и тоа, колку повеќе вредности толку подобра елиминирање на неконтролираните влијанија.

Следната теорема што понекогаш се нарекува "слаб" закон на големите броеви има големо теоретско значење.

Теорема 6.4 Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ е низа независни случајни променливи и постои константа $c > 0$ таква што $DX_i \le c$, за секој i, тогаш за секое $\varepsilon > 0$ важи

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{EX_1 + EX_2 + \ldots + MX_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Доказ: Го применуваме неравенството на Чебишев на Y_n/n, каде што $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Тоа значи дека за $x > 0$ имаме

$$1 \ge p\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{EX_n}{n}\right| < x\right) \ge 1 - \frac{DY_n}{x^2 n^2} \ge 1 - \frac{cn}{x^2 n^2} \ge 1 - \frac{c}{x^2 n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 . \blacksquare$$

Како последица на оваа теорема ги имаме следните поедноставни случаи.

Најпрво, ако имаме $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2 \le \infty$, тогаш за секое $\varepsilon > 0$ повторно важи

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Очигледно ова е специјален случај на теоремата што има голема практична вредност. Имено, земање примерок од некоја популација формира конечна низа од случајни променливи со исто очекување. Законот

кажува дека просекот на вредностите на случајните променливи по веројатност се приближува (конвергира) кон нивното очекување.

Како втора последица ќе ја разгледаме Бернулиевата шема на n независни испитувања. Нека s_n е број на поволни случаи во n-те испитувања при што веројатноста на поволен случај е p. Тогаш за секое $\varepsilon > 0$ важи

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{s_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Ако се стави $s_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, каде што $X_i = 1$ при поволен случај и 0 во спротивно и се има предвид дека $EX_i = p$ и $DX_i = p(1-p)$, веднаш се гледа дека ова е специјален случај на теоремата 6.4. Оваа граница покажува дека релативните честоти на појавување на настаните конвергираат кон веројатностите на настаните, т.е. при аксиоматското градење на теоријата на веројатност, вградена е и стабилност на експериментите. Тоа беше и еден од условите даден експеримент да биде погоден за математичко изучување.

ПРИМЕР 6.5 Да се пресмета коефициентот на варијација за сума од n независни случајни променливи $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ со коефициенти на варијација ν и да се дискутира добиениот резултат од аспект на тоа како n влијае на варијацијата.

Решение

Ако коефициентот на варијација за секоја X_i е ν, тогаш за сумата лесно се добива дека е

$$\nu_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{\sqrt{n}\sigma_X}{n\mu_X} = \frac{\nu}{\sqrt{n}} .$$

Добиениот резултат е основа на законот на $\sqrt{n}$ на Шредингер (Schrödinger) кој тврди дека законите на физиката се применливи со веројатност на грешка од ред $1/\sqrt{n}$, каде што n е бројот на молекули што кооперираат во физичкиот процес. Значи ако секој молекул има случајна варијација во однесувањето проценета со ν, тогаш физичкиот процес базиран на заедничка активност на n молекули поседува случајна варијација од $\nu/\sqrt{n}$. Неговата варијација очигледно се намалува како што n се зголемува. Ако се има предвид дека во реалните физички процеси со кои ние секојдневно се судираме n е многу големо, тогаш може да се заклучи дека законите на физиката се егзактни во тие ситуации и покрај локалниот "хаос" што се јавува кога се разгледуваат изолирано мал број молекули. ■

6.4. Централна гранична теорема

Законот на големите броеви дава информација за веројатноста на настанот една посебна функција од низа случајни променливи, т.е. нивната скалирана (упросечена) сума, да се разликува од очекуваната вредност за некој позитивен реален број ε. Оваа конвергенција формира база за многу други слични резултати што помагаат во решавањето на општиот проблем, каква е приближно распределбата на некоја "добра" функција $h(X_1, X_2, ..., X_n)$. На пример, земајќи ја сумата, вадејќи го од неа нејзиното очекување и делејќи го тоа со стандардната девијација, ние често пати можеме да го изведеме нејзиното асимптотско однесување, т.е. нејзината распределбата кога $n \to \infty$. Оваа група резултати обично колективно се нарекува централна гранична теорема. Таа во основа разгледува конвергенции на не-дегенеративни случајни променливи по рескалирање на растојанието од законот на големите броеви.

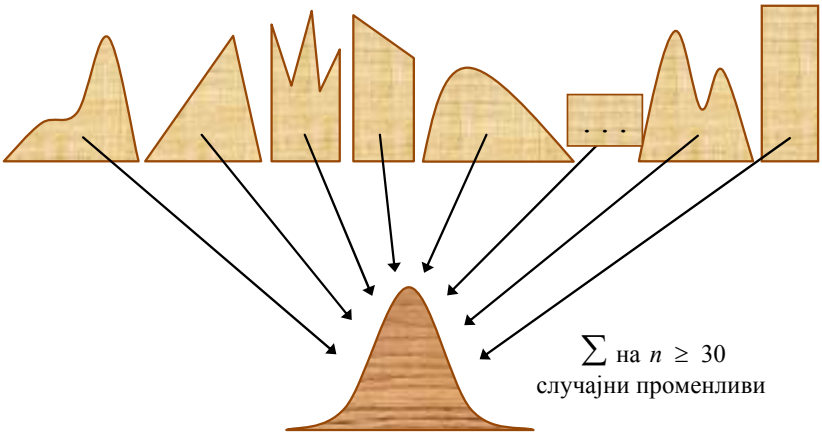
Централната гранична теорема е без сомнение најважниот пронајдок во областа на теоријата на веројатност и статистиката. Таа тврди дека сумата на доволно голем број независни случајни променливи при некои "слаби" услови, приближно има нормална распределба.

Постојат многу варијации и верзии на централната гранична теорема познати по имињата на авторите, на пример, теорема на Муавр-Лаплас (De Moivre–Laplace), Чебишев (Chebyshev), Љапунов (Lyapunov), Бери-Есен (Berry–Esseen), Линберг-Фелер (Lindeberg–Feller), итн. Ние тука најпрво даваме една стандардна верзија на теоремата (мала варијација на Муавр-Лаплас) што најчесто се сретнува во литературата, а понатаму ќе ја дадеме и поопштата верзија на Љапунов.

Теорема 6.8 Ако случајните променливи $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ се независни, со иста распределба и конечна дисперзија, $\mu = EX_k$, $\sigma^2 = DX_k$, тогаш важи

$$p\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{рамномерно}}{\to}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\,, \quad \text{за } x \in \mathrm{R}.$$

Со други зборови, теоремата кажува дека сума на независни случајни променливи што имаат иста распределба со очекување μ и стандардна девијација σ има приближно нормална распределба $Z(n\mu, n\sigma^2)$ кога n е доволно големо.

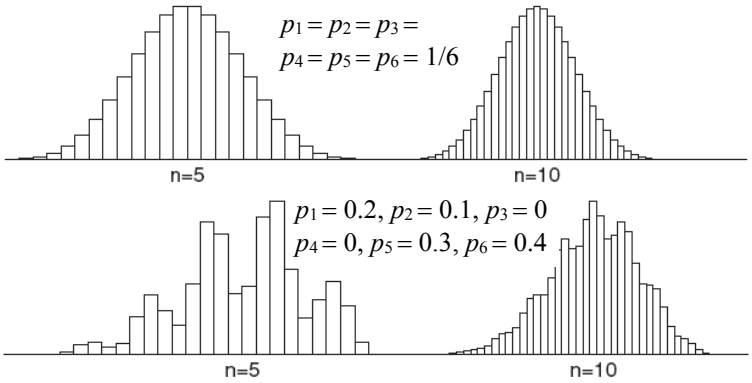


Слика 6.3 *Сума на произволни случајни променливи води приближно кон нормална распределба*

Едно важно прашање за практичната примена на централната гранична теорема е *колку големо треба да биде n* за да се добие добра апроксимација на нормалната распределба. Со други зборови, колку е брза конвергенцијата кон нормалната распределба? Ова е прашање за кое е тешко да се даде општ одговор. Во голем дел од литературата може да се најде како правило дека за "магичниот број" $n \geq 30$ апроксимацијата со нормална распределба е доволно добра. За примерок $n < 30$, треба да се користи студентовата распределба. Некои автори сметаат дека овој број треба да биде $n \geq 50$, $n \geq 100$ или дури $n \geq 250$. Има размислувања дека магичниот број од 30 примероци (случајни променливи) потекнува од пред-компјутерското време кога за апроксимација се користела студентова распределба со соодветен број степени на слобода. Тука треба да се има предвид дека студентовата распределба станува вистински нормална распределба акко бројот на степени на слобода е ∞. Од причина што не изгледало практично да се работи со долги листи на студентова распределба (вредностите за даден степен на слобода се во еден ред), направен е компромис, табелите на студентовата распределба да одат до 30 степени на слобода што може убаво да се смести на еден лист хатија. Значи можно е од ваква бесмислена причина да потекнува нашироко прифатениот број од 30 примероци за добра апроксимација со нормалната распределба.

Веројатно најправилно е да се прифати дека нема некоја дефинитивна граница за апроксимацијата со нормална распределба да биде добра, поради бесконечниот број на "ненормалности" што дадена популација може да ги поседува. На пример, добро е познато дека сума на

симетрични распределби многу побрзо се приближува кон нормалната распределба од сума на несиметрични распределби (види сл. 6.4).



Слика 6.4 *Симулција на сума од 5 и 10 фрлања на хомогена и нехомогена коцка; кај нехомогената, конвергенцијата е многу побавна*

Колку е поголемо отстапувањето од нормалната распределба толку поголем број примероци (случајни променливи) од популацијата треба да се земат за апроксимацијата да биде "доволно" добра.

Централната гранична теорема го разоткрива фактот зошто во пракса толку многу случајни феномени, како на пример заработувачката на берза, нивото на холестерол во крвта, висината или тежината на луѓето или животните, траењето на бременоста, животниот век на живите суштества, итн., се приближно нормално распределени. Сите вакви случајни вредности може да се разгледуваат како резултат на голем број мали независни случајни ефекти собрани заедно. На пример, трошењето на бензин (или нафта) од сите автомобили од одреден бренд, модел и фабрика, иако се произведени во идентичен процес, се разликува од автомобил до автомобил. Оваа случајност (случајна променлива) веројатно се должи на многу причини како што се: непрецизностите во процесот на производство, разлики во употребениот материјал, мали разлики во тежината и други спецификации, разлики во користеното гориво, однесувањето на возачот, бројот на лица и товар што се вози итн. Ако прифатиме дека сите овие мали разлики придонесуваат во случајната променлива на трошење гориво, централната гранична теорема тврди дека таа има тенденција да се потчинува на нормалната распределба. Оваа сума на мали ефекти се јавува насекаде и е во основа последица на тоа што секој покомплексен објект или суштество во природата е составен од помали елементи со случајно "однесување" во однос на целината. Во екстремни случаи такви се на пример популациите на лу-

ќето и животните составени од многу единки, биолошките системи составени од клетки, физичките појави што се резултат на "однесувањето" на електроните, атомите или молекулите итн. Генерално, денеска сите веруваат во точноста на централната гранична теорема – математичарите бидејќи таа е експериментално потврден факт, а останатите бидејќи таа е математички докажан факт. Денеска, централната гранична теорема се смета за неофицијална "кралица" на теоријата на веројатност.

д) Треба да се има предвид кога се разгледуваат други функции од низи случајни променливи, како на пример максимум (а не скалирани суми), граничната распределба никогаш не е нормална.

ЗАДАЧИ

1. Нека случајната променлива X има рамномерна распределба на интервалот [0, 2]. Определи ја долната граница за $p(|X - 1| \leq 0.75)$ користејќи го неравенството на Чебишев и спореди го овој резултат со точната вредност на оваа веројатност.

2. Врнежите на снег во некој регион (годишно) е случајна променлива со очекување од 70 инчи.

   а) Што може да се каже за веројатноста дека оваа година снежните врнежи ќе бидат меѓу 55 и 85 инчи?

   б) Дали проценката може да се подобри ако додатно се знае дека стандардната девијација е 10 инчи?

3. Во просек 90% од производството на една машина одговара на стандардите. На машината се изработени 18000 предмети. Колкава е веројатноста дека бројот на предмети што одговара на стандардите се разликува од просечниот број вакви предмети за повеќе од 200?

4. Процесот на дупчење дупки на одреден тип електронски плочки прави дијаметри со стандардна девијација од 0.01 милиметри. Колку дијаметри на дупките треба да се проверат така што со веројтност од најмалку 8/9, просекот на измерените дијаметри да биде во околина од 0.005 на просечниот дијаметар μ?

5. Бројот X на авиони што пристигнуваат на некој аеродром во еден период на време е со распределба

$$p(k) = \frac{100^k e^{-100}}{k!}, \ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Користејќи го неравенството на Чебишев определи ја долната граница за веројатноста $p(80 \le X \le 120)$.

8. Коцкар игра рулет на две полиња, Црвено или Црно. Последните 6 пати топчето застанало на Црвено поле, па ако законот на големите броеви е точен, веројатноста дека при следното фрлање топчето ќе застане на Црно мора да биде поголема отколку да застане на Црвено. Дали е тоа така? Образложи.

9. Законот на големите броеви и централната гранична теорема важат за случајни променливи над кои е потребно наметнување на рестрикции од 3 типа: а) Распределба; б) Зависност и в) Хомогеност. Образложи.

11. Нека p биде непознат процент гласачи што се определени да гласаат за партијата на зелените. За проценка на p треба да се анкетираат n гласачи. За i-тиот гласач, нека случајната променлива

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{ако гласа за зелените} \\ 0 & \text{во спротивно} \end{cases}$$

и нека просекот $Y_n = (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n)/n$ е процентот на гласачи опеделени да гласаат за зелените. Колкаво треба да се земе n за да се добие проценка на p со грешка не поголема од 1% и сигурност од 95%. Направи ја проценката користејќи ја централната гранична теорема.

12. Каков е односот меѓу законот на големите броеви и централната гранична теорема?

Решенија на задачите

Глава 2

1. а) точно; б) точно; в) неточно; г) точно; д) неточно; ѓ) неточно.

2. а) $A\overline{B}\overline{C}$; б) $AB\overline{C}$; в) ABC; г) $A+B+C$; д) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$;
ѓ) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; е) $(A+B+C)-ABC$.

3. а) $A+B$; б) $A\overline{B}+\overline{A}B$;

4. а) 0.4; б) $p(\overline{A}B)=p(B)-p(AB)=0.1$;
в) 0.6; г) $p(\overline{A}+B)=p(\overline{A})+p(B)-p(\overline{A}B)=0.8$.

5. а) 0.9; б) 0.0236; в) 0.0156.

6. 10^{-8}

7. а) $\dfrac{1}{10^3\cdot 26^2}$; б) $\dfrac{1}{3\cdot 10^2\cdot 2\cdot 26}$; в) $\dfrac{1}{10^2\cdot 26}$.

8. 0.36.

9. 5/9.

10. 99/126.

11. Општо, p("има комплетни точно k пара") $=\dfrac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}2^{r-k}}{\binom{2n}{2r}}$.

12. а) 15/16; б) 2/3; в) 1.

13. а) 0.3568; б) 0.4625.

14. 0.8828

Нека A, B, C се настаните дека вработениот е член на 1-та, 2-та, 3-та комисија соодветно. Тогаш бараната веројатност е $p(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A)p(B) - p(A)p(C) - p(B)p(C) + p(A)p(B)p(C)$.

15. $p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) + p(\mathrm{C}) - 2p(\mathrm{AB}) - 2p(\mathrm{AC}) - 2p(\mathrm{BC}) + 3p(\mathrm{ABC})$

    p("точно еден од A,B,C") $= p(\mathrm{A}-\mathrm{AB}-\mathrm{AC} + \mathrm{B}-\mathrm{AB}-\mathrm{BC} + \mathrm{C}-\mathrm{AC}-\mathrm{BC}) =$
    $= p(\mathrm{A}-\mathrm{AB}-\mathrm{AC}) + p(\mathrm{B}-\mathrm{AB}-\mathrm{BC}) + p(\mathrm{C}-\mathrm{AC}-\mathrm{BC})$ = итн.

16. 0.5436

    Веројатноста фаталниот исход да се случи во n-тиот обид е $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$.

    Бараната веројатност е $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{n} = \frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{25}{36}}$.

17. а) 1/3; б) 1/2.

18. а) $\big(1 - (1-p(\mathrm{A})(1-p(\mathrm{C}))\big)\big(1 - (1-p(\mathrm{B})(1-p(\mathrm{D}))\big) = 0.8788$; б) 0.9434.

19. $1 - 2p^2 - 2p^3 + 5p^4 - 2p^5$

    Веројатноста на една конфигурација на патиштата со блокирани k од нив е $p^k(1-p)^{5-k}$. Треба да се избројат сите конфигурации за кои има (или нема) пат од A до D.

20. 0.2645

    Нека A_1, A_2, A_3, A_4 се настаните дека 5-те карти не содржат каро, херц, треф и пик соодветно. Тогаш бараната веројатност е $1 - p(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_4) = 1 - \big(p(\mathrm{A}_1) + p(\mathrm{A}_2) + p(\mathrm{A}_3) + p(\mathrm{A}_4) - p(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2) - \ldots - p(\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4) + p(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3) + \ldots + p(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4) - p(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4)\big)$. Внимателно, настаните не се независни, на пример $p(\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j) \neq p(\mathrm{A}_i)p(\mathrm{A}_j)$.

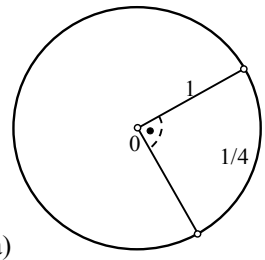
21. 0.1207.

22. $a^2(1 - \pi/4)$

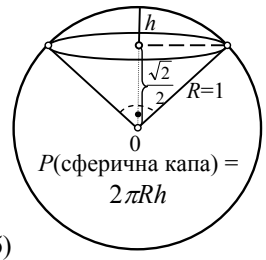
23. а) 1/2; б) да.

24. а) $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$; б) $1-\frac{4r^2}{a^2}$.

25. а) 1/4 (слика а)); б) $(1 - \sqrt{2}/2)/2$ (слика б)).

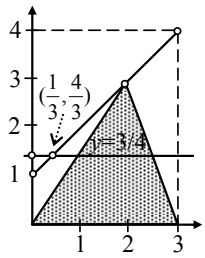


Слика а)



Слика б)

26. 8/9 (види слика)



Плоштината на триаголникот треба да биде

$3 \cdot h/2 > 2 \Rightarrow h > 4/3$.

Правата $y = x + 1$ се сече со $y = 4/3$ во (1/3, 4/3).

Оваа точка ја дели отсечката во однос 1:8.

Поволните случаи се 8 од 9 делови на отсечката.

Глава 3

1. Во случај на дисјунктност: а) точно; б) неточно; в) точно; г) неточно;
   Во случај на независност: г) неточно; а) точно; б) неточно; в) точно;

2. а) 0.1333; б) 0.2000; в) 0.1667

   A = "различен број", P(A) = 30 / 36

   B = "сумата е 6", AB = { (1,5), (5,1), (2,4), (4,2) }
   C = "сумата е 7", AC = { (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) }
   D = "првата коцка е 6-ка", AD = { (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) }

   а) p(B | A) = (4 / 36) / (30 / 36) = 0.1333 < p(B) = 0.1389
   б) p(C | A) = (6 / 36) / (30 / 36) = 0.2000 > p(C) = 0.1667
   в) p(D | A) = (5 / 36) / (30 / 36) = 0.1667 = p(D) = 0.1667.

3. а) 0.4388/0.6962 = 0.6303; б) 0.1097/0.25 = 04388.

4. 0.6923

   Сите парови прогнози се (Т=точна, П=погрешна): (Т, Т), (Т, П), (П, Т), (П, П), со веројатности 0.72, 0.18, 0.08 и 0.02 соодветно. Бараната веројатност е p((Т, П) | ((Т, П) + (П, Т))) .

5. а) 0.0642; б) 0.7692.

6. а) 0.3500; б) 0.1225; в) 0.6500.

7. а) 0.0080; б) 0.00008; в) 0.9800; г) Да, Не.

8. 2/3.

9. 0.9468

   Ова е проблем на колекција: n објекти случајно распоредуваме на k места. Нека A_i е настанот дека i-тото место останало празно. Тогаш

   $p(A_i) = \left(\frac{k-1}{k}\right)^n$, $p(A_iA_j) = \left(\frac{k-2}{k}\right)^n$, итн. Веројатноста дека барем едно место ќе остане празно е (со принцип на вклучување-исклучување)

$$p\left(\sum_{j=1}^{k} \mathrm{A}_j\right) = k\left(\frac{k-1}{k}\right)^n - \binom{k}{2}\left(\frac{k-2}{k}\right)^n + \ldots + (-1)^k \binom{k}{k-1}\left(\frac{1}{k}\right)^n .$$

За k=4, n=15, $p\left(\sum_{j=1}^{4} \mathrm{A}_j\right) = 4\left(\frac{3}{4}\right)^{15} - 6\left(\frac{1}{2}\right)^{15} + 4\left(\frac{1}{4}\right)^{15} = 0.0532.$

10. а) 0.351; б)) 0.917; в) 0.2500.

11. а) 0.002; б) 0.086; в) 0.4904.

12. а) 0.0225; б) 0.1250.

13. 1/506;

14. а) 0.9596 (види подолу); б) 0.9950

p("ис.0") = 0.8, p("ис.1") = 0.1,
p("пр.1 | ис.0") = 0.01 $\Rightarrow p$("пр.0 | ис.0") = 0.99,
p("пр.0 | ис.1") = 0.05 $\Rightarrow p$("пр.1 | ис.1") = 0.95,
p("ис.0 | пр.0") = p("пр.0 | ис.0")p("ис.0") / p("пр.0"), каде што
p("пр.0") = p("пр.0 | ис.0")p("ис.0") + p("пр.0 | ис.1")p("ис.1")

15. 0.5135

16. а) 0.9847; б) 0.1184.

17. 74, Се решава неравенството по n: $1 - 0.98 = \binom{n}{0} \cdot 0.052^0 \cdot 0.948^n$.

18. а) 0.00003; б) 0.00024; в) 0.00107.

19. а) 0.5177; б) 0.4914

p("барем една 6-ка од 4 фрлања") =

$= 1 - p$("ниедна 6-ка од 4 фрлања") $= 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4$

p("барем еднаш 2-е 6-ки од 24 фрлања") =

$= 1 - p$("ниеднаш 2-е 6-ки од 24 фрлања") $= \binom{24}{0}\left(\frac{1}{36}\right)^0\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$.

20. 0.0000000017326

Геометриските веројатности стрелецот да погоди во кружните прстени се 1/16, 3/16, 5/16 и 7/16. За стрелецот да собере најмалку 90 поени од 10 пукања постојат 5 можности: 9×10 + 1×6 + 0×4 + 0×1, 9×10 + 0×6 + 1×4 + 0×1, 9×10 + 0×6 + 0×4 + 1×1, 8×10 + 2×6 + 0×3 + 0×1 и 8×10 + 1×6 + 1×4 + 0×1. Веројатностите на овие настани се:

$$\frac{10!}{9!\cdot 1!}\left(\frac{1}{16}\right)^9\left(\frac{3}{16}\right)^1,\ \frac{10!}{9!\cdot 1!}\left(\frac{1}{16}\right)^9\left(\frac{5}{16}\right)^1,\ \frac{10!}{9!\cdot 1!}\left(\frac{1}{16}\right)^9\left(\frac{7}{16}\right)^1,\ \frac{10!}{8!\cdot 2!}\left(\frac{1}{16}\right)^8\left(\frac{3}{16}\right)^2 \text{ и}$$

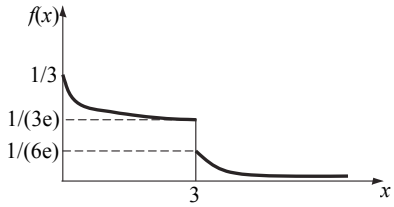
$\frac{10!}{8!\cdot 1!\cdot 1!}\left(\frac{1}{16}\right)^8\left(\frac{3}{16}\right)^1\left(\frac{5}{16}\right)^1$. Нивниот збир го дава решението.

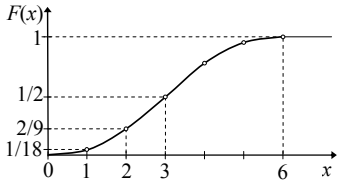
Глава 4

1. а) 0.9939; б) 0.0007; в) 0.3188.
2. $p(X=0)=0.00001$; $p(X=1)=0.00167$; $p(X=2)=0.07663$; $p(X=3)=$ $=0.92169$.
3. а) 0.9; б) 0.7; в) 0.1; г) 0.8.
4. $p(X=n)=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$, $n=2, 3, \ldots$.
5. а) $p(X>2)=1-p(X\le 2)=1-F(2)=1-(1-e^{-2/3})=e^{-2/3}$;

   б) $p(2<X\le 6)=F(6)-F(2)=(1-e^{-2}/2)-(1-e^{-2/3})=e^{-2/3}-e^{-2}/2$;

   в)





6. а) 1/3; б) в) 1/18, 1/2.
7. $p(x>12.6)=\int_{12.6}^{\infty}20e^{-20(x-12.5)}dx=-e^{-20(x-12.5)}\Big/_{12.6}^{\infty}=0.1353$;

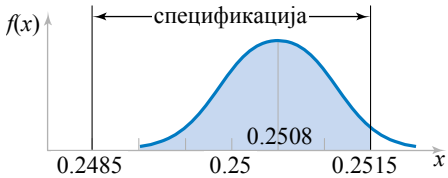
   $p(12.5<x<12.6)=\int_{12.5}^{12.6}20e^{-20(x-12.5)}dx=-e^{-20(x-12.5)}\Big/_{12.5}^{12.6}=0.8647$.
8. 2/3.
9. а) 0.25; б) 0.2140.
10. $3/a$.
11. а) 0.0498; б) 0.8775.
12. а) 0.0025; б) 0.6321.
13. $p(0.2485<X<0.2515)=p(\frac{0.2485-0.2508}{0.0005}<z<\frac{0.2515-0.2508}{0.0005})=$

    $=p(-4.6<z<1.4)=p(z<1.4)-p(z<-4.6)=0.91924$;

Кога процесот би се подобрил така што просекот да биде еднаков на целната вредност 0.25, би имале

$$p(0.2485 < X < 0.2515) = p\left(\frac{0.2485 - 0.2500}{0.0005} < z < \frac{0.2515 - 0.2500}{0.0005}\right) =$$

$$= p(-3 < z < 3) = p(z < 3) - p(z < -3) = 0.9973\,.$$



14. а) 0.06681; б) 0.86638; в) 0.000214.

15. а) 0.0062; б) 0.0124; в) 5.33 милиметри.

19. Случајната променлива $T = \frac{X - \mu}{S}\sqrt{n} = -2.9059$ (S е стандардна девијација) има студентова распределба со 20 – 1 = 19 степени на слобода. Од статистички алатки (или таблици) читаме $p(T > -2.9059) = 0.996$.

20. а) 0.275; б) 0.685.

21. а) 0.5; б) 0.35; в) 0.5; г) 0.8; д) 0.30; ѓ) 0.4; е) 0.4;
ж) $p(X = 1 \mid Y = 1, Z = 2) = 0.4$; $p(X = 2 \mid Y = 1, Z = 2) = 0.6$;

22. а) $\{(X, Y, Z), 0 \le X, Y, Z \le 4$ и $X + Y + Z = 4\}$;
б) $p(X = 0 \mid Y = 2) = 0.3333$, $p(X = 1 \mid Y = 2) = 0.5332$, $p(X = 2 \mid Y = 2) =$
$= 0.1335$, $p(X = 3 \mid Y = 2) = p(X = 4 \mid Y = 2) = 0$;
в) 0.1758, 0.2198, 0.4761, 0.1335.

23. а)

Y \ X	0	1	2	3	4
0	0.1244	0.2618	0.1964	0.0621	0.0070
1	0.0873	0.1354	0.0666	0.0104	0
2	0.0203	0.0207	0.0050	0	0
3	0.0018	0.0009	0	0	0
4	0.0001	0	0	0	0

б) $f_X(0) = 0.2338$,
$f_X(1) = 0.4188$,
$f_X(2) = 0.2679$,
$f_X(3) = 0.0725$,
$f_X(4) = 0.0070$;
в) $f_{Y|3}(0) = 0.857$,
$f_{Y|3}(1) = 0.143$; г) не.

24. а) $f_{X,Y}(x, y) > 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = \int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty} 6\cdot 10^{-6} e^{-0.001x-0.002y} dy\right)dx =$

$$= 6\cdot 10^{-6}\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty} e^{-0.002y} dy\right)e^{-0.001x}dx = 6\cdot 10^{-6}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-0.002x}}{0.002}\right)e^{-0.001x}dx =$$

$$= 0.003\int_0^{\infty} e^{-0.003x}dx = 0.003\frac{1}{0.003} = 1\,;$$

б) $p(X<1000, Y<2000) = 6\cdot 10^{-6}\int_0^{1000}\left(\int_x^{2000} e^{-0.002y}dy\right)e^{-0.001x}dx = 0.915$;

в) $p(Y>2000) = 6\cdot 10^{-6}\int_0^{2000}\left(\int_{2000}^{\infty} e^{-0.002y}dy\right)e^{-0.001x}dx\ +$

$+\ 6\cdot 10^{-6}\int_{2000}^{\infty}\left(\int_x^{\infty} e^{-0.002y}dy\right)e^{-0.001x}dx = 0.05$ или

$f_Y(y) = 6\cdot 10^{-6}e^{-0.002y}\int_0^y e^{-0.001x}dx = 6\cdot 10^{-6}e^{-0.002y}(1-e^{-0.001y})$, за y > 0

$p(Y>2000) = 6\cdot 10^{-6}\int_{2000}^{\infty} e^{-0.002y}(1-e^{-0.001y})dy = 0.05$

г) $f_X(x) = 6\cdot 10^{-6}\int_x^{\infty} e^{-0.001x-0.002y}dy = 0.003e^{-0.003x}$, за $x>0$, и сега

$p(Y>2000\,|\,X=1500) = \int_{2000}^{\infty}\frac{6\cdot 10^{-6}e^{-0.001x-0.002y}}{0.003e^{-0.003x}}dy = 0.368$;

д) не.

25. а) 0.0439, 0.0019; б) 0.065.

26. а) 0.032; б) 0.0267.

Глава 5

1. а) $3.91\cdot 10^{-19}$; б) 200; в) $2.56\cdot 10^{-18}$.

2. а) 3000; б) 1431.18.

5. $EX = \int_0^{\infty} x(2e^{-2x})dx = \frac{1}{2}$ минути;

$EX^2 = \int_0^{\infty} x^2(2e^{-2x})dx = \frac{1}{2}, \Rightarrow DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ минути.

6. а) $EX = 109.39$ микрометри, $DX = 33.19$ микрометри; б) 54.70 евра.

7. $EX = 1.85$ минути, $DX = 0.0408$ минути.

8. $(1-\bar{u})\lambda$, $1/\lambda$.

9. Нека X = "тежина на патиките";

а) $p(X>13) = p\left(\frac{X-12}{0.5} > \frac{13-12}{0.5}\right) = p\ (z>2) = 0.228$;

б) $p\,(z<\frac{13-12}{\sigma}) \geq 0.999 \Rightarrow \frac{13-12}{\sigma} \geq 3.72 \Rightarrow \sigma \leq 0.2688$;

в) $p\,(z<\frac{13-\mu}{0.5}) \geq 0.999 \Rightarrow \frac{13-\mu}{0.5} \geq 3.72 \Rightarrow \mu \leq 11.14$.

10. а) 500 000; б) 223607.

16. Бидејќи коефициентот на корелација $\rho = 0.964549$, одговорот е да.

17. X и Y се независни, па корелацијата е 0.

18. а) $EX = 4.3$, $EY = 82.8$, $DX = 6.21$, $DY = 152.96$, $E(XY) = 382.7 \Rightarrow \rho = 0.8650$;
    б) $a = 4.2930$, $b = 64.3401$, $\sigma^2 = 1.5635$;
    в) 4.8125.

19. Секоја линеарна комбинација на $X + Y$ и $X - Y$ е линеарна комбинација и на X и Y, па така $(X + Y, X - Y)$ има дводимензионална нормална распределба. Од $K_{X+Y,\,X-Y} = K_{X,X} - K_{X,Y} + K_{X,Y} - K_{Y,Y} = DX - DY = 0$.

20. а) 0.023; б) 4558.

Глава 6

1. $p(|X - 1| \le 0.75) \ge 0.41$ според неравенството Чебишев.
   Инаку $p(|X - 1| \le 0.75) = 0.75$.

2. а) $p(80 \le X \le 120) \ge 0$; б) $p(80 \le X \le 120) \ge 5/9$ што е значително подобрена граница.

3. Бројот на предмети X што одговара на стандардите има биномна распределба, со параметри $p = 0.9$ и $n = 18000$. Очекувањето кај биномната распределба е $EX = n \cdot p = 0.9 \cdot 18000 = 16200$, а дисперзијата е $DX = n \cdot p(1 - p) = 1620$. Сега добиваме

$$p(|X - EX| \le 200) \ge 1 - DX/200^2, \text{ т.е. } p(|X - 16200| \le 200) \ge 0.955.$$

4. Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ се случајни променливи (независни) – дијаметри на n дупки. Просечниот дијаметар е $E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \mu$, а стандардната девијација е $\sqrt{D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k)} = \sqrt{0.01^2/n}$. Сега неравенството на Чебишев дава

$$p(|X - EX| < k\sqrt{0.01^2/n}) \ge 1 - \frac{1}{k^2}, \text{ и за } k = 3,\ p(|\overline{X} - \mu| < 3\sqrt{0.01^2/n}) \ge \frac{8}{9}.$$

5. 3/4.

8. Не. Тоа е "коцкарска илузија".

9. Да.

11. Со неравенството на Чебишев се добива $n \ge 50000$ (пример 7.4).
    Користејќи ја централната гранична теорема добиваме

$$p(|Y_n - p| \le 0.01) = p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\delta_i - E\delta_i)\right| \le 0.01\right) =$$

$$= p\left(\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\delta_i - E\delta_i}{\sigma_\delta}\right)\right| \le \frac{0.01\sqrt{n}}{\sigma_\delta}\right) = p\left(|z| \le \frac{0.01\sqrt{n}}{\sigma_\delta}\right).$$

Имајќи предвид дека $\sigma_\delta \le 1/2$, добиваме $p(|E_n - p| \le 0.01) = p(|z| \le 0.02\sqrt{n})$ ≥ 0.95. Тоа конечно дава $0.02\sqrt{n} \approx 1.96 \Rightarrow n \approx 9604$, што е многу подобра проценка од онаа добиена со го неравенството на Чебишев.

12. И двете гранични теореми даваат делумно решение на општиот проблем: "Какво е граничното однесување на $S_n = (X_1 + X_2 + ... + X_n)/n$ кога n тежи кон бескрајност?" за произволни случајни променливи X_1, X_2, ... X_n. Според законот на големите броеви S_n конвергира по веројатност или "скоро сигурно" кон вистинската вредност μ.

    Од друга страна, централната гранична теорема тврди дека распределбата на $\sqrt{n}(S_n - \mu)$ конвергира кон нормална распределба $Z(0, \sigma^2)$, што е по-општо тврдење.