



УНИВЕРЗИТЕТ "СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ"

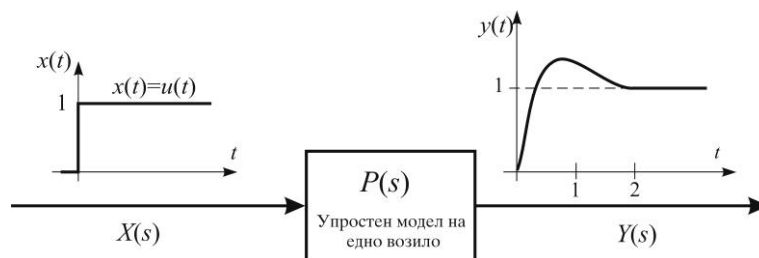


МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ - СКОПЈЕ

Проф. д-р Лазе Трајковски

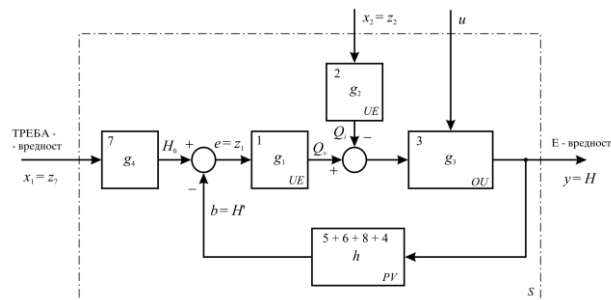
# ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ПРЕДМЕТОТ "ОСНОВИ НА АВТОМАТСКО УПРАВУВАЊЕ

*Инженерска скрипта*



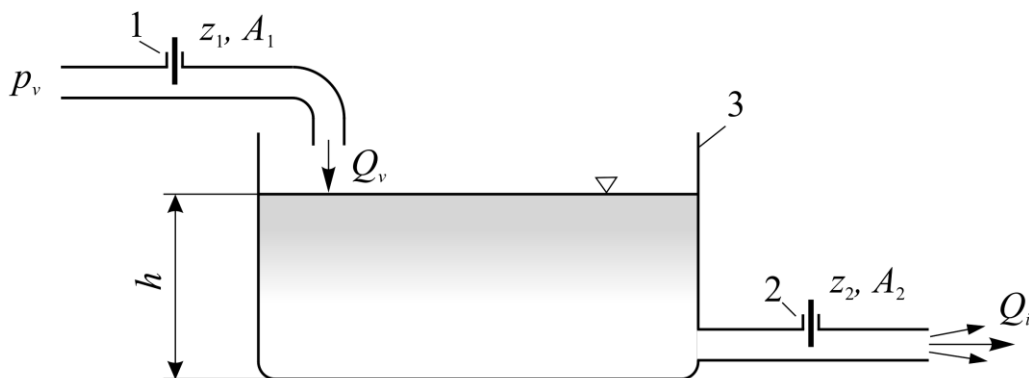
Скопје, 2005 год.

# ПРВА ГЛАВА



## 1. ТЕРМИНОЛОГИЈА НА УПРАВУВАЧКИТЕ СИСТЕМИ

**Задача 1.1.** Да се идентификуваат влезните и излезните големини за физичкиот систем - проточен резервоар за вода во кого треба да се одржува нивото на водата на зададена висина  $h$ , прикажан на слика 1.1.



Слика 1.1. Проточен резервоар за вода

**Решение:** На нивото на водата  $h$  значително влијаат протокот на водата  $Q_v$ , кој што дотекува во резервоарот 3 и протокот на водата  $Q_i$ , кој што истекува од резервоарот.

Протокот на водата  $Q_v$  е определен со притисокот на водата  $p_v$  пред вентилот 1 и проточниот попречен пресек на вентилот  $A_1$ , т.е. висината на отворање  $z_1$ .

Протокот на водата што истекува од резервоарот, со оглед на фактот дека нивото на водата  $h$  се одржува константно, ќе зависи само од проточниот попречен пресек  $A_2$  на вентилот 2, односно висината на отворање  $z_2$ .

Според тоа, големини кои значајно влијаат врз промената на нивото на водата во резервоарот, а притоа врз нивната промена може да се интервенира, ќе бидат:

$$\begin{aligned}x_1(t) &\equiv p_v(t) \\x_2(t) &\equiv z_1(t) \\x_3(t) &\equiv z_2(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Овие големини ќе претставуваат влезни големини за физичкиот систем.

Поставената цел е да се одржува константна висината  $h$  на нивото на водата, па, според тоа таа ќе биде излезна големина на системот, односно:

$$y(t) \equiv h(t)\tag{1.2}$$

Влезните и излезните големини за проточен резервоар за вода во кого се одржува константно ниво се прикажани на слика 1.2.



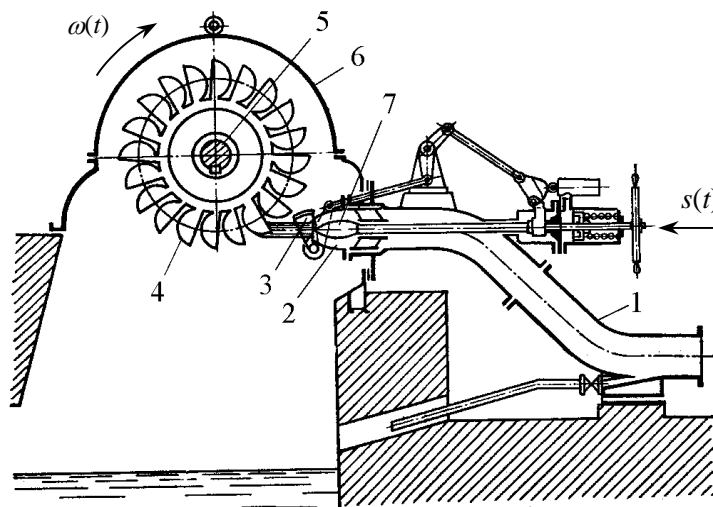
Слика 1.2. Блок-дијаграм за проточен резервоар за вода

**Задача 1.2.** Да се идентификува влезот и излезот за хидраулична Пелтон - турбина, чија скица е прикажана на слика 1.3.

**Решение:** Хидрауличната турбина служи да ја претвори хидрауличната енергија на водата во механичка енергија, и истата да ја предаде на електричниот генератор. Електричниот генератор ќе произведува квалитетна електрична енергија ако се задвижува со константен број на вртежи, независно од оптоварувањето на неговите излезни приклучоци.

Според тоа, излезна големина за хидрауличната турбина, разгледувана како систем на автоматско управување, ќе биде бројот на вртежи  $n$  ( $vr/s$ ), односно аголната брзина  $\omega = 2\pi$  ( $rad/s$ ) на излезното вратило на турбината:

$$y(t) \equiv \omega(t) \quad (1.3)$$



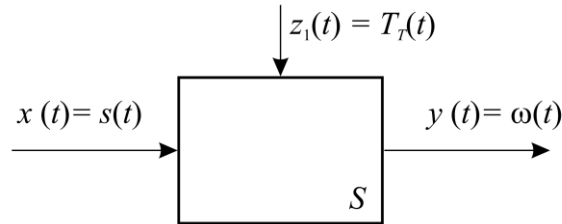
Слика 1.3. Скица на Пелтон турбина

За да се обезбеди константна аголна брзина ( $\omega = const$ ) на вратилото на турбината 5, и при променлив вртежен момент на оптоварување, треба да се менува хидрауличната моќност, односно протокот на вода што се доведува во турбината. Протокот на вода во млазот, со кој се задвижува Пелтон турбината, се регулира со промена на позицијата  $s$  на коцјето 7 во млазникот 2.



Според тоа, влезна големина за хидрауличната Пелтон турбина ќе претставува позицијата на копјето  $s$  (слика 1.4), односно:

$$x(t) \equiv s(t) \quad (1.4)$$



Слика 1.4. Блок-дијаграм за Пелтон турбина

На слика 1.4 со  $z_1(t)$  е означена пореметувачката големина за системот, а тоа е променливиот вртежен момент на оптоварување на турбината  $T_T(t)$ , односно:

$$z_1(t) \equiv T_T(t) \quad (1.5)$$

**Задача 1.3.** Да се идентификува влезот и излезот за еден електричен генератор за наизменичен напон.

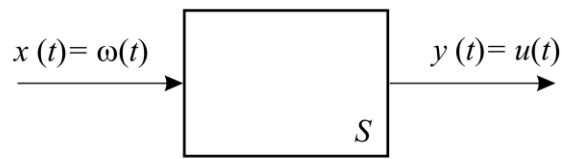
**Решение:** За да се добие константна фреквенција на наизменичниот напон на приклучоците на генераторот потребно е вратилото на генераторот да се врти со константна аголна брзина  $\omega = 2\pi n$  (rad / s).

Според тоа, влез за електричниот генератор, разгледуван како објект на управување, ќе биде аголната брзина  $\omega(t)$  на примарниот погон (хидраулична турбина, парна турбина и сл.), односно:

$$x(t) \equiv \omega(t) \quad (1.6)$$

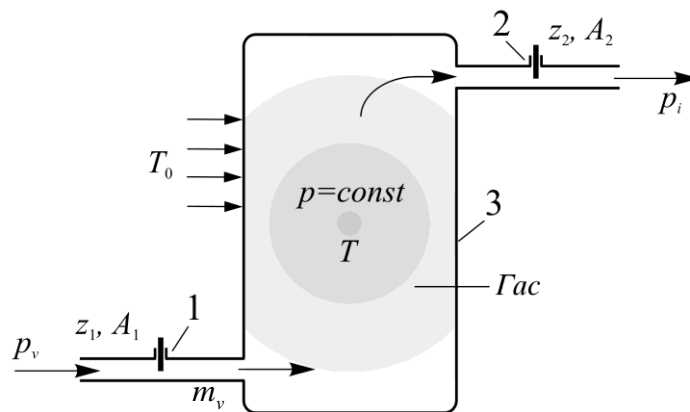
Излез за електричниот генератор ќе биде индуцираниот напон  $u$  (V) на излезните приклучоци (слика 1.5), односно:

$$y(t) \equiv u(t) \quad (1.7)$$



Слика 1.5. Блок-дијаграм за електричен генератор

**Задача 1.4.** Да се определат влезните и излезните големини за проточен резервоар за гас, прикажан на слика 1.6. и да се нацрта неговиот блок-дијаграм.



Слика 1.6. Проточен резервоар за гас

**Решение:** На слика 1.6. е прикажан проточен резервоар за гас во кого притисокот на гасот  $p$  се одржува на саканата вредност ( $p = const$ ).

На состојбата на гасот во резервоарот 3 битно влијаат:

- Притисокот на гасот  $p_v$  пред вентилот 1.
- Проточниот попречен пресек  $A_1$  на вентилот 1, односно висината на отворање  $z_1$ .

Масениот проток на гасот  $\dot{m}_v$ , кој што се доведува во резервоарот и ја менува состојбата на гасот во резервоарот, може да се определи од двете претходно наведени големини со помош на Сент-Венановата формула.

- Притисокот на гасот  $p_i$  во одводниот цевковод.
- Проточниот попречен пресек  $A_2$  на вентилот 2, односно висината на отворање  $z_2$ .

Овие две големини го дефинираат на масениот проток на гасот  $\dot{m}_i$ , кој што истекува од резервоарот и директно влијае врз состојбата на гасот во резервоарот.

Влезни големини за физичкиот систем - проточен резервоар за гас, ќе бидат претходно наброените големини, кои што значително ја менуваат состојбата на гасот во резервоарот, а истовремено нивната промена може да се контролира. Според тоа:

$$\begin{aligned}x_1(t) &\equiv p_v(t) \\x_2(t) &\equiv z_1(t) \\x_3(t) &\equiv p_1(t) \\x_4(t) &\equiv z_2(t)\end{aligned}\tag{1.8}$$

Температурата на околината  $T_0$ , исто така, влијае врз состојбата на гасот во резервоарот (равенка на состојба на гасот):

$$\frac{P}{\rho} = RT\tag{1.9}$$

Каде што е:  $\rho$  - Густина на гасот во резервоарот.

$R$  - Универзална гасна константа.

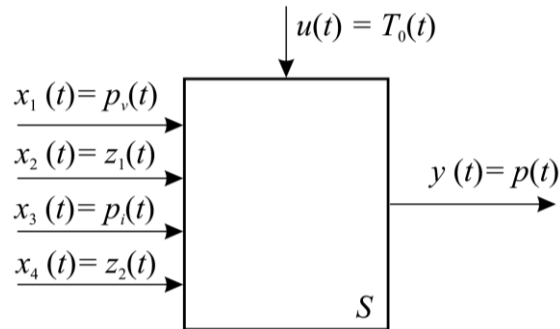
Но, бидејќи врз нејзината промена не може да се интервенира, тогаш таа ќе се анализира како пореметувачка големина за физичкиот систем, односно:

$$z(t) = T_0(t)\tag{1.10}$$

Резултат на промената на количината на гасот во резервоарот е неговиот притисок  $p$ , неговата промена треба да се одржува на саканата вредност, и затоа тој претставува излезна големина за разгледуваниот физички систем, односно:

$$y(t) = p(t)\tag{1.11}$$

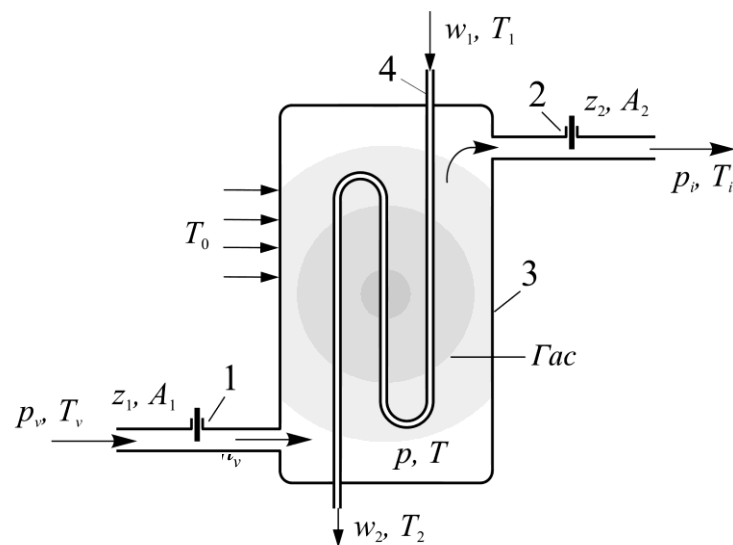
Блок-дијаграмот за проточен резервоар за гас во кого што се одржува константен притисок е прикажан на слика 1.7.



Слика 1.7. Блок-дијаграм за проточен резервоар за гас

**НАПОМЕНА:** И покрај тоа што гасот во физичка смисла истекува од резервоарот, сепак промената на притисокот во одводниот цевковод  $p_i$  претставува влезна големина за овој физички систем, бидејќи битно влијае врз состојбата на гасот во резервоарот.

**Задача 1.5.** Да се идентификуваат влезните и излезните големини за проточен резервоар со вграден изменувач на топлина, во кого треба да се одржуваат константни вредностите на температурата  $T$  и на притисокот  $p$  на работниот (компресибилан) флуид, прикажан на слика 1.8.



Слика 1.8. Проточен изменувач на топлина

**Решение:** Овој пример претставува проширување на можностите на физичкиот систем анализиран во задача 1.4. Разликата е во тоа што овде е вграден и дополнителен топлоизменувач 4 во самиот резервоар 3, со чија помош треба да се одржува саканата вредност на температурата на компресибилниот (работниот) флуид во резервоарот.

Ако температурата на работниот флуид има тенденција да опаѓа, во однос на саканата (референтната) вредност  $T_r$ , тогаш низ топлоизменувачот 4 се пропушта да струи флуид со повисока температура од референтната, односно  $T_1 > T_r$ , и се врши загревање на работниот флуид. Во обратен случај, ако температурата на работниот флуид има тенденција да расте над референтната температура, тогаш низ топлоизменувачот 4 се пропушта да струи флуид со пониска температура ( $T_1 < T_r$ ) и се врши ладење на работниот флуид. Процесот на топлоизменување (ладење) во голема мера е зависен од брзината на струење  $w_1$  на грејниот (ладилниот) флуид. Ако е тоа некомп्रेसибилен флуид (што е најчест случај во пракса), тогаш може да се усвои дека неговата брзина на струење низ топлоизменувачот е константна, односно  $w_1 = w_2$ .

На состојбата на работниот флуид ( $p = const, T = const$ ) во резервоарот 3 значително влијаат:

- Притисокот на флуидот  $p_v$  пред вентилот 1.
- Проточниот попречен пресек  $A_1$  на вентилот 1, односно висината на отворање  $z_1$ .
- Температурата на работниот флуид  $T_v$  на влез во резервоарот 3.
- Притисокот на работниот флуид  $p_i$  во одводниот цевковод.
- Попречниот пресек  $A_2$  на вентилот 2, односно висината на отворање  $z_2$ .
- Брзината на струење  $w_1$  на помошниот (грејниот-ладилниот) флуид.
- Температурата на помошниот флуид  $T_1$  на влез во топлоизменувачот.

Влијанието на температурата  $T_i$  на работниот флуид во одводниот цевковод, во овој случај може да се занемари.

Според тоа, влезни големини за овој физички систем ќе бидат:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &\equiv p_v(t) \\
 x_2(t) &\equiv z_1(t) \\
 x_3(t) &\equiv T_v(t) \\
 x_4(t) &\equiv p_i(t) \\
 x_5(t) &\equiv z_2(t) \\
 x_6(t) &\equiv w_1(t) \\
 x_7(t) &\equiv T_1(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

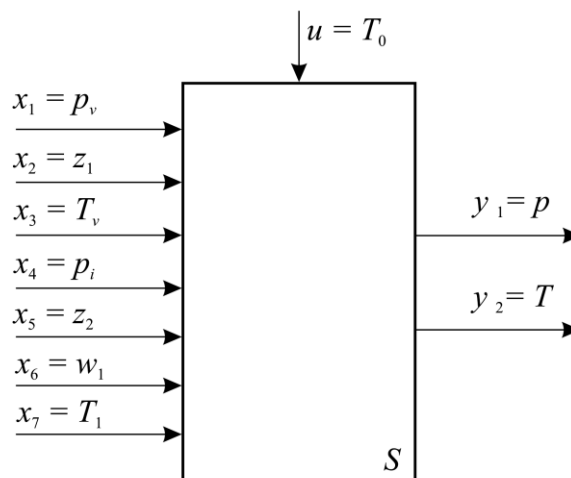
Температурата на околината  $T_0$ , со истото образложение од задача 1.4, ќе претставува пореметувачка големина, односно:

$$z(t) \equiv T_0(t) \tag{1.13}$$

Резултат на процесите во резервоарот 3 се промените на притисокот  $p$  и температурата  $T$  на работниот флуид, чии што вредности треба да се одржуваат на зададената (референтната) вредност и затоа тие ќе претставуваат излезни големини за разгледуваниот физички систем, односно:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &\equiv p(t) \\
 y_2(t) &\equiv T(t)
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

Блок-дијаграмот за проточен резервоар за компресибилен флуид во кого што се одржува константен притисок и константна температура е прикажан на слика 1.9.



Слика 1.9. Блок-дијаграм за проточен резервоар за компресибилен флуид со вграден топлоизменувач

**НАПОМЕНА:** Во претходните примери физичките системи се анализирани во целост, односно нивниот блок-дијаграм е прикажан како "црна кутија". Ова е направено сè со цел да се изврши идентификација на влезните и излезните големини за дадениот физички систем, од аспект на теоријата на системите, и да се потенцира дека тие не треба да се поврзат со физичкиот проток на маса и енергија низ системот. Со други зборови, влезот на маса и енергија не претставуваат влезни големини за системот и аналогно на тоа, излезот на маса и енергија не претставуваат излезни големини за физичкиот систем, анализиран во согласност со дефинициите и терминологијата во теоријата на системите.

**Задача 1.6.** Да се нацрта блок-дијаграмот за секоја од следните функции:

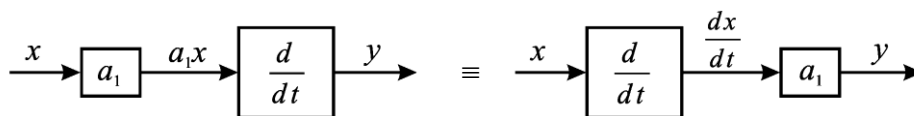
$$\text{а).} \quad y = a_1 \frac{dx}{dt}, \quad a_1 = \text{const} \quad (1.15)$$

$$\text{б).} \quad y = a_2 \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad a_2 = \text{const} \quad (1.16)$$

$$\text{в).} \quad y = \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} + 5x_2 - x_1 \quad (1.17)$$

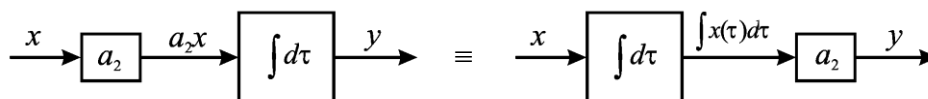
**Решение:** Блок-дијаграмите се цртаат директно од зададените функции, но притоа треба да се води сметка дека во секој од блоковите може да се реализира по една математичка операција (множење со константа, диференцирање, интегрирање, сумирање).

а).



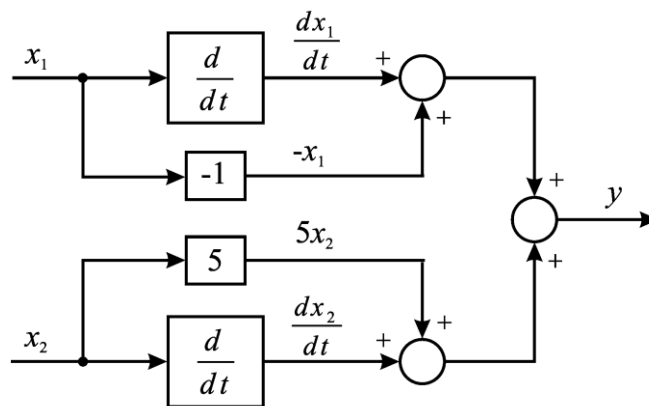
Слика 1.10. Блок-дијаграм за функцијата (1.15)

б).



Слика 1.11. Блок-дијаграм за функцијата (1.16)

в).



Слика 1.12. Блок-дијаграм за функцијата (1.17)

**Задача 1.7.** Да се нацрта упростен блок-дијаграм на систем за автоматско одржување на температурата на дадена вредност во затворена просторија и притоа да се идентификуваат елементите на системот, влезната и излезната големина.

**Решение:** Основните елементи на овој систем се:

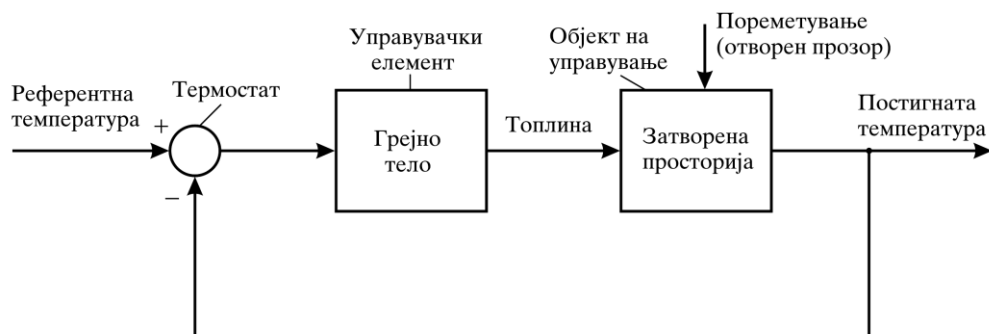
- Затворена просторија, како објект на управување.
- Грејно тело (радијатор, електрична печка и сл.), како управувачки елемент.
- Термостат, на кого се задава саканата вредност на температурата во просторијата и во кого се врши споредување на саканата и постигнатата температура во просторијата, како суматор.

Влез во системот ќе биде саканата вредност на температурата во просторијата.

Излез за системот ќе биде постигнатата вредност на температурата во просторијата.

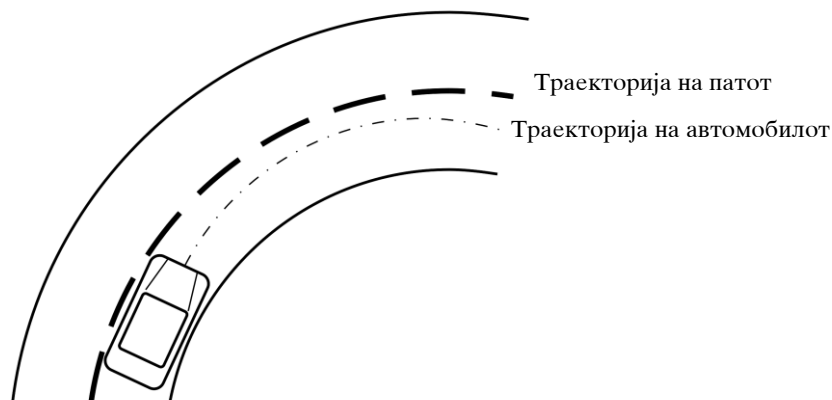
Блок-дијаграмот за дадениот систем (слика 1.13) лесно може да се конструира врз база на информациите за елементите на системот и идентификацијата на влезот и излезот на системот.





Слика 1.13. Блок-дијаграм на систем за автоматско одржување на температурата во затворена просторија

**Задача 1.8.** Да се нацрта упростен блок-дијаграм на систем кој се состои од човек кој управува со автомобил (слика 1.14), и притоа да се определат елементите на системот и да се идентификуваат влезот и излезот на системот.



Слика 1.14. Скица на системот - управување на автомобил

**Решение:** Управувачкиот систем, кој се состои од човек кој управува автомобил содржи компоненти кои се биолошки и компоненти кои се направени од човекот. Возачот се стреми да го одржува возилото на зададената патека. Тој тоа го прави со постојано следење на насоката по која се движи автомобилот во однос на насоката на патот.

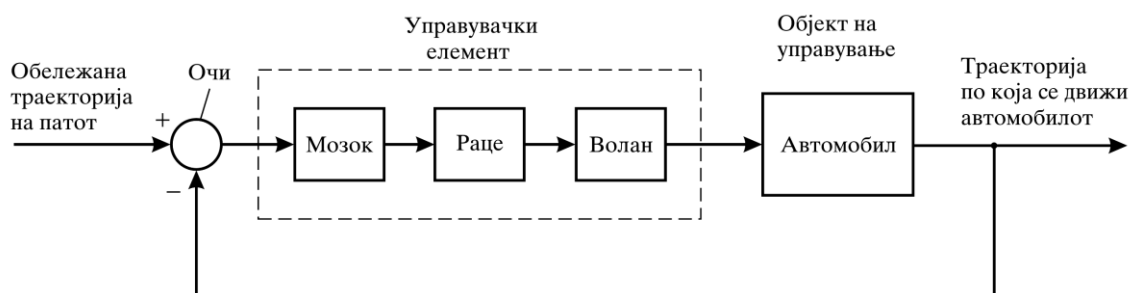
Во овој случај, насоката на патот, претставена со белата линија на средината на патот или со неговите странични линии, може да биде земена како влез.

Вистинската траекторија по која се движи автомобилот е излез на системот.

Возачот го управува излезот преку негово постојано споредување со очите и мозокот и го корегира преку своите раце и воланот.

Главни елементи на овој управувачки систем се: очите, мозокот, рацете на возачот и воланот со кој се управува автомобилот.

Анализата на функционирањето на дадениот управувачки систем и идентификацијата на влезот и излезот на системот се доволни за конструкција на упростиот блок-дијаграм за овој систем, прикажан на слика 1.15.



Слика 1.15. Блок-дијаграм на системот - управување на автомобил

Повратната врска е негативна, бидејќи ако постои разлика помеѓу влезот и излезот човекот реагира за да ја корегира траекторијата на движење на автомобилот. Кога влезот и излезот се поклопуваат тогаш нема потреба од управувачка акција.

**Задача 1.9.** Да се скицира упростиот блок-дијаграм за авион управуван со автопилотски механизам.

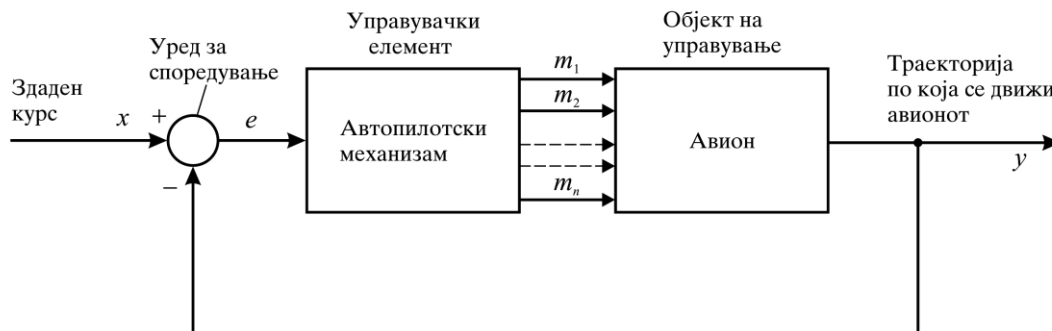
**Решение:** Автопилотскиот механизам и авионот кој е управуван претставува управувачки систем со повратна врска. Неговата задача е авионот да го води по одреден курс без оглед на атмосферските прилики. Тој ја извршува оваа за-

дача со постојано мерење на вистинската патека по која се движи авионот и автоматски ги поставува управувачките елементи од авионот (крилцата, крмилото и сл.) за да го доведе во согласност со зададениот курс.

Човекот, како пилот или оператор, кој ги поставува параметрите на автопилотот не е дел од управувачкиот систем.

Според тоа, влез е зададениот курс на летање, кој што може да биде претставен на посебен уред на управувачката табла на авионот, а излез е реалниот курс одреден со автоматските навигациони инструменти. Еден уред за споредување непрекинато ги покажува влезот и излезот на системот.

Кога овие два сигнала се поклопуваат ( $e = 0$ ) тогаш нема потреба од управувачка акција. Кога помеѓу влезот и излезот постои разлика, уредот за споредување дава сигнал на грешка  $e$  за управувачка акција до управувачот - автопилотскиот механизам. Управувачот дава соодветни сигнали кон управувачките делови од авионот (крилца, крмило и сл.) за да ја намали разликата помеѓу влезот и излезот.



Слика 1.16. Упростен блок-дијаграм на авион со автопилот

Повратната врска може да биде добиена преку електричен, хидрауличен или механички пренос од навигационите инструменти, што ја мерат позицијата на авионот, до уредот за споредување.

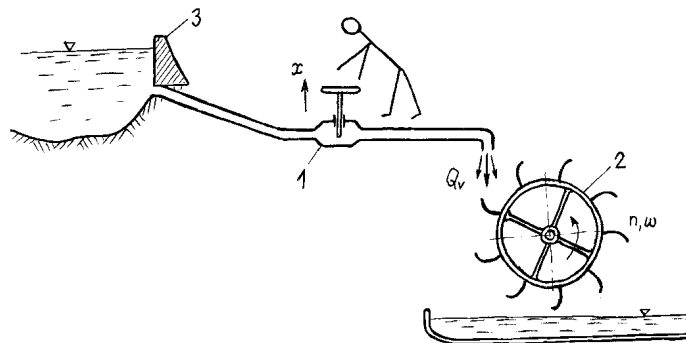
На слика 1.16 е прикажан упростен блок-дијаграм на авион управуван со автопилот.

Објектот на управување за овој систем е авионот, вклучувајќи ги неговите управувани површини (страничните крилца и крмата) и навигационите инструменти.

Механизмот на автопилотот е управувачки елемент, а суматор е уредот за споредување.

Автопилотот обезбедува управувачки сигнали за движење на  $n$ -те управувачки делови, означени со  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

**Задача 1.10.** На слика 1.17 е прикажана поедноставена скица на една воденица. Да се нацрта блок дијаграмот за овој систем.



Слика 1.17. Скица на една воденица

**Решение:** Функционирањето на овој систем, накратко може да се опише на следниот начин:

- Наутро, воденичарот го отвора управувачкиот вентил 1, со кого што се управува протокот на вода до воденичкото тркало 2. Со оглед на долгогодишното искуство, воденичарот ќе го отвори вентилот во позиција  $x$ , со што ќе се обезбеди доволен проток на вода за да може да се задвижи воденичното тркало 2 со саканиот број на вртежи  $n_r$  и при негово полно оптоварување, а притоа тој води сметка, исто така, да не биде вентилот отворен премногу, за да не се троши непотребно големо количество на вода (ако има мала акумулација да не се потроши водата во текот на целиот работен ден).

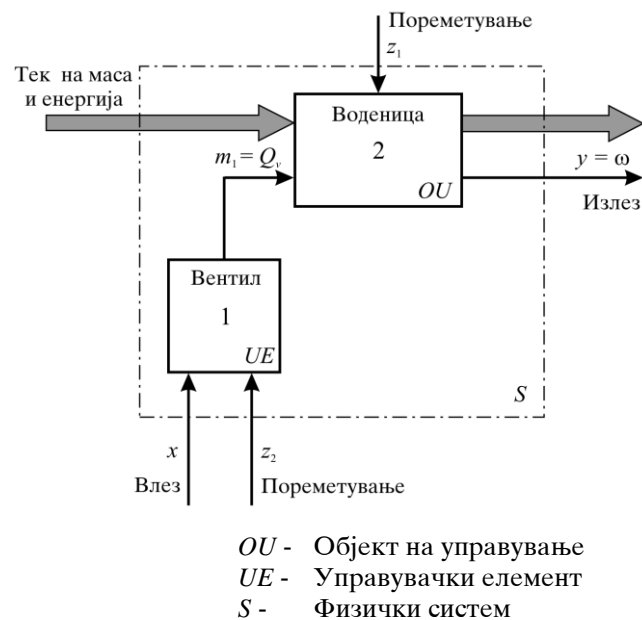
Во текот на денот, воденичарот најчесто не врши никаква корекција на отвореноста на вентилот 1, и покрај тоа што постојат периоди кога воденичниот камен не е воопшто оптоварен, односно воденицата не меле жито.

Според тоа, во овој случај станува збор за управувачки систем без повратна врска.

Како резултат на управувачката акција треба да се добие потребниот број на вртежи  $n$  на воденичното тркало, односно тој ќе претставува излезна големина за овој систем.

Во текот на работата може да настанат различни пореметувања на системот кои треба да се евидентираат и да се внесат во системот како пореметувачки сигнали -  $z_i$  (на пример: триење во лежиштата на воденичното тркало, зазори во вентилот и сл.)

Блок-дијаграмот за воденицата, како управувачки систем, е прикажан на слика 1.18.



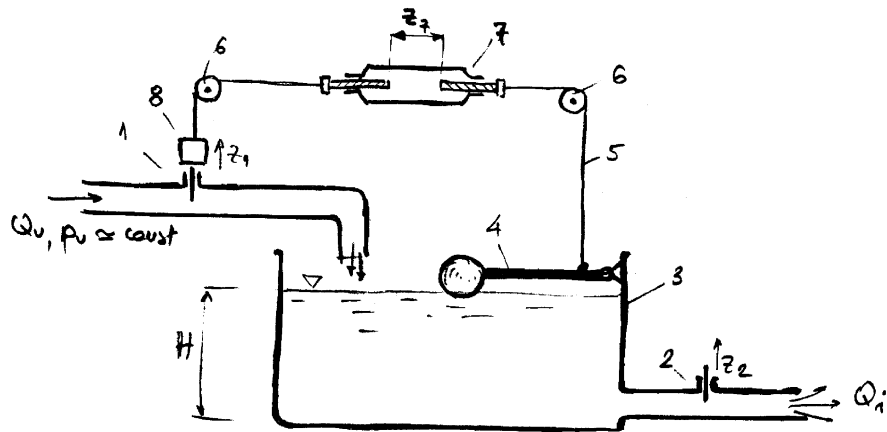
Слика 1.18. Блок-дијаграм за воденица

**НАПОМЕНА:** Во овој случај намерно е избегнат стандардниот начин на прикажување на физичките системи преку блок-дијаграми, со цел да се потенцира фактот дека физичкиот влез и излез на маса и енергија во системите не

претставуваат влезни и излезни големини за разгледуваните системи. На пример, водата што истекува од воденицата и количината на сомеленото жито не претставуваат излезни големини за овој систем.

**Задача 1.11.** На сликата 1.19 е прикажан систем за автоматско одржување на константно ниво во проточен резервоар за вода (слика 1.1.).

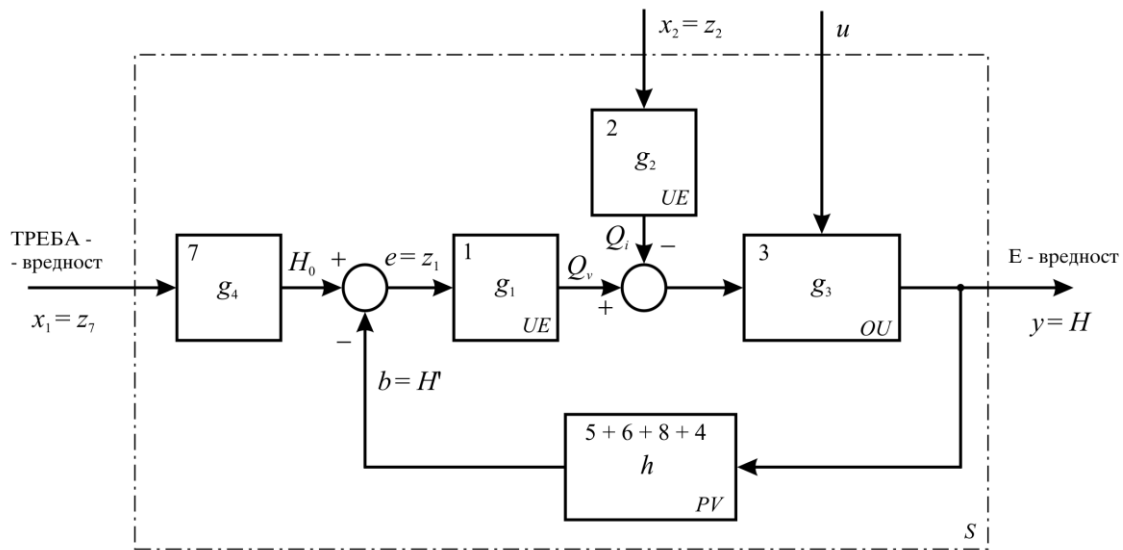
Да се нацрта блок-дијаграмот за овој систем на автоматско управување (САУ) на нивото на водата и да се идентификуваат сите елементи во истиот.



Слика 1.19. Систем за автоматско одржување на константно ниво во проточен резервоар

**Решение:** Саканото ниво  $H_0$  на течноста во резервоарот 3 се поставува со помош на затегнувачот 7. Вредноста на стварното ниво  $H$ , преку пловакот 4, сајлата 5 и макарите 6 се пренесува до тегот 8, односно вентилот 1, низ кого се обезбедува доток на вода во резервоарот. Преку позицијата  $z_2$  на вентилот 2 се контролира количината на водата која истекува од резервоарот.

Блок-дијаграмот за конкретниот пример (слика 1.20) е нацртан во согласност со општата структура на блок-дијаграми за системи на автоматско управување (САУ) со повратна врска и на него се означени сите големини и елементите во поедините блокови.



Слика 1.20. Блок-дијаграм на систем за автоматско одржување на константно ниво во проточен резервоар

Основните елементи и големини, според слика 1.20, се:

$x_1 \equiv z_7$  - Позиција на затегнувачот - влезна големина на САУ.

$x_2 \equiv z_2$  - Позиција на вентилот 2 - влезна големина на САУ.

$y \equiv H$  - Излезна големина на САУ.

$H_0$  - Референтно ниво на водата во резервоарот (ниво кое се сака да се одржи константно, ТРЕБА - вредност).

$H$  - Стварно ниво на водата во резервоарот (E - вредност).

$Q_i$  - Проток на вода што истекува низ вентилот 2.

$Q_v$  - Проток на вода што се доведува во резервоарот.

$z_1$  - Позиција на тегот 8.

$u$  - Пореметување на САУ; на пример: неисправен вентил 2 (волуменски губиток на вода поради лошо заптивање).

OU - Објект на управување:  $g_3$  - резервоар за вода.

UE - Управувачки елемент:  $g_1$  - вентил 1,  $g_2$  - вентил 2.

PV - Елемент во повратната врска:  $h$  - пловак 4, сајла 5, макари 6, тег 8.

$g_i$  - Математички модели на поедините компоненти.

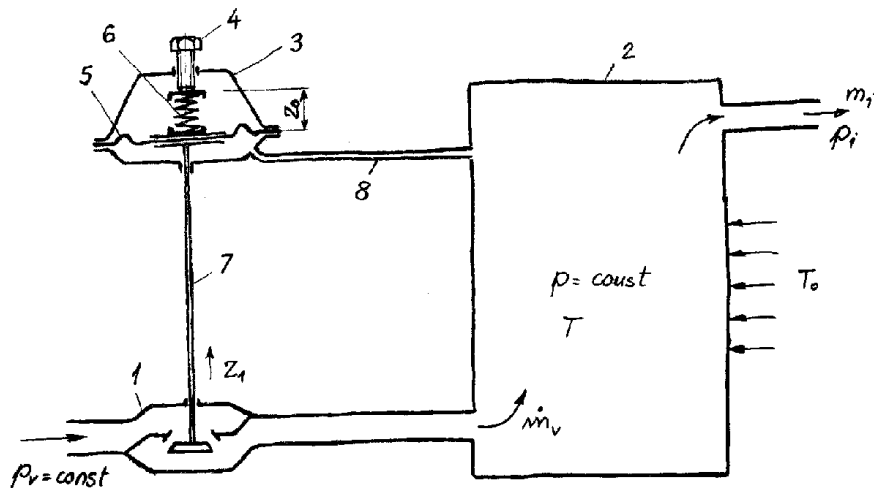
$h$  - Математички модел на повратната врска.

**Задача 1.12.** На слика 1.21. е прикажан систем за одржување на константен притисок во проточен резервоар за гас (слика 1.6)

Да се нацрта блок-дијаграмот за овој систем на автоматско управување (САУ) и да се идентификуваат сите елементи.

**Решение:** Саканата вредност (ТРЕБА - вредност) на притисокот  $p_0$  во резервоарот 2 се поставува со помош на завртката 4 и пружината 6. На тој начин се дефинира силата во пружината 6 која што треба да се спротивстави на силата од притисокот  $p$ .

Стварниот притисок на гасот  $p$  (Е - вредност) преку цевката 8 дејствува на мембраната 5, спротивно на дејството на силата од пружината 6. Стапот 7 е цврсто поврзан со мембраната 5 и дејствува на вентилот 1, низ кој што се обезбедува доток на гас во резервоарот 2.



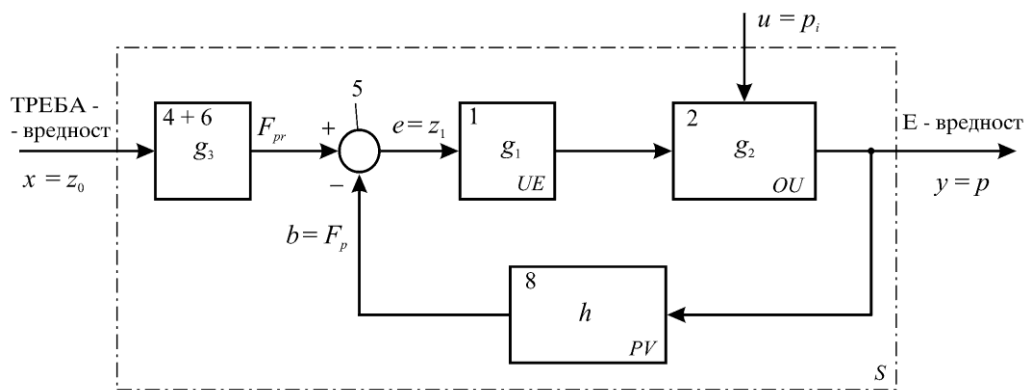
Слика 1.21. САУ на притисокот во проточен резервоар за гас

Системот за автоматско управување на притисокот во проточен резервоар за гас функционира на следниот начин: на пример, ако притисокот  $p$  во резервоарот почне да опаѓа под референтната вредност  $p_0$ , тогаш ќе дојде до нарушување на рамнотежата на силите кои дејствуваат на мембраната 5.



Силата  $F_{pr}$  од пружината 6 ќе биде поголема од силата од моменталниот притисок  $p$  која се генерира на мембраната 5, па преку стапот 7 ќе предизвика дополнително отворање на вентилот 1. Ова ќе доведе до зголемување на масениот проток на гасот  $\dot{m}_v$  што се доведува во резервоарот 2. Ако притисокот  $p$  во резервоарот почне да се покачува над референтната вредност  $p_0$ , тогаш се случува обратен процес, односно доаѓа до дополнително затворање на вентилот 1 со што се намалува масениот проток на гасот  $\dot{m}_v$ .

Блок-дијаграмот на конкретниот САУ е прикажан на слика 1.22 и на него се означени сите големини и елементите (преку позициите означени на слика 1.21) во поедините блокови.



Слика 1.22. Блок-дијаграм на САУ на притисокот во проточен резервоар за гас

На сликата 1.22 може да се идентификуваат следните големини и елементи:

$x \equiv z_0$  - Влезна големина на САУ.

$y \equiv p$  - Излезна големина на САУ.

$u \equiv p_i$  - Пореметување во САУ.

$z_0$  - Позиција на завртката 4 со која се дефинира референтниот притисок  $p_0$  (ТРЕБА - вредност) на гасот во резервоарот 2.

$F_{pr}$  - Сила во пружината 6.

$F_p$  - Сила од моменталниот притисок во резервоарот која што се генерира на мембраната 5.

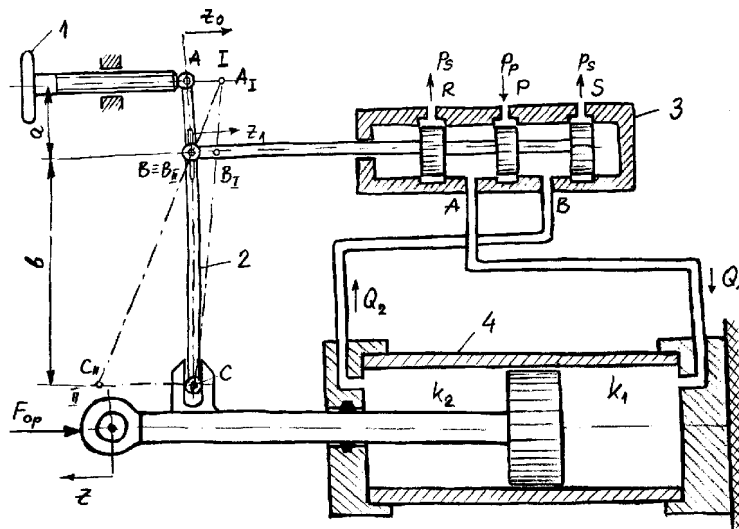
- 
- 
- $e \equiv z_1$  - Сигнал на грешка во САУ, односно механичка дилатација на мембраната 5. Таа настанува со уравнотежување на силата на пружината  $F_{pr}$  и силата од моменталниот притисок  $F_p$ .
- $\dot{m}_v$  - Масен проток на гасот кој што протекува низ вентилот 1 - манипулативна променлива во САУ.
- $p$  - Стварна вредност на притисокот на гасот во резервоарот (Е - вредност).
- $p_i$  - Притисок на гасот во одводниот цевковод, кој што зависи од потрошувачите и врз него не може да се влијае.
- $UE$  - Управувачки елемент:  $g_1$  - вентил 1.
- $OU$  - Објект на управување:  $g_2$  - проточен резервоар за гас 2.
- $PV$  - Елемент во повратната врска:  $h$  - цевка 8.
- $g_i$  - Математички модели на поедините елементи.
- $h$  - Математички модел на повратната врска.

Во овој случај е усвоено дека резервоарот е добро изолиран, поради што влијанието на температурата на околината врз промената на притисокот во резервоарот е занемарливо мало, па според тоа истата не се зема во предвид.

Притисокот на гасот  $p_v$  на влез во системот се усвојува дека е константен и врз него не може да се влијае, па според тоа не се анализира како влезна големина во САУ (види задача 1.4).

**НАПОМЕНА:** Во литературата, каде што се третира проблематиката на системите на автоматско управување, за влезната големина со која што се задава како референтната вредност која треба да се добие на излезот од САУ, многу често се користи терминот "ТРЕБА - вредност", а за стварната, односно моменталната вредност на излезот од САУ се користи терминот "Е - вредност".

**Задача 1.13.** На слика 1.23 е прикажан хидрауличен сервомеханизам за пратење на позиција. Да се нацрта блок-дијаграмот за овој систем на автоматско управување (САУ) и да се идентификуваат сите елементи.



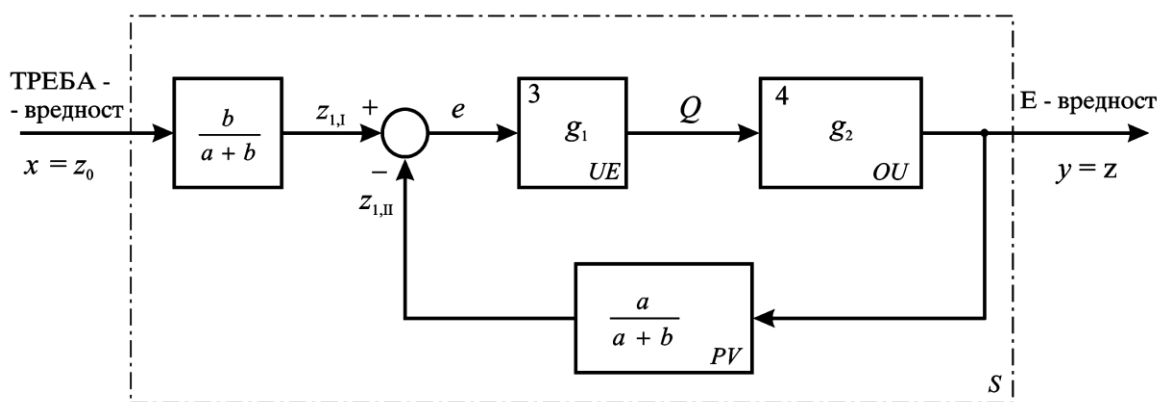
Слика 1.23. Хидрауличен сервомеханизам за пратење на позиција

**Решение:** Саканата вредност (ТРЕБА - вредност) на позицијата на клипњачата на цилиндарот 4 се поставува со помош на завртката 1, позиција  $z_0$ . Во почетниот момент клипот на цилиндарот 4 е фиксиран (позиција C), бидејќи двете комори  $k_1$  и  $k_2$  на цилиндарот се блокирани со распоредникот 3. Според тоа, лостот 2 ќе се заротира околу точката C и ќе ја постигне позицијата I, точка  $A_I$ .

Клипчето на распоредникот 3 ќе се помести за позиција  $z_{1,I}$ . При тоа, приклучокот P ќе се поврзе со приклучокот A, а приклучокот B со приклучокот S (кон резервоарот). Клипот во цилиндарот 4 ќе почне да се движи во лево, бидејќи комората  $k_1$  е под притисок  $p_p$ , а комората  $k_2$  е поврзана со резервоарот за масло  $p_s$ , и притоа ќе ја совладува силата на оптоварувањето  $F_{op}$ . Движењето на клипњачата ќе престане и клипњачата ќе се позиционира во положба II, односно точка  $C_{II}$ , бидејќи во таа позиција клипчето од распоредникот 3, кое што

е задвижувано од лостот 2, ќе се врати во почетната позиција и ќе ги блокира приклучоците  $P$ ,  $R$  и  $S$ , а со тоа и приклучоците  $A$  и  $B$ . Според тоа, клипњачата на цилиндарот 4 ќе се задвижи за позиција  $z$  што кореспондира на почетната зададена вредност на поместување  $z_0$  на завртката 1.

Блок-дијаграмот на хидрауличниот сервомеханизам за пратење на позиција е прикажан на слика 1.24 и на него се означени сите големини и елементите во поедините блокови.



Слика 1.24. Блок-дијаграм на хидрауличен сервомеханизам за пратење на позиција

На сликата 1.24 може да се идентификуваат следните големини и елементи:

$x \equiv z_0$  - Влезна големина на САУ.

$y \equiv z$  - Излезна големина на САУ.

$z_0$  - Позиција на завртката 2 со која се дефинира референтната позиција (ТРЕБА - вредност) на цилиндарот 4.

$z_1$  - Моментална позиција на клипчето на распоредникот 3.

$z$  - Моментална вредност на позицијата на цилиндарот 4.

$e = z_{1,I} - z_{1,II}$  - Сигнал на грешка во САУ.

$Q$  - Проток на масло под притисок, со кого се дефинира брзината на движење на цилиндарот.

$p_p$  - Работен притисок на маслото што се доведува од пумпата.

$p_s$  - Притисок на маслото во одводните канали кон резервоарот.

$UE$  - Управувачки елемент - распоредник 3.

$OU$  - Објект на управување - цилиндар 4.

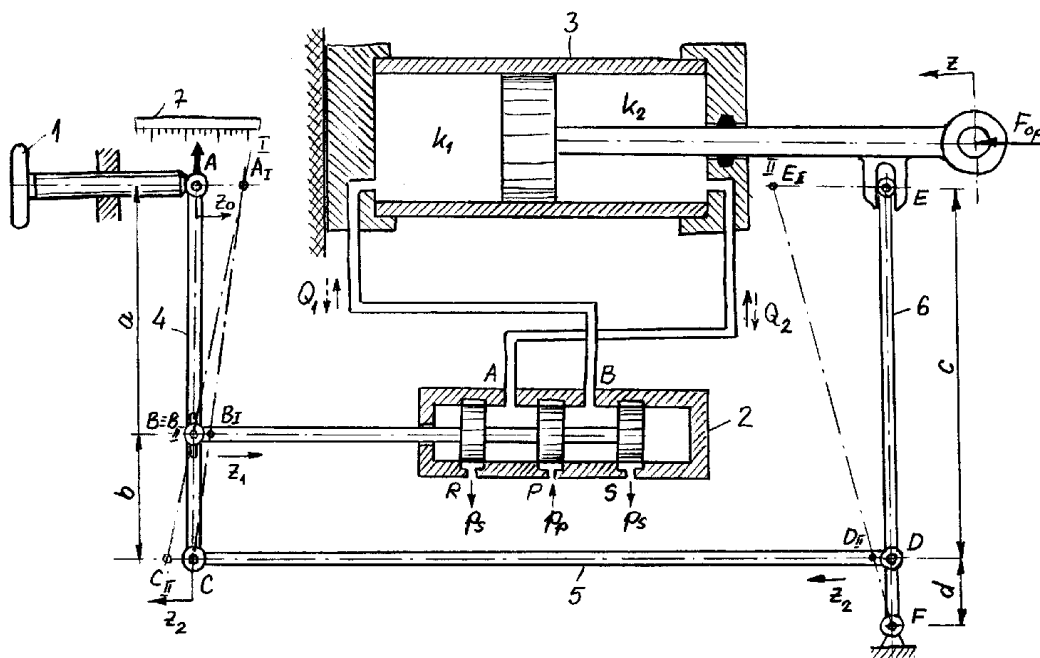
$PV$  - Повратна врска - лост 2.

$g_1$  - Математички модел на распоредникот 3.

$g_2$  - Математички модел на цилиндерот 4.

**НАПОМЕНА:** Објаснувањето на принципот на работа на сервомеханизмот е направено за две крајни позиции на системот (лост 2) *I* и *II*, со цел полесно да се изведат корелациите на поместувањата на точките *A*, *B* и *C*. Но, во реалност, веднаш штом почне да се задвижува завртката 1 (точката *A*), во исто време започнува со движење и цилиндарот 4 (точката *C*), односно процесот на пратење се одвива континуирано.

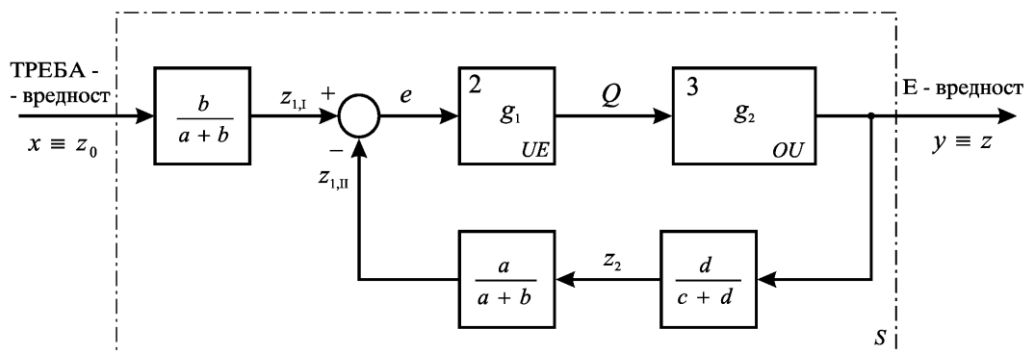
**Задача 1.14.** На слика 1.25 е прикажан хидрауличен сервомеханизам за пратење на позиција. Да се идентификуваат сите елементи, влезот и излезот и да се нацрта блок-дијаграмот за овој систем на автоматско управување.



Слика 1.25. Скица на хидрауличен сервомеханизам за пратење на позиција

**Решение:** Принципот на функционирање на хидрауличниот сервомеханизам е идентичен со системот даден во задача 1.13. Саканата вредност (ТРЕБА-вредност) на позицијата на клипњачата на цилиндарот 3 се поставува со помош на завртката 1, позиција  $z_0$ . Во почетниот момент клипот на цилиндарот 3 е фиксиран (позиција  $E$ ), бидејќи двете комори  $k_1$  и  $k_2$  на цилиндарот се блокирани со распоредникот 2. Според тоа, лостот 4 ќе се заротира околу точката  $C$  и ќе ја постигне позицијата  $I$ , точка  $A_I$ .

Клипчето на распоредникот 2 ќе се помести за позиција  $z_{1,I}$ . Во таа позиција приклучокот  $P$  ќе се поврзе со приклучокот  $A$ , а приклучокот  $B$  со приклучокот  $S$  (кон резервоарот и клипњачата на цилиндарот 3 ќе почне да се вовлекува. Движењето на клипњачата на цилиндарот 3 ќе престане во позиција  $II$ , односно точка  $E_{II}$ , бидејќи во таа позиција клипчето од распоредникот 2, кое во овој случај е задвижувано преку лостот 6, стапот 5 и лостот 4, ќе се врати во почетна позиција и ќе ги блокира приклучоците  $P$ ,  $R$  и  $S$ , а со тоа и приклучоците  $A$  и  $B$ . Според тоа, клипњачата на цилиндарот 3 ќе се задвижи за позиција  $z$ , која што кореспондира на почетната зададена вредност на поместувањето  $z_0$  на завртката 1. Коэффициентот на пропорционалност помеѓу поместувањата  $z_0$  и  $z$  е определен со односот на краците ( $a/b$  и  $c/d$ ) на лостовите 4 и 6. Тој однос може да биде пресметан на баждарената скала 7, така да може директно да се отчитува големината на поместувањето  $z$  на клипњачата на цилиндарот 3.



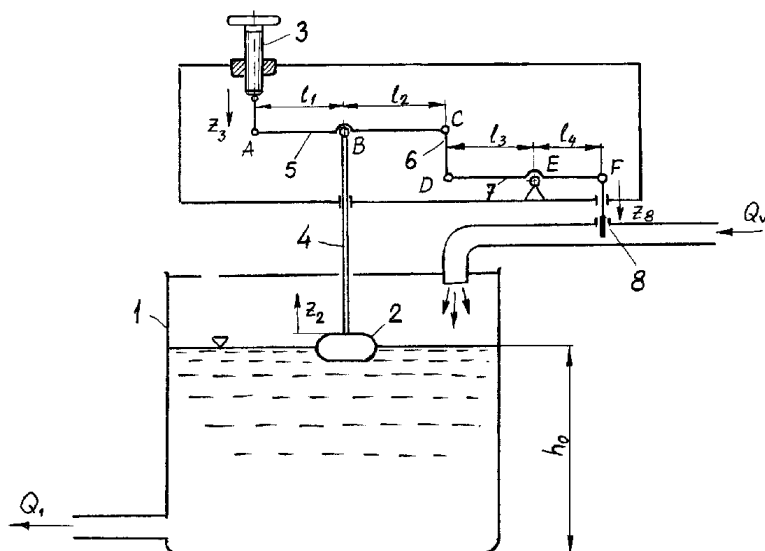
Слика 1.26. Блок-дијаграм на хидрауличен сервомеханизам за пратење на позиција

Блок-дијаграмот на хидрауличниот сервомеханизам за пратење на позиција е прикажан на слика 1.26 и на него се означени сите елементи и големини.

Елементите и големините на системот се идентични како во задача 1.13 и затоа нема да бидат посебно објаснети. Притоа важи истата напомена дека процесот на пратење се одвива континуирано.

**Задача 1.15.** На сликата 1.27 е прикажан систем за автоматско одржување на константно ниво во проточен резервоар за вода.

Да се нацрта блок-дијаграмот за овој САУ и да се означат сите елементи и големини во истиот.



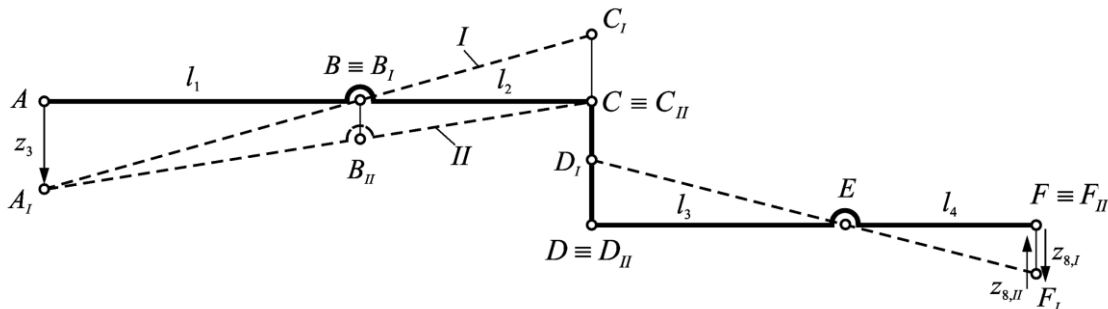
Слика 1.27. САУ на нивото на водата во проточен резервоар

**Решение:** Принципот на функционирање на системот за автоматско одржување на константно ниво во проточен резервоар за вода е сличен на системот анализиран во задача 1.11.

Системот е прикажан во стационарна состојба, кога протокот на водата  $Q_v$ , кој што дотекува во резервоарот 1 е еднаков на протокот на водата  $Q_i$ , кој што истекува од резервоарот, односно  $Q_v = Q_i$ , и нема никаква промена на висината  $h_0$  на нивото на водата во резервоарот.

Саканата вредност (ТРЕБА-вредност) на висината  $h_0$  на нивото на водата, која што треба да се одржува константна, се задава со помош на завртката 3, позиција  $z_3$ .

Ако, на пример, референтното ниво  $h_0$  треба да се намали, тогаш завртката 3 се навртува (точката  $A$  се спушта) за позиција  $z_3$ . Лостовите 5 и 7 се поставуваат во позиција  $I$  (слика 1.28), односно вентилот 8 се затвора за вредност  $z_{8,I}$ . Поради намалувањето на протокот на водата  $Q_v$  ќе дојде до намалување на нивото на водата. Кога нивото на водата ќе ја постигне новата референтна висина  $h_0$ , тогаш лостовите 5 и 7 ќе се постават во позиција  $II$ , вентилот 8 ќе се отвори за вредност  $z_{8,II}$ , односно вентилот ќе се врати во почетната стационарна состојба. Односот на поместувањата на лостовите 5 и 7 зависи од односот на нивните краци и лесно може да се определи од сличноста на триаголниците во дадените позиции  $I$  и  $II$ , прикажани на слика 1.28.

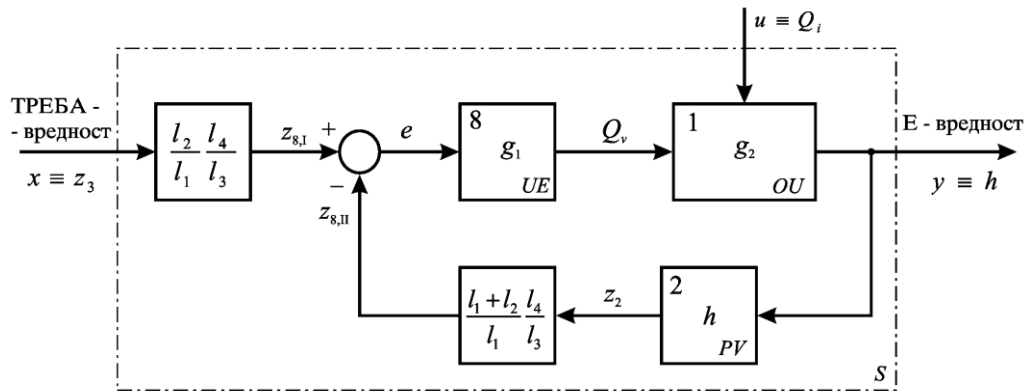


Слика 1.28. Задавање на ново референтно ниво  $h_0$

Сега системот ќе го одржува константно новото референтно ниво  $h_0$ . Имено, ако дојде до промена на стационарната состојба, односно  $Q_i > Q_v$ , тогаш ќе почне нивото на водата да се спушта. Пловакот 2 ја прати промената на нивото на водата, па преку стапот 4 ќе го заротира лостот 5 околу точката  $A$  према долу, а со тоа ќе предизвика дополнително отворање на вентилот 8. Протокот на водата  $Q_v$  ќе се наголеми, а тоа ќе доведе до повторно покачување на нивото на водата до референтната висина  $h_0$ , односно таа се одржува константна.



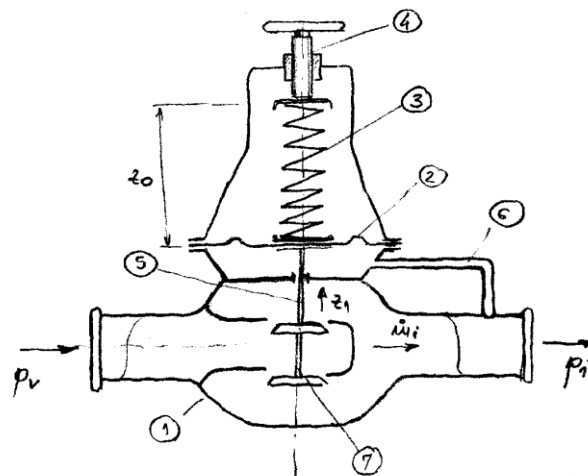
Блок-дијаграмот на системот за автоматско одржување на константно ниво на водата во проточен резервоар е прикажан на слика 1.29.



Слика 1.29. Блок-дијаграм на систем за автоматско одржување на константно ниво во проточен резервоар

Основните големини и нивната поврзаност се дефинирани во горното објаснување на функционирањето на овој систем, а елементите во блок-дијаграмот се идентични како во претходните задачи.

**Задача 1.16.** На слика 1.30 е прикажан пневматски регулатор на притисок. Тоа е компонента која што треба да обезбеди константен притисок на флуидот на нејзиниот излез ( $p_i = const$ ) независно од промената на притисокот на влезот.



Слика 1.30. Регулатор на притисок

---

---

Да се нацрта блок-дијаграмот за овој систем на автоматско управување (САУ) и да се означат сите елементи и големини.

**Решение:** Вредноста на притисокот  $p_i$ , кој што треба да се одржува константен (ТРЕБА-вредност), се поставува со помош на завртката 4. Со преднапрегање на пружината 3 на позиција  $z_0$  се генерира сила во пружината  $F_{pr}$ , која што треба да се спротивстави на притисната сила  $F_p$ . Притисната сила  $F_p$  се создава на мембраната 2 под дејство на притисокот  $p_i$  на излез од пневматскиот регулатор на притисок.

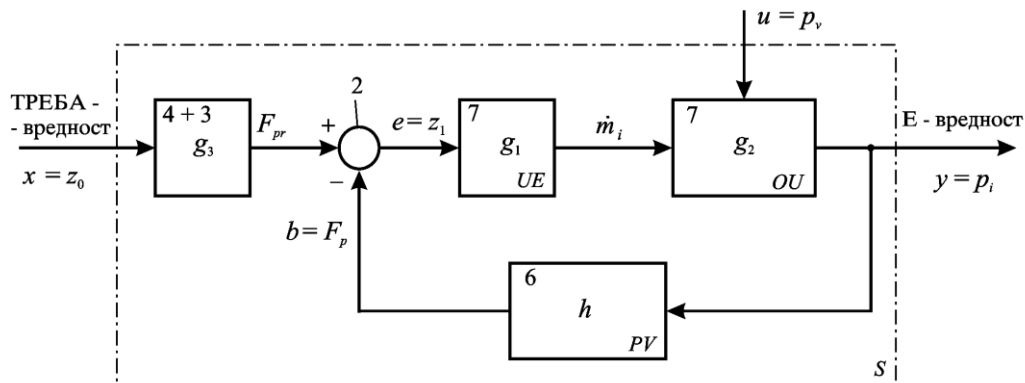
Во стационарен режим на работа, односно кога притисокот  $p_i$  ја има саканата вредност  $p_{i,0}$ , силата во пружината  $F_{pr}$  и притисната сила  $F_p$  се во рамнотежа:

$$F_{pr,0} = F_{p,0} \quad (1.18)$$

Ако дојде до зголемување на притисокот  $p_i$  над саканата вредност  $p_{i,0}$ , односно  $p_i > p_{i,0}$ , тогаш притисната сила  $F_p$  ќе биде поголема од силата во пружината  $F_{pr}$ , односно  $F_p > F_{pr}$ , и ќе дојде до дополнително затворање на наредниот елемент 7. Ова ќе предизвика намалување на масениот проток  $\dot{m}_i$  на флуидот низ вентилот, што ќе предизвика намалување на притисокот  $p_i$  во инсталацијата. Новата состојба ќе се задржи се додека притисокот  $p_i$  не се намали на референтната вредност  $p_{i,0}$ .

Ако дојде до намалување на притисокот  $p_i$  под саканата вредност  $p_{i,0}$ , односно  $p_i < p_{i,0}$ , истиот процес се повторува но во спротивна насока.

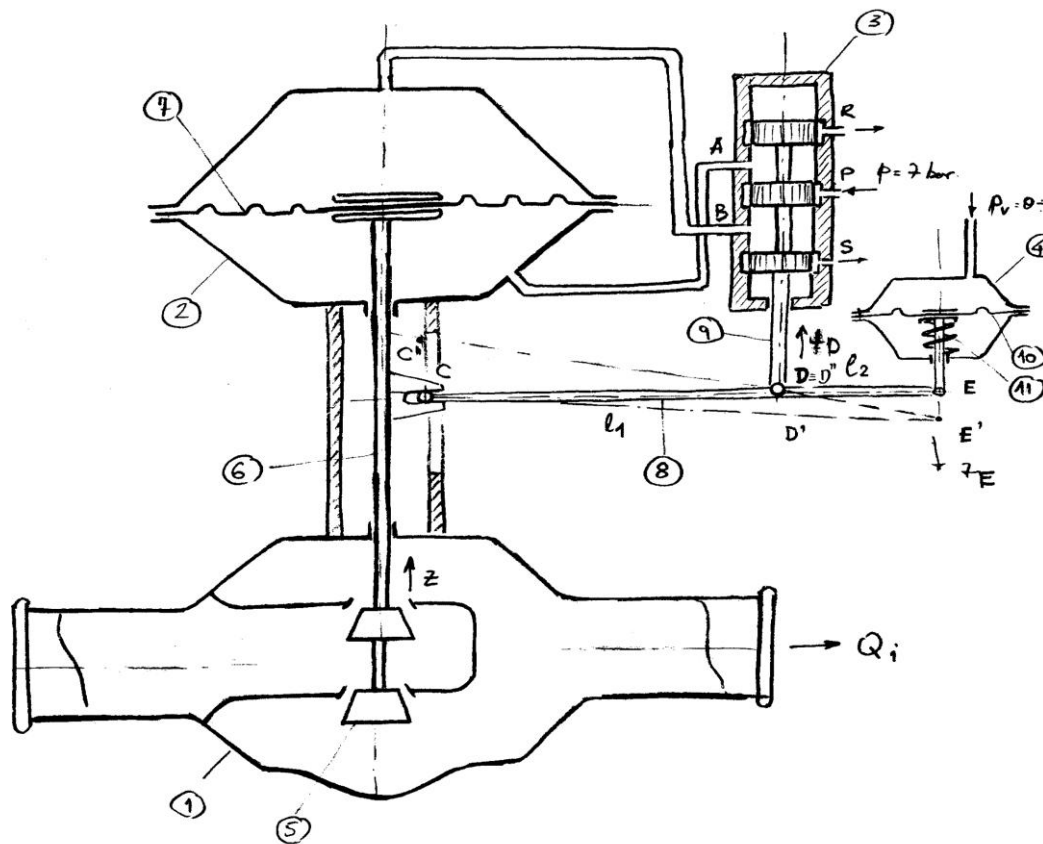
Врз основа на анализата на функцијата на пневматскиот регулатор на притисок и објаснувањето на основните големини во системот, лесно може да се нацрта блок-дијаграмот за овој управувачки систем, кој што е прикажан на слика 1.31.



Слика 1.31. Блок-дијаграм за пневматски регулатор на притисок

**Задача 1.17.** На слика 1.32 е прикажана скица на пневматски управуван вентил со пропорционално дејство. Тоа е компонента со која треба да се регулира протокот на флуидот што поминува низ вентилот 1 пропорционално на висината на притисокот  $p_v$  на воздухот кој се доведува во мембранскиот цилиндар 4. Во крајните позиции: кога притисокот  $p_v = 0 \text{ bar}$ , тогаш вентилот 1 е потполно затворен, а кога е притисокот  $p_v = 1 \text{ bar}$ , тогаш вентилот 1 е потполно отворен. За секоја друга вредност на притисокот  $p_v = (0 \div 1) \text{ bar}$ , заптивниот елемент 5 на вентилот 1 ќе се постави во некоја меѓупозиција, пропорционално на висината на притисокот  $p_v$ .

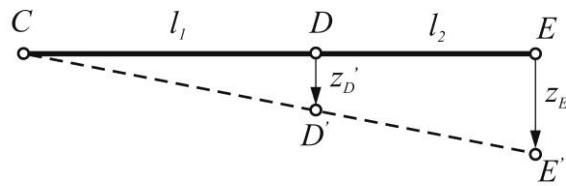
Да се нацрта блок-дијаграмот за пневматски управуваниот вентил со пропорционално дејство, да се означат сите елементи од системот, и да се идентификуваат влезот и излезот на системот.



Слика 1.32. Скица на пневматски управуван вентил со пропорционално дејство

**Решение:** Со помош на некој дополнителен уред, или директно од самиот технолошки процес, се генерира воздух под притисок во граници од  $p_v = (0 \div 1) \text{ bar}$  (надпритисок). Овој воздух под притисок се доведува на горната страна од мембранскиот цилиндар 4 (слика 1.32). Силата од притисокот, која што се создава на мембраната 10, се спротивставува на силата на пружината 11. Во стационарна состојба, при определен притисок  $p_v$ , позицијата на заптивниот елемент 5 е фиксирана, бидејќи и двата приклучока на коморите на мембранскиот цилиндар 2 се блокирани преку распоредникот 3.

Со наголемување на притисокот  $p_v$ , точката  $E$  од лостот 8 се поместува во позиција  $E'$ . Точка на ротација на лостот 8 е точката  $C$ , бидејќи во тој момент подигачот 6 и заптивниот елемент 5 се блокирани со мембранскиот цилиндар 2, како што е прикажано на слика 1.33.

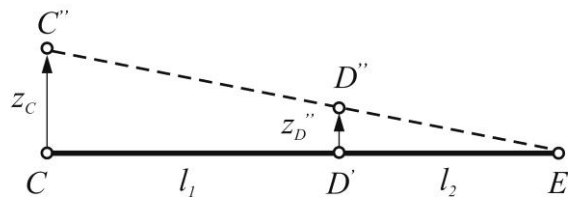


Слика 1.33. Скица на почетно поместување на лостот 8

Поместувањето на лостот 8 ќе предизвика поместување на клипчето 9 од распоредникот 3, према долу, за позиција  $z_D'$ , односно:

$$z_D' = \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot z_E \quad (1.19)$$

Со ова поместување на клипчето 9 се отвора каналот  $A$  и притисокот се доведува во долната комора од мембранскиот цилиндар 2, а со тоа подигачот 6 и заптивниот елемент 5 ќе се задвижат према горе за позиција  $z_D''$  (слика 1.34).



Слика 1.34. Скица на повратно поместување на лостот 8

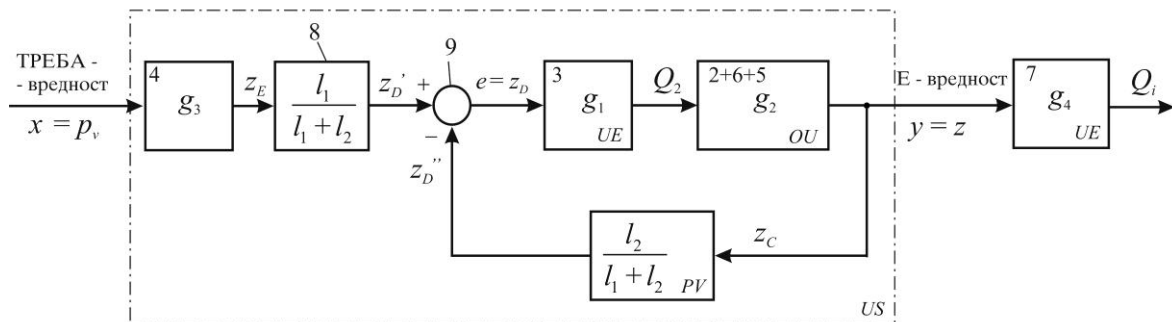
На сликите 1.33 и 1.34 поместувањата на лостот 8 се претставени со прави линии и во облик на триаголници, со цел да се упрости пресметката. Тоа е дозволено поради многу малите поместувања на лостот 8 и оваа апроксимација се покажала како доволно точна во практична примена. Имено, лостот 8, во пракса не се поместува скоковито, како што е тоа прикажано на сликите 1.33 и 1.34, туку неговото движење е квази континуирано, согласно објаснетата логика на движење.

Движењето на подигачот 6 и заптивниот елемент 5 ќе продолжи се додека поместувањето  $z_D''$  на клипчето 9 од распоредникот 3 не се изедначи со почетното

поместување  $z_D$ , односно додека не се блокираат каналите  $A$  и  $B$  од распоредникот 3. По завршувањето на ова движење, постигната е нова позиција на заптивниот елемент 5 во вентилот 1, која што кореспондира на висината на притисокот  $p_v$  во мембранскиот цилиндар 4.

Според тоа, со промена на надпритисокот  $p_v$  во граници  $p_v = (0 \div 1) \text{ bar}$ , може да се постигне било која позиција (пропорционално на висината на надпритисокот  $p_v$ ) на заптивниот елемент 5 во вентилот 1 од неговата крајно затворена до неговата крајно отворена позиција. На овој начин може да се контролира големината на проточната површина на вентилот 1, а со тоа ќе виде контролиран протокот  $Q_i$  на флуидот којшто протекува низ вентилот.

Врз основа на објаснувањето на начинот на функционирање на пневматски управуваниот вентил со пропорционално дејство (слика 1.32) и со анализата на основните големина и елементи може да се нацрта блок-дијаграмот за овој управувачки систем, кој што е прикажан на слика 1.35.



Слика 1.35. Блок-дијаграм за пневматски управуваниот вентил со пропорционално дејство

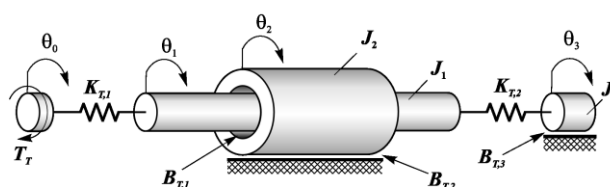
Според тоа, влезна големина за овој управувачки систем ќе биде висината на надпритисокот  $p_v$ , односно  $x \equiv p_v$ , а излезна големина ќе биде позицијата на заптивниот елемент 5, односно  $y \equiv z$ , со која што директно се контролира големината на протокот на флуидот низ вентилот 1 -  $Q_i$ .



---

## ВТОРА ГЛАВА

---



## 2. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ НА ФИЗИЧКИ СИСТЕМИ

Математичките модели на физичките системи, без оглед на тоа дали се работи за електрични, механички или системи од друга природа, се поставуваат користејќи ги основните закони на физиката.

Секој физички, односно управувачки систем може теоретски да биде опишан со математички равенки. Решението на овие равенки го претставува однесувањето на системот. Честопати, до решението на математичкиот модел се стигнува многу тешко, а понекогаш тоа не е можно. Во такви случаи е потребно да се направат одредени поедноставувања при математичкото опишување. За голем број на управувачки системи овие поедноставувања водат кон опис на системите со обични линеарни диференцијални равенки.

Во математичката и техничката литература детално е дадена техниката на решавање на овие равенки.

Поради тоа, во оваа книга ќе бидат разгледувани само физички системи кои можат да бидат опишани со математички модел составен од обични линеарни диференцијални равенки.



## 2.1. Механички системи

Механичките системи се составени од тела кои се движат под дејство на сили или моменти. Бројот на независно променливите, кој е потребен да се опише во целост движењето на секој дел од системот, го определува **степенот на слобода** на системот.

Во продолжение ќе биде применета методологија на определување на диференцијалните равенки, кои ги опишуваат механичките системи, а која се базира на аналогијата со електричните мрежи, што подразбира цртање на еквивалентна механичка шема.

Аналогните системи претставуваат различна физичка интерпретација на еден математички модел. Електрична аналогија на механички систем е електричен систем чии равенки се совпаѓаат по облик со равенките на механичкиот систем.

Постојат две електрични аналогии на механичките системи [ДЈ]:

- I. “ $i - f$ “ - електрична аналогија (струјата -  $i$  е аналогна на силата -  $f$ )
- II. “ $u - f$ “ - електрична аналогија (напонот -  $u$  е аналоген на силата -  $f$ )

Според видот на движењето на составните делови, механичките системи може да се поделат на:

- транслациони системи, кај кои сите составни делови се движат само праволиниски,
- ротациони системи, чии елементи само ротираат и
- комбинирани: транслационо-ротациони системи.

### 2.1.1. Транслациони механички системи

Постојат четири типа на елементи од кои се составени механичките транслациони системи.

1. **Маса**, со која се претставени инерцијалните особини на механичкиот систем. Масата -  $M$  ( $kg$ ) во еквивалентната механичка шема ќе биде прикажана со симболот даден на слика 2.1.а. Треба да се напомене дека позицијата на масата секогаш да биде дадена во апсолутна вредност.

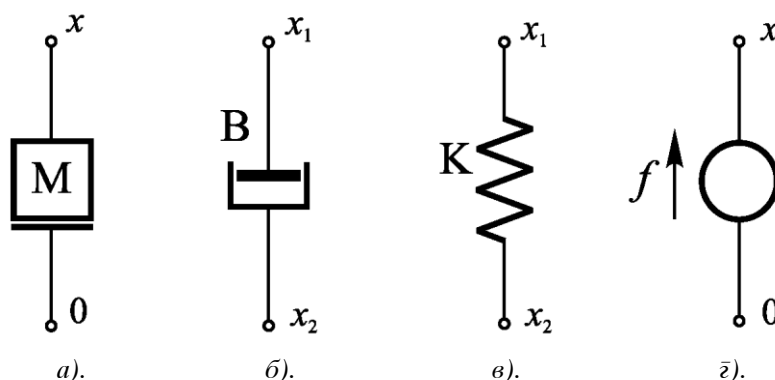
Поради тоа, едниот крај на симболот секогаш ќе биде поврзан со референтното ниво, односно референтната рамнина со позиција "0".

Инерцијалната сила -  $f_M$  (N) на масата се пресметува според Њутновиот закон и таа изнесува:

$$f_M = M \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = M \cdot \frac{dv}{dt} = M \cdot a \quad (2.01)$$

Каде што е:

- $x$  (m) - позиција на масата,
- $v$  (m/s) - брзина на масата,
- $a$  (m/s<sup>2</sup>) - забрзување на масата.



Слика 2.1. Симболи на елементите од еквивалентна механичка шема

- |             |                        |
|-------------|------------------------|
| а). Маса    | в). Механички отпорник |
| б). Пружина | г). Извор на сила      |

2. **Механички отпорник** (триење, пригушување) е идеален елемент, со кого во еквивалентната механичка шема се претставува неповратниот процес на претворање (дисипација) на кинетичката енергија во топлина. Карактеристичен параметар на механичкиот отпорник е коефициентот на триење -  $B$  (Ns/m).

Симболот на механичкиот отпорник, кој се користи во еквивалентните механички шеми, е прикажан на слика 2.1.б.

Силата на триење во механичкиот отпорник се пресметува според релативната брзина на краевите од овој елемент, односно:

$$f_B = B \cdot (v_1 - v_2) = B \cdot \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) \quad (2.02)$$

3. **Пружина** е идеален елемент, со кого во еквивалентната механичка шема се претставени еластичните особини на механичкиот систем. Карактеристичен параметар на пружината е коефициентот на крутост -  $K$  ( $N/m$ ).

Симболот за пружина во еквивалентните механички шеми е прикажан на слика 2.1.в.

Силата на пружината -  $f_K$  ( $N$ ) се пресметува според релативната позиција на двата краја од пружината, односно:

$$f_K = K(x_1 - x_2) \quad (2.03)$$

4. **Извор на сила** претставува активен елемент во еквивалентната механичка шема, односно идеален генератор на механичка енергија.

Опишаните елементи: маса, пружина и механички отпорник претставуваат пасивни елементи, бидејќи се во состојба да развиваат внатрешни сили, само, како реакција на дејството на надворешните сили. Енергијата, која се содржи во нив, овие елементи можат само меѓусебно да ја разменуваат или трошат. Уредите, кои внесуваат енергија од надвор во системот, претставуваат активни елементи или идеални механички извори.

Симболот на изворот на сила е прикажан на слика 2.1.г.

Едниот крај од симболот за извор на сила обавезно се поврзува со референтната рамнина.

Пред да се напишат диференцијалните равенки на зададениот механички систем, првиот чекор ќе биде цртање на еквивалентната механичка шема по аналогија на електричните мрежи. Оваа шема се изработува на тој начин што се поврзуваат краевите на оние елементи кои имаат иста позиција, односно поместување.

Потоа за секој јазол или позиција се пишуваат равенките за рамнотежа на силите според Даламберовиот принцип. Ова може да се воопшти во **прв закон на еквивалентните механички шеми**: *алгебарскиот збир на силиите, кои дејствуваат во еден јазол на еквивалентната механичка шема, е еднаков на нула.*

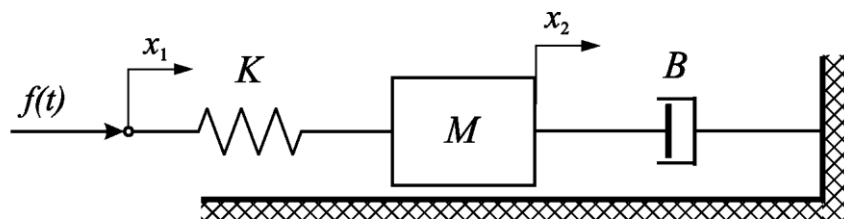
Силите, кои се во правец на позитивната насока на движење имаат предзнак “+”, а силите до спротивна насока имаат предзнак “-”.

Даламберовиот принцип, во овој облик, е сличен на I. Кирхофово правило за електричните кола.

На II. Кирхофов закон е сличен **вториот закон на еквивалентните механички шеми**, кој е од кинематска природа: *збиорот на релативните брзини по должина на една контура во еквивалентната механичка шема, е еднаков на нула.*

Кај посложените механички системи по истата постапка може да се конструираат еквивалентните механички шеми. Овие шеми се анализираат врз основа на двата закони за механичките шеми, на идентичен начин, како што се анализираат електричните кола врз основа на двата Кирхофови закони. Како што може, од Кирхофовите закони, за анализа на сложени електрични кола, да се изведат методите на контурни струи и потенцијали во јазлите, исто така, може врз основа на двата закони за еквивалентните механички шеми, за посложените механички системи, да се изведе **методата на контурни сили и методата на брзина во јазлите**. На овој начин, постапката за анализа на посложените механички системи се скратува и истовремено станува попрегледна.

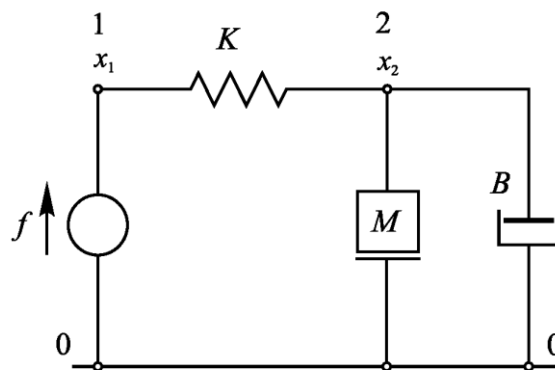
**Задача 2.1.** За механичкиот систем прикажан на слика 2.2. да се нацрта еквивалентната механичка шема и да се напише математичкиот модел на системот, ако промената на силата е влезна големина:  $f(t) \equiv x(t)$ , а промената на позицијата на масата е излезна големина:  $x_2(t) \equiv y(t)$ .



Слика 2.2. Скица на механички систем

**Решение:** Еквивалентната механичка шема за дадениот механички систем е прикажана на слика 2.3.

**НАПОМЕНА:** При цртањето на еквивалентната механичка шема едниот крај од симболот за извор на сила и симболот за маса секогаш трба да биде поврзан со референтното ниво "0". Краевите на симболите на другите елементи се поврзуваат со јазлите кои имаат иста позиција, или со референтното ниво, ако тој елемент е поврзан со референтната рамнина.



Слика 2.3. Еквивалентна механичка шема

Математичкиот модел со кој се опишува динамиката на дадениот транслационен механички систем се добива директно од еквивалентната механичка шема. Тој се состои од две диференцијални равенки, што зависи од степените на слобода на системот, односно за секој јазол посебно по една диференцијална равенка.

Притоа, силите со кои дејствуваат компонентите во разгледуваниот јазол, со промена на позицијата за истиот, се земаат со позитивен знак, а силите со кои дејствуваат компонентите, кои тој јазол го поврзуваат со соседните јазли, со промена на позицијата на соседните јазли, се земаат со негативен знак.

Од десната страна на равенката се внесуваат активните сили, кои дејствуваат во тој јазол, а ако такви нема тогаш се пишува 0.

Притоа е усвоено линеарниот оператор на диференцирање скратено да се означува на следниот начин:

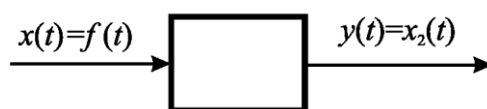
$$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \qquad D^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} \qquad (2.1)$$

Според тоа, диференцијалните равенки за овој систем ќе бидат:

$$\text{Јазол 1:} \quad Kx_1 - Kx_2 = f(t) \quad (2.2.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad (MD^2 + BD + K)x_2 - Kx_1 = 0 \quad (2.2.б)$$

Според терминологијата на управувачките системи овој систем треба да се анализира на тој начин што, влезна големина е  $x(t) \equiv f(t)$ , а излезна големина е  $y(t) \equiv x_2(t)$ , како што е прикажано на слика 2.4.



Слика 2.4. Блок-дијаграм на системот

Математичкиот модел во бараниот облик се добива од системот на диференцијални равенки (2.2).

Од равенка (2.2.a) следува:

$$x_1 = x_2 + \frac{1}{K} f(t) \quad (2.3)$$

Со замена на равенка (2.3) во равенката (2.2.б) и со нејзино средување се добива:

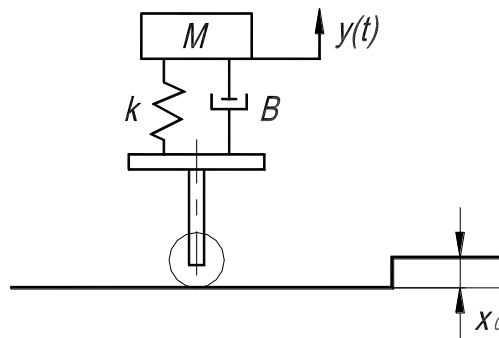
$$(MD^2 + BD)x_2 = f(t) \quad (2.4)$$

односно:

$$M \frac{d^2 x_2}{dt^2} + B \frac{dx_2}{dt} = f(t) \quad (2.5)$$

**Задача 2.2.** На слика 2.5 е прикажан упростен модел на едно возило. Возилото се движи долго време по рамен пат со константна брзина и во моментот  $t = 0$  наидува на нерамнина на патот.

Да се определи математичкиот модел на возилото со кој се опишува вертикалното поместување на возилото -  $y(t)$  во зависност од промената на профилот на патот -  $x(t)$ , ако е дадено:  $M = 1000 \text{ (kg)}$ ,  $B = 12 \cdot 10^3 \text{ (Ns/m)}$ ,  $K = 20 \cdot 10^3 \text{ (N/m)}$ .



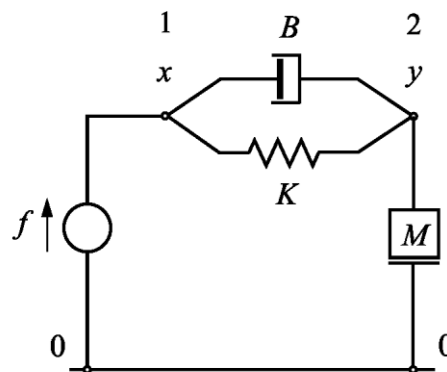
Слика 2.5. Упростен модел на возило

**Решение:** Најнапред се црта еквивалентната механичка шема за моделот на возилото, и таа е прикажана на слика 2.6.

Од еквивалентната механичка шема се пишува симултаниот систем од диференцијални равенки за секој од јазлите:

$$\text{Јазол 1:} \quad (BD + K)x - (BD + K)y = f(t) \quad (2.7.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad (MD^2 + BD + K)y - (BD + K)x = 0 \quad (2.7.б)$$



Слика 2.6. Еквивалентна механичка шема на возило

Од диференцијалната равенка (2.7.б) директно се добива бараниот облик на математичкиот модел на возилото:

$$(MD^2 + BD + K)y = (BD + K)x \quad (2.8)$$

Најчест облик на математичките модели на физичките системи е кога членот со најголемиот извод на независно променливата големина (излезот од системот) е со коефициент 1. Според тоа, равенката (2.8) се дели со  $M$ , од каде се добива:

$$\left(D^2 + \frac{B}{M}D + \frac{K}{M}\right)y = \left(\frac{B}{M}D + \frac{K}{M}\right)x \quad (2.9)$$

Ако се заменат зададените вредности за параметрите на системот конечно се добива математичкиот модел, кој што го опишува вертикалното движење на возилото -  $y(t)$  во зависност од нерамнините на патот -  $x(t)$ :

$$(D^2 + 12D + 20)y = (12D + 20)x \quad (2.10)$$

односно:

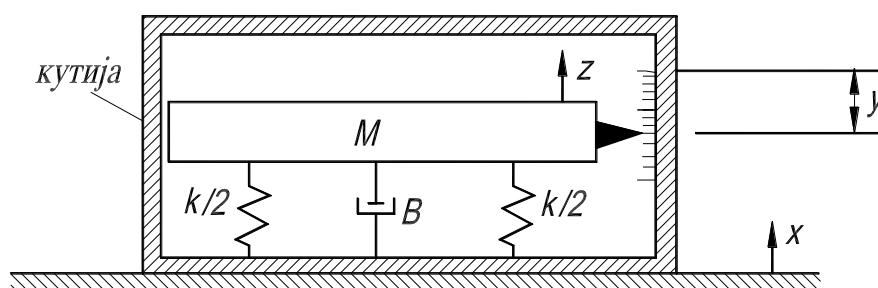
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 20y = 12\frac{dx}{dt} + 20x \quad (2.11)$$

**Задача 2.3.** На слика 2.7 е прикажана упростена скица на сеизмограф со кој се мери радијалното поместување на тлото при земјотрес.

Поместувањето се прикажува со релативната променлива:

$$y(t) = x(t) - z(t) \quad (2.12)$$

Да се нацрта еквивалентната механичка шема ако масата на кутијата се занемари ( $M_0 = 0$ ) и да се определи математичкиот модел на системот ако е  $x(t)$  – влез, а  $y(t)$  – излез за дадениот механички систем.



Слика 2.7. Скица на сеизмограф

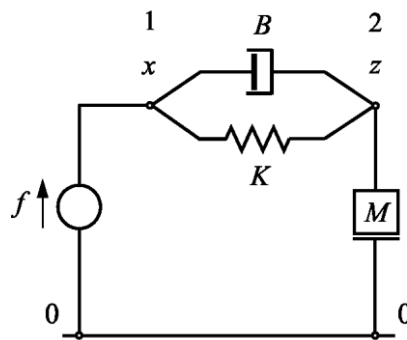
Поместувањето се прикажува со релативната променлива:

$$y(t) = x(t) - z(t) \quad (2.12)$$



Да се нацрта еквивалентната механичка шема ако масата на кутијата се занемари ( $M_0 = 0$ ) и да се определи математичкиот модел на системот ако е  $x(t)$  – влез, а  $y(t)$  – е излез за дадениот механички систем.

**Решение:** Еквивалентната механичка шема за сеизмографоте прикажана на слика 2.8.



Слика 2.8. Еквивалентна механичка шема за сеизмограф

Се пишуваат диференцијалните равенки за секој од јазлите:

$$\text{Јазол 1:} \quad (BD + k)x - (BD + k)z = f \quad (2.13.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad (MD^2 + BD + k)z - (BD + k)x = 0 \quad (2.13.б)$$

Од изразот за релативното поместување (2.12) следи:

$$z(t) = x(t) - y(t) \quad (2.14)$$

Ако равенка (2.14) се замени во равенка (2.13.б) и со нејзино средување се добива:

$$(MD^2 + BD + K)y = MD^2x \quad (2.15)$$

Равенката (2.15) се дели со вредноста на масата  $M$  за да се добие во облик:

$$\left( D^2 + \frac{B}{M}D + \frac{K}{M} \right) y = D^2x \quad (2.16)$$

односно:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{B}{M} \frac{dy}{dt} + \frac{K}{M} y = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.17)$$

Равенката (2.17) може да се напише во општ облик:

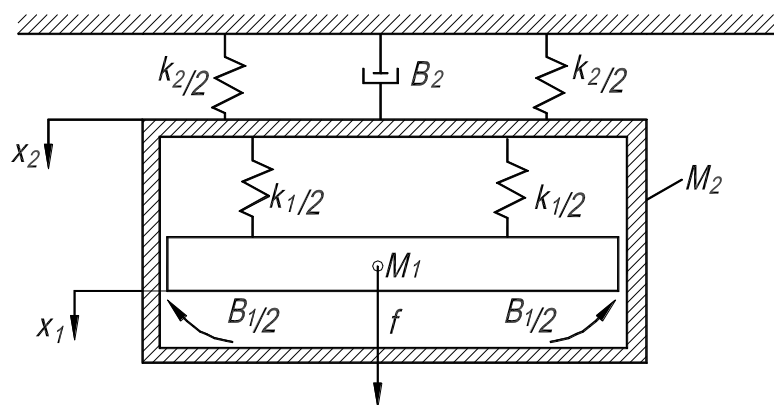
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.18)$$

Каде што се:  $a_1 = \frac{B}{M}$ ;  $a_0 = \frac{K}{M}$

коефициенти на математичкиот модел.

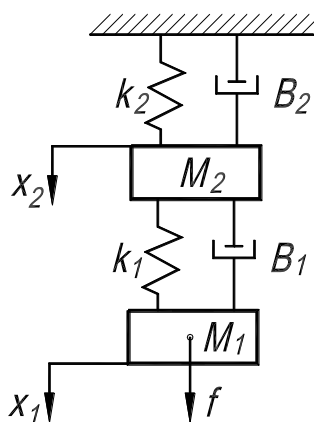
**Задача 2.4.** На слика 2.9 е прикажан механички систем составен од два елемента со маси  $M_1$  и  $M_2$ . Елементот со маса  $M_2$  осцилира под дејство на надворешно променливо оптоварување кое се доведува на елементот со маса  $M_1$ .

- Да се нацрта еквивалентната механичка шема.
- Да се определи математичкиот модел за системот ако влез за дадениот систем претставува силата:  $f(t) \equiv x(t)$ , а излез е позицијата на елементот со маса  $M_2$ :  $x_2(t) \equiv y(t)$ .



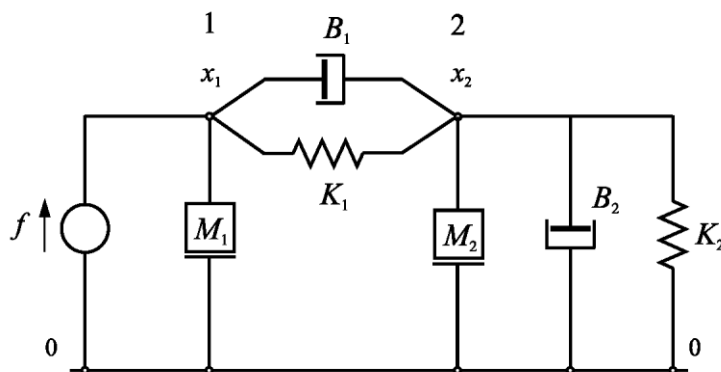
Слика 2.9: Скица на транслационен механички систем

**Решение:** а). Системот може поедноставено да се претстави како што е прикажано на слика 2.10.



Слика 2.10. Поедноставена скица на механичкиот систем

Врз основа на слика 2.10 се црта еквивалентната механичка шема на системот (слика 2.11).



Слика 2.11. Еквивалентна механичка шема за механичкиот систем

б). Математичкиот модел кој го опишува дадениот систем ќе биде презентираан со системот од диференцијални равенки:

$$\text{Јазол 1: } (M_1 D^2 + B_1 D + K_1)x_1 - (B_1 D + K_1)x_2 = f(t) \quad (2.19.a)$$

$$\text{Јазол 2: } (M_2 D^2 + B_1 D + B_2 D + K_1 + K_2)x_2 - (B_1 D + K_1)x_1 = 0 \quad (2.19.b)$$

Од системот на диференцијални равенки (2.19) се добива бараниот облик на математичкиот модел на механичкиот систем, кога е влез  $f(t) \equiv x(t)$ , а излез е  $x_2(t) \equiv y(t)$ , како што е прикажано на слика 2.12.



Слика 2.12. Блок-дијаграм на механичкиот систем

Од равенка на системот (2.19.б) следи:

$$x_1 = \frac{M_2 D^2 + (B_1 + B_2)D + (K_1 + K_2)}{B_1 D + K_1} x_2 \quad (2.20)$$

Со замена на равенка (2.20) во равенка (2.19.а) и со нејзино средување се добива:

$$\begin{aligned} & [M_1 M_2 D^4 + (M_1 B_1 + M_1 B_2 + M_2 B_1) D^3 + (M_1 K_1 + M_1 K_2 + M_2 K_1 + B_1 B_2) D^2 + \\ & + (B_1 K_2 + B_2 K_1) D + K_1 K_2] x_2 = (B_1 D + K_1) f \end{aligned} \quad (2.21)$$

Со делење на равенка (2.21) со коефициентот  $M_1 M_2$  се добива конечниот облик на бараниот математички модел:

$$(D^4 + a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) x_2 = (b_1 D + b_0) f \quad (2.22)$$

односно:

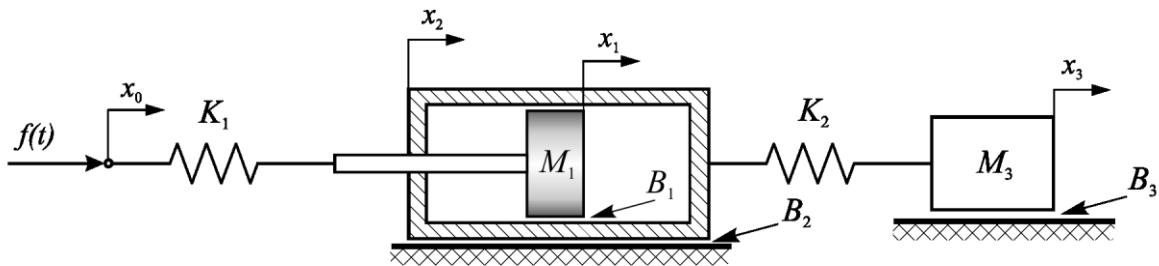
$$\frac{d^4 x_2}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 x_2}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_0 x_2 = b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f \quad (2.23)$$

Каде што се:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{M_1 B_1 + M_1 B_2 + M_2 B_1}{M_1 M_2} \\ a_2 &= \frac{M_1 K_1 + M_1 K_2 + M_2 K_1 + B_1 B_2}{M_1 M_2} \\ a_1 &= \frac{B_1 K_2 + B_2 K_1}{M_1 M_2} \\ a_0 &= \frac{K_1 K_2}{M_1 M_2} \\ b_1 &= \frac{B_1}{M_1 M_2}; \quad b_0 = \frac{K_1}{M_1 M_2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

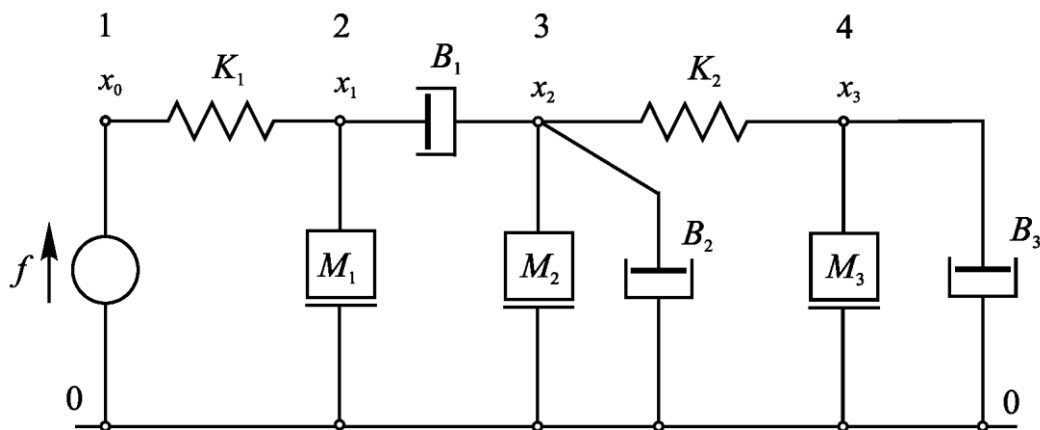
коефициенти за дадениот математички модел.

**Задача 2.5.** Да се определи математичкиот модел за транслациониот механички систем прикажан на слика 2.13.



Слика 2.13. Скица на механички систем

**Решение:** Еквивалентната механичка шема за дадениот механизам е прикажана на слика 2.14:



Слика 2.14. Еквивалентна механичка шема

Математичкиот модел со кој се опишува динамиката на дадениот механички систем се добива директно од еквивалентната механичка шема со пишување на равенките за секој јазол посебно:

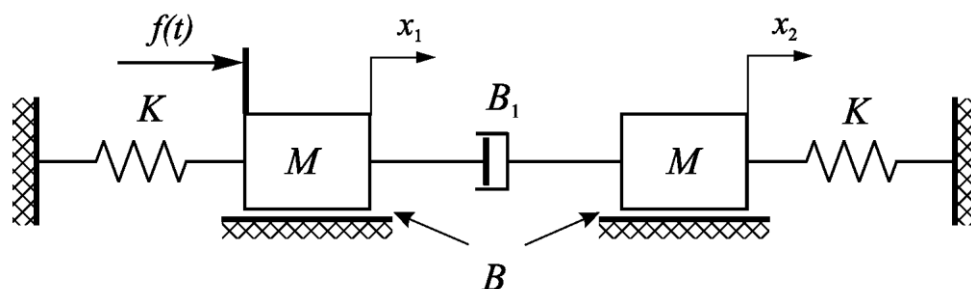
$$\text{Јазол 1:} \quad K_1 x_0 - K_1 x_1 = f \quad (2.25.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad (M_1 D^2 + B_1 D + K_1) x_1 - K_1 x_0 - B_1 D x_2 = 0 \quad (2.25.б)$$

$$\text{Јазол 3:} \quad [M_2 D^2 + (B_1 + B_2) D + K_2] x_2 - B_1 D x_1 - K_2 x_3 = 0 \quad (2.25.в)$$

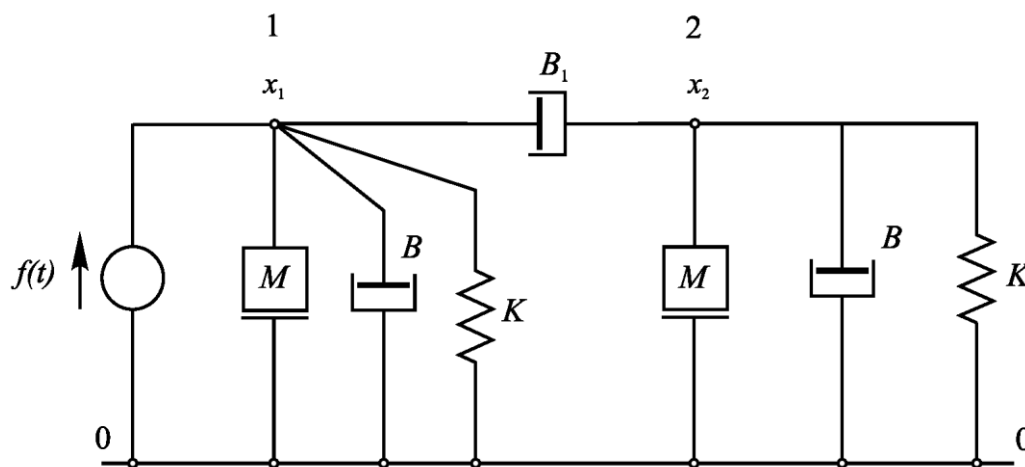
$$\text{Јазол 4:} \quad (M_3 D^2 + B_3 D + K_2) x_3 - K_2 x_2 = 0 \quad (2.25.г)$$

**Задача 2.6.** За прикажаниот механизам (слика 2.15) да се определи математичкиот модел на системот за влез:  $x(t) \equiv f(t)$  и излез:  $y(t) \equiv x_2(t)$ , ако е  $B_1 = 3B$ .



Слика 2.15. Скица на транслационен механички систем

**Решение:** Еквивалентната механичка шема за дадениот механизам ќе биде (слика 2.16):



Слика 2.16. Еквивалентна механичка шема на механизмот

Системот од симултани диференцијални равенки со кој се опишува дадениот механички систем е:

$$\text{Јазол 1:} \quad [MD^2 + (B_1 + B)D + K]x_1 - B_1Dx_2 = f(t) \quad (2.26.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad [MD^2 + (B_1 + B)D + K]x_2 - B_1Dx_1 = 0 \quad (2.26.б)$$

Од равенка (2.26.б) следи:

$$x_1 = \frac{MD^2 + 4BD + K}{3BD} x_2 \quad (2.27)$$

Со замена на равенка (2.27) во равенка (2.26.а) и со нејзино средување се добива:

$$(MD^2 + 4BD + K)^2 x_2 - 9B^2 D^2 x_2 = 3BDf \quad (2.28)$$

Ако равенката (2.28) се подели со  $M^2$  се добива бараниот облик на математичкиот модел на системот:

$$(D^4 + a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) x_2 = b_1 Df \quad (2.29)$$

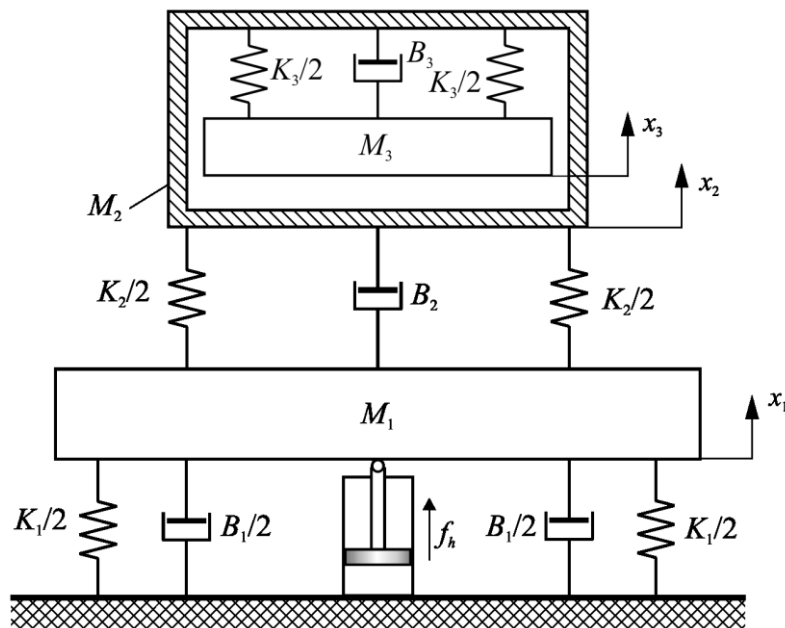
односно:

$$\frac{d^4 x_2}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 x_2}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + a_1 \frac{dx_2}{dt} + a_0 x_2 = b_1 \frac{df}{dt} \quad (2.30)$$

Каде што се:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{8B}{M}; & a_2 &= \frac{2MK + 7B^2}{M^2}; & a_1 &= \frac{8BK}{M^2}; \\ a_0 &= \frac{K^2}{M^2}; & b_1 &= \frac{3B}{M^2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

**Задача 2.7.** На слика 2.17 е прикажана скица на транслационен механички систем.

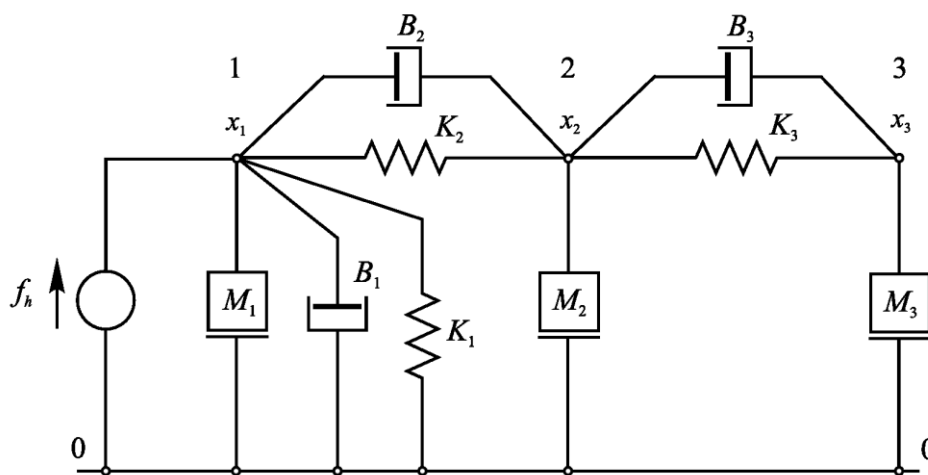


Слика 2.17. Скица на транслационен механички систем

Силата од хидрауличниот цилиндар  $f_h(t)$  ја задвижува плочата со маса  $M_1$ .

Да се определи математичкиот модел со кој се опишува динамиката на дадениот механички систем.

**Решение:** Најпрво се црта еквивалентната механичка шема за дадениот механички систем (слика 2.18).



Слика 2.18. Еквивалентна механичка шема за механичкиот систем

Системот од симултани диференцијални равенки со кој се опишува движењето на дадениот механички систем ќе биде:

$$\text{Јазол 1: } [M_1 D^2 + (B_1 + B_2)D + (K_1 + K_2)]x_1 - (B_2 D + K_2)x_2 = f_h(t) \quad (2.32.a)$$

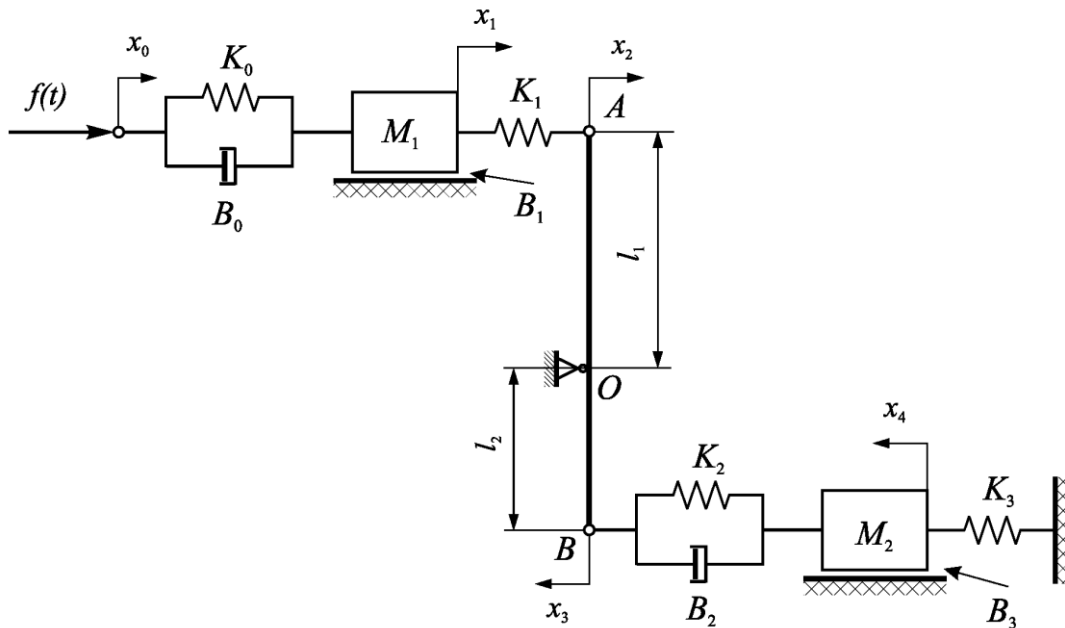
$$\text{Јазол 2: } [M_2 D^2 + (B_2 + B_3)D + (K_2 + K_3)]x_2 - (B_2 D + K_2)x_1 - (B_3 D + K_3)x_3 = 0 \quad (2.32.б)$$

$$\text{Јазол 3: } (M_3 D^2 + B_3 D + K_3)x_3 - (B_3 D + K_3)x_2 = 0 \quad (2.32.в)$$

**Задача 2.8.** На слика 2.19 е прикажана скица на транслационен механички систем.

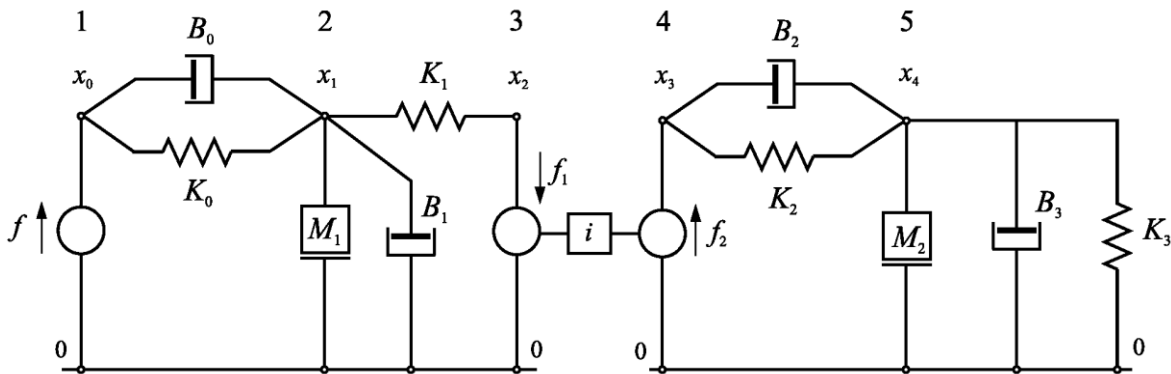
- Да се нацрта еквивалентната механичка шема на системот.
- Да се определи математичкиот модел на системот.





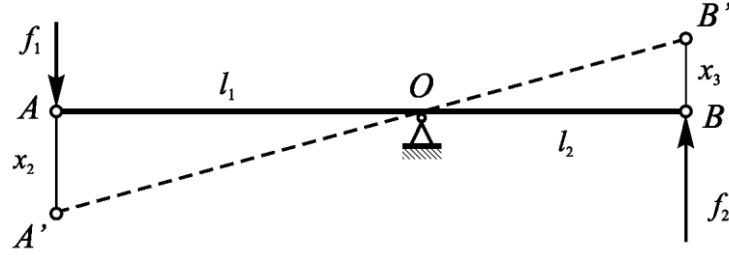
Слика 2.19. Скица на механички систем

**Решение:** а). Еквивалентната механичка шема за дадениот механички систем е прикажана на слика 2.20.



Слика 2.20. Еквивалентна механичка шема за механичкиот систем

Карактеристично за овој механички систем е постоењето на лостот  $AOB$ . Тој се прикажува во еквивалентната механичка шема на тој начин што првиот дел од механичкиот систем оддава сила  $f_1$  (пасивна сила) во точката  $A$ . Силата  $f_1(t)$  се трансформира, по правилото на лост, во сила  $f_2(t)$ , која претставува извор на сила (активна сила) за вториот дел од механичкиот систем.



Слика 2.21. Однос на силите и позициите на лостот

Од условот за рамнотежа на моментите на лостот  $AOB$  (слика 2.21) силите  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  се поврзани со релацијата:

$$f_1 \cdot l_1 = f_2 \cdot l_2 \quad (2.33)$$

односно: 
$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{l_2}{l_1} = i; \quad f_1 = i \cdot f_2 \quad (2.34)$$

Од условот за сличност на триаголниците  $AOA'$  и  $BOB'$  на слика 2.21 (за мали поместувања) следи:

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{i} \quad (2.35)$$

односно: 
$$x_3 = i \cdot x_2 \quad (2.36)$$

Според тоа, математичкиот модел со кој се опишува динамиката на овој механички систем ќе биде:

Јазол 1: 
$$(B_0 D + K_0)x_0 - (B_0 D + K_0)x_1 = f(t) \quad (2.37.a)$$

Јазол 2: 
$$[M_1 D^2 + (B_0 + B_1)D + (K_0 + K_1)]x_1 - (B_0 D + K_0)x_0 - K_1 x_2 = 0 \quad (2.37.б)$$

Јазол 3: 
$$K_1 x_2 - K_1 x_1 = -f_1(t) \quad (2.37.в)$$

Јазол 4: 
$$(B_2 D + K_2)x_3 - (B_2 D + K_2)x_4 = f_2(t) \quad (2.37.г)$$

Јазол 5: 
$$[M_2 D^2 + (B_2 + B_3)D + (K_2 + K_3)]x_4 - (B_2 D + K_2)x_3 = 0 \quad (2.37.д)$$

$$f_1 = i \cdot f_2 \quad (2.37.е)$$

$$x_3 = i \cdot x_2 \quad (2.37.ж)$$

### 2.1.2. Ротациони механички системи

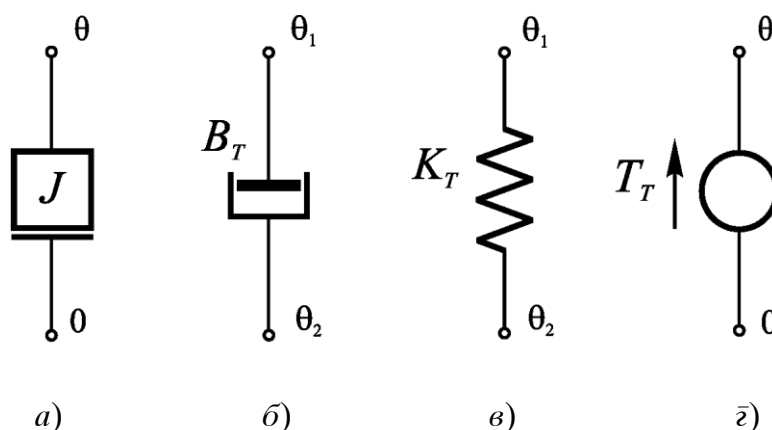
Ротационите механички системи, исто така, содржат четири основни типови на елементи, како кај транслационите механички системи. Притоа може да се воведат комплетна аналогија со транслационите механички системи, како во начинот на составување на еквивалентната механичка шема, така и во начинот на определување на математичкиот модел на системот, односно системот од диференцијални равенки.

Во табела 2.1. е презентирана аналогијата на големините и параметрите помеѓу транслационите и ротационите механички системи.

Табела 2.1. Аналогија помеѓу транслационите и ротационите механички системи

Транслациони механички системи			Ротациони механички системи		
Ознака	Назив	Димензија	Ознака	Назив	Димензија
$M$	Маса	$kg$	$J$	Момент на инерција	$kgm^2/rad$
$B$	Коефициент на триење	$Ns/m$	$B_T$	Коефициент на ротацио триење	$Nms/rad$
$K$	Коефициент на крутост	$N/m$	$K_T$	Коефициент на торзiona крутост	$Nm/rad$
$x$	Позиција	$m$	$\theta$	Аголна позиција	$rad$
$v$	Брзина	$m/s$	$\omega$	Аголна брзина	$rad/s$
$a$	Забрзување	$m/s^2$	$\dot{\omega}$	Аголно забрзување	$rad/s^2$
$f$	Сила	$N$	$T_T$	Торзионен момент	$Nm$

На слика 2.21 се прикажани симболите на елементите, кои се користат за ротационите механички системи, во еквивалентните механички шеми.



Слика 2.21. Симболи на елементите од еквивалентна механичка шема  
 а). Момент на инерција            в). Ротационен механички отпорник  
 б). Торзиона пружина            г). Извор на вртежен момент

Аналогно на транслационите механички системи (глава 2.1.1.) торзионите (вртежните) моменти на поедините компоненти се пресметуваат на следниот начин:

1. Инерцијален торзионен момент -  $T_J$  ( $Nm$ ) на тело со момент на инерција -  $J$  (слика 2.21.а):

$$T_J = J \frac{d^2\theta}{dt^2} = J \frac{d\omega}{dt} = J\dot{\omega} \quad (2.38)$$

2. Моментот на триење во ротациониот механички отпорник се пресметува според релативната аголна брзина на краевите од овој елемент (слика 2.21.б):

$$T_B = B_T \left( \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} \right) = B_T (\omega_1 - \omega_2) \quad (2.39)$$

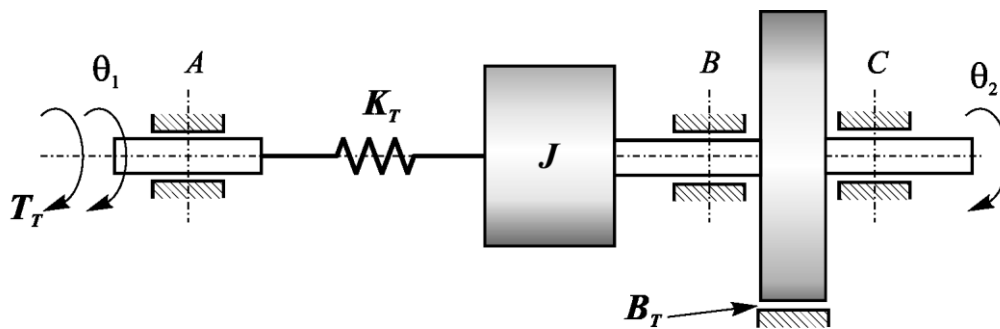
3. Моментот од торзионата пружина -  $T_K$  ( $Nm$ ) се пресметува според релативната аголна позиција на двата краја од пружината (слика 2.21.в):

$$T_K = K_T (\theta_1 - \theta_2) \quad (2.40)$$

Другите дополнителни објаснувања за примената на методата со еквивалентна механичка шема, кои беа дадени за транслационите механички системи, аналогно важат и за ротационите механички системи.

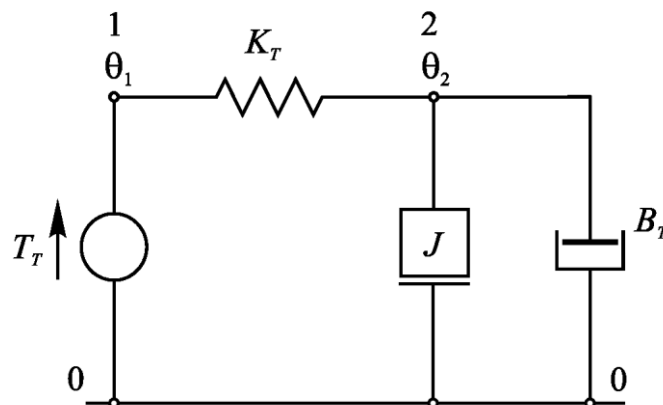
**Задача 2.9.** Дадениот ротационен механички систем (слика 2.22.) е дел од еден систем на автоматско управување и служи да ги пренесе вртежите од точката  $A$  до точката  $C$ , преку еластична врска со коефициент на торзиона крутост  $K_T$ . Моментот на инерција е  $J$ , а коефициентот на триење е  $B_T$ . Триењето помеѓу вратилото и лежиштата да се занемари.

Да се определи математичкиот модел на овој систем ако е влез: аголната позиција  $-\theta_1(t)$ , а излез: аголната позиција  $-\theta_2(t)$ .



Слика 2.22. Скица на ротационен механички систем

**Решение:** Еквивалентната механичка шема за дадениот систем е (сл. 2.23):



Слика 2.23. Еквивалентна механичка шема на системот

Системот од равенки со кој се опишува дадениот механички систем ќе биде:

$$\text{Јазол 1:} \quad K_T \theta_1 - K_T \theta_2 = T_T \quad (2.40.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad (JD^2 + B_T D + K_T) \theta_2 - K_T \theta_1 = 0 \quad (2.40.б)$$

Бараниот облик на математичкиот модел директно се добива од равенка (2.40.б):

$$(JD^2 + B_T D + K_T) \theta_2 = K_T \theta_1 \quad (2.41)$$

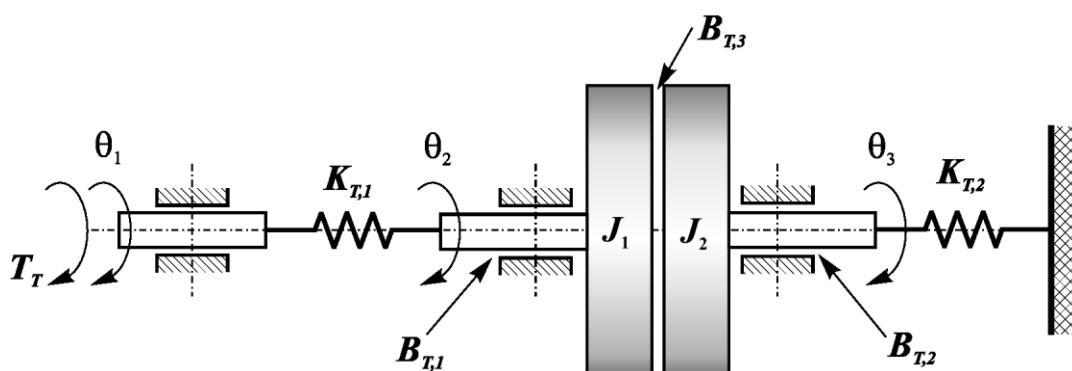
Ако равенката (2.41) се подели со  $J$  се добива:

$$\left( D^2 + \frac{B_T}{J} D + \frac{K_T}{J} \right) \theta_2 = \frac{K_T}{J} \theta_1 \quad (2.42)$$

односно:

$$\frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + \frac{B_T}{J} \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{K_T}{J} \theta_2 = \frac{K_T}{J} \theta_1 \quad (2.43)$$

**Задача 2.10.** На слика 2.24 е претставен упростен модел на фрикциона кочница. Таа се состои од два диска кои се тријат помеѓу себе. Едниот диск е поврзан со неподвижната (референтната) рамнина. Другиот диск е поврзан со погонската машина, чии вртежен момент треба да се мери. При тоа е земена предвид еластичноста на врските и триењето во лежиштата на дисковите.



Слика 2.24. Упростена скица на фрикциона кочница

- Да се нацрта еквивалентната механичка шема на системот.
- Да се определи математичкиот модел на системот ако е  $T_T(t)$  - влез, а  $\theta_3(t)$  - излез.

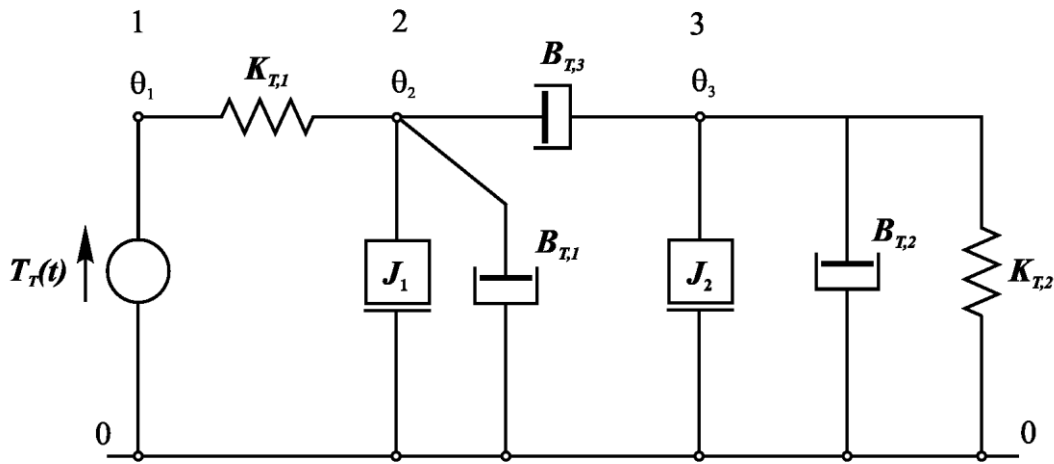
**Решение:** а). Еквивалентната механичка шема за механизмот на фриксиона кочница е прикажан на слика 2.25.

б). Најпрво се поставуваат равенките во јазлите:

$$\text{Јазол 1: } K_{T,1}\theta_1 - K_{T,1}\theta_2 = T_T(t) \quad (2.44.a)$$

$$\text{Јазол 2: } [J_1 D^2 + (B_{T,1} + B_{T,3})D + K_{T,1}]\theta_2 - K_{T,1}\theta_1 - B_{T,3}D\theta_3 = 0 \quad (2.44.б)$$

$$\text{Јазол 3: } [J_2 D^2 + (B_{T,2} + B_{T,3})D + K_{T,2}]\theta_3 - B_{T,3}D\theta_2 = 0 \quad (2.44.в)$$



Слика 2.25. Еквивалентна механичка шема на фриксиона кочница

Со средување на системот од равенки (2.44) се добива бараната форма на математичкиот модел на системот:

$$\left[ \frac{J_1 J_2}{B_{T,3}} D^3 + \frac{J_1 (B_{T,2} + B_{T,3}) + J_2 (B_{T,1} + B_{T,3})}{B_{T,3}} D^2 + \frac{J_1 K_{T,2} + B_{T,1} B_{T,2} + B_{T,2} B_{T,3} + B_{T,1} B_{T,3}}{B_{T,3}} D + \frac{(B_{T,1} + B_{T,2}) K_{T,2}}{B_{T,3}} \right] \theta_3 = T_T(t) \quad (2.45)$$

Ако се подели равенката (2.45) со изразот  $\frac{J_1 J_2}{B_{T,3}}$ , конечно се добива:

$$(D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) \theta_3 = b_0 T_T(t) \quad (2.46)$$

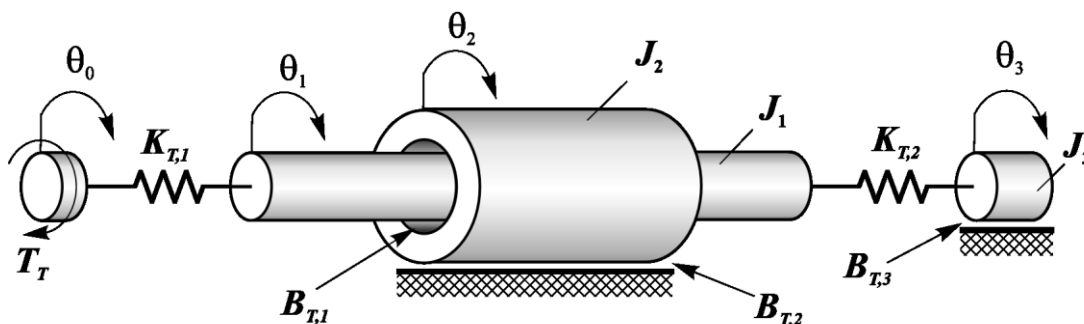
односно:

$$\frac{d^3 \theta_3}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_3}{dt} + a_0 \theta_3 = b_0 T_T(t) \quad (2.47)$$

Каде што, коефициентите на системот се:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{J_1(B_{T,2} + B_{T,3}) + J_2(B_{T,1} + B_{T,3})}{J_1 J_2} \\
 a_1 &= \frac{J_1 K_{T,2} + B_{T,1} B_{T,2} + B_{T,2} B_{T,3} + B_{T,1} B_{T,3}}{J_1 J_2} \\
 a_0 &= \frac{(B_{T,1} + B_{T,2}) K_{T,2}}{J_1 J_2}; \quad b_0 = \frac{B_{T,3}}{J_1 J_2}
 \end{aligned}
 \tag{2.48}$$

**Задача 2.11.** На слика 2.26 е претставен цилиндар со момент на инерција  $J_1$ , кој се врти во шуплив цилиндар со момент на инерција  $J_2$ . Вискозното триење помеѓу цилиндриците е  $B_{T,1}$ , а масата, односно моментот на инерција  $J_3$  да се занемари ( $J_3 = 0$ ).

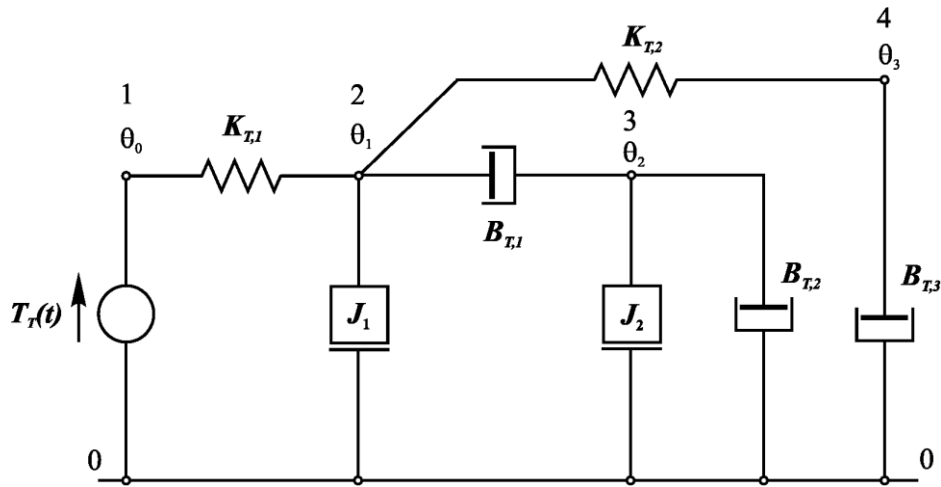


Слика 2.26. Скица на ротационен механички систем

- Да се скицира еквивалентната механичка шема.
- Да се определат равенките кои го сочинуваат математичкиот модел на системот.

**Решение:** а). Еквивалентната механичка шема за дадениот ротационен механички систем е (слика 2.27):





Слика 2.27. Еквивалентна механичка шема на системот

б). Се определуваат равенките за поедините јазли од еквивалентната механичка шема:

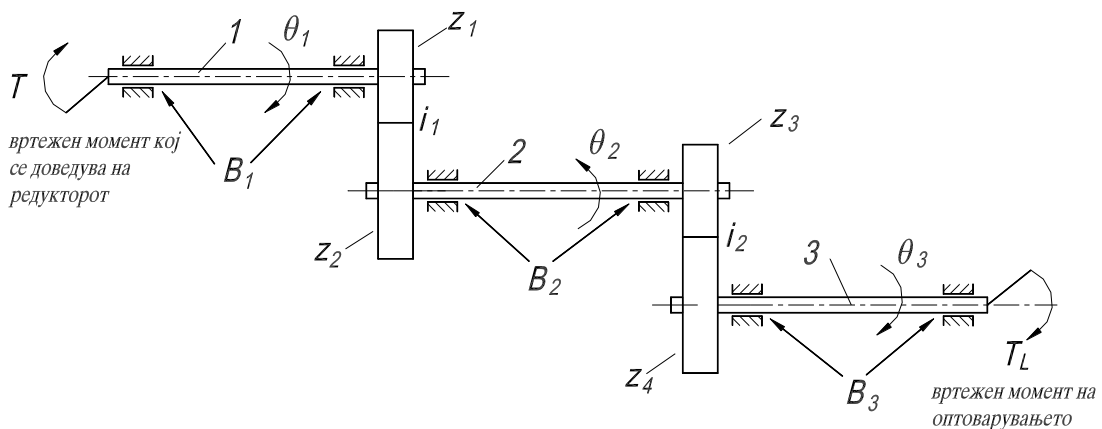
$$\text{Јазол 1: } K_{T,1}\theta_0 - K_{T,1}\theta_1 = T_T \quad (2.49.a)$$

$$\text{Јазол 2: } (J_1 D^2 + B_{T,1} D + K_{T,1} + K_{T,2})\theta_1 - K_{T,1}\theta_0 - B_{T,1} D\theta_2 - K_{T,2}\theta_3 = 0 \quad (2.49.б)$$

$$\text{Јазол 3: } [J_2 D^2 + (B_{T,1} + B_{T,2})D]\theta_2 - B_{T,1} D\theta_1 = 0 \quad (2.49.в)$$

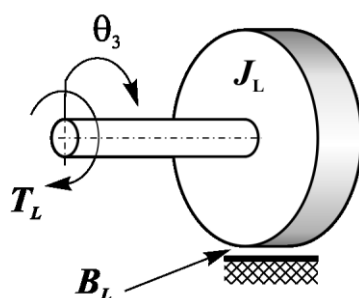
$$\text{Јазол 4: } (B_{T,3} D + K_{T,2})\theta_3 - K_{T,2}\theta_1 = 0 \quad (2.49.г)$$

**Задача 2.12.** На слика 2.28 е прикажан двостепен редуктор изведен со цилиндрични запченици со прави запци.



Слика 2.28. Скица на двостепен редуктор

Редукторот е круто поврзан со машина, која се состои од ротирачка маса со момент на инерција  $J_L$ , а вкупниот коефициент на триење во машината изнесува  $B_L$ , како што е прикажано на слика 2.29.



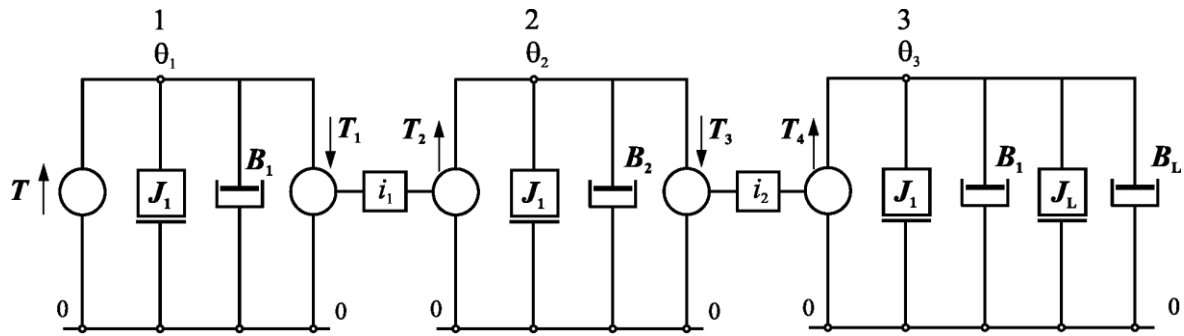
Слика 2.29. Скица на оптоварувањето на редукторот

Да се определи математичкиот модел на дадениот редуктор ако влез е вртежниот момент -  $T(t)$ , а излез е аголната позицијата на вратилото (3) -  $\theta_3(t)$ . При тоа да се занемари еластичноста на вратилата и триењето помеѓу запчениците и маслото за подмачкување, кое што се наоѓа во куќиштето на редукторот, а да се земе предвид триењето во лежиштата, како што е означено на слика 2.28.

Воведените ознаки означиваат:

- $z_i$  – Број на запци на запчениците,
- $\omega_i = D\theta_i$  – Аголна брзина на вратилата,
- $i = i_1 \cdot i_2$  – Преносен однос на редукторот,
- $\theta_i$  – Аголна позиција,
- $B_i$  – Коефициент на триење во лежиштата.

**Решение:** Еквивалентната механичка мрежа за редукторот, заедно со оптоварувањето, прикажана е на слика 2.30.



Слика 2.30. Еквивалентна механичка шема на редукторот

Од еквивалентната шема се пишуваат равенките за поедините јазли:

$$\text{Јазол 1:} \quad J_1 D^2 \theta_1 + B_1 D \theta_1 + T_1 = T \quad (2.50.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad J_2 D^2 \theta_2 + B_2 D \theta_2 + T_3 = T_2 \quad (2.50.б)$$

$$\text{Јазол 3:} \quad (J_3 + J_L) D^2 \theta_3 + (B_3 + B_L) D \theta_3 = T_4 \quad (2.50.в)$$

Преносните односи на запчестите парови може да се изразат во облик:

$$i_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad (2.51.a)$$

$$i_2 = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\theta_2}{\theta_3} = \frac{z_4}{z_3} \quad (2.51.б)$$

Од условот за пренос на моќност, следува:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2 \omega_2}{T_1 \omega_1} = \frac{T_2}{i_1 T_1} = \eta_1 \approx 1 - 6\mu \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} \quad (2.52.a)$$

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{T_4 \omega_3}{T_3 \omega_2} = \frac{T_4}{i_2 T_3} = \eta_2 \approx 1 - 6\mu \frac{z_3 + z_4}{z_3 z_4} \quad (2.52.б)$$

Каде што е:

$\eta_i$  - степен на полезно дејство на запчестиот пар,

$\mu = (0,006 \div 0,12)$  - коефициент на триење помеѓу површините на боковите на запците.

Од равенките (2.51) и (2.52) се добиваат односите:

$$\theta_2 = i_2 \theta_3 \quad (2.53.a)$$

$$\theta_1 = i_1 \theta_2 = i_1 i_2 \theta_3 \quad (2.53.б)$$

$$T_2 = \eta_1 i_1 T_1 \quad (2.54.а)$$

$$T_4 = \eta_2 i_2 T_3 \quad (2.54.б)$$

Со замена на релациите (2.53) и (2.54) во системот од симултани диференцијални равенки (2.50) се добива:

$$J_{EKV} D^2 \theta_3 + B_{EKV} D \theta_3 = T \quad (2.55)$$

Каде што се:

$$J_{EKV} = J_1 i_1 i_2 + J_2 \frac{i_2}{\eta_1 i_1} + \frac{J_3 + J_L}{\eta_1 \eta_2 i_1 i_2} \quad (2.56.а)$$

$$B_{EKV} = B_1 i_1 i_2 + B_2 \frac{i_2}{\eta_1 i_1} + \frac{B_3 + B_L}{\eta_1 \eta_2 i_1 i_2} \quad (2.56.б)$$

Според тоа, конечниот облик на математичкиот модел на редукторот, ако е влез поментот -  $T(t)$ , а излез е аголната позиција на вратилото 3 -  $\theta_3(t)$  ќе биде:

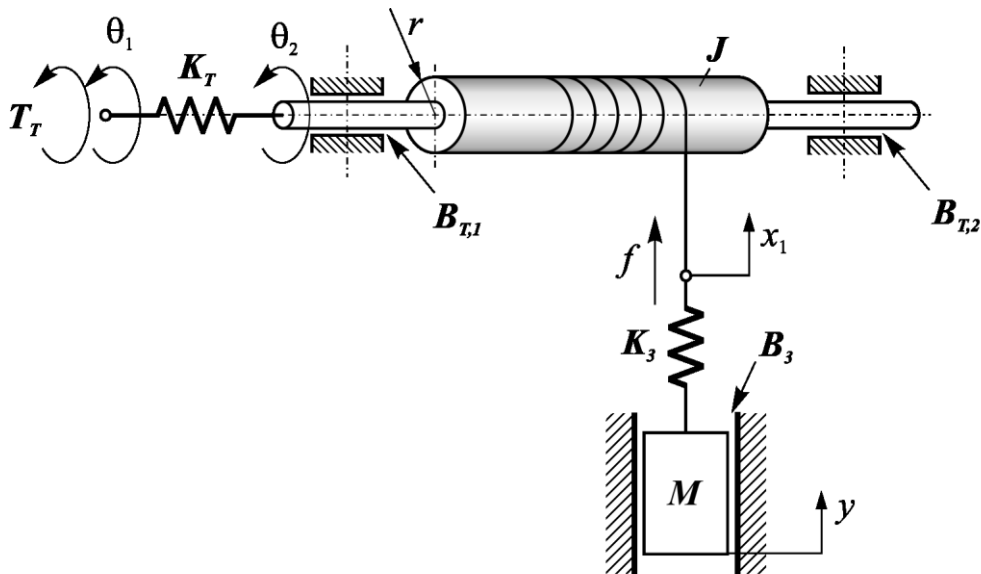
$$J_{EKV} \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} + B_{EKV} \frac{d\theta_3}{dt} = T(t) \quad (2.57)$$

Во случај да е потребно да се анализира промената на аголната брзина на вратилото 3 -  $\omega_3(t)$ , односно таа да претставува излезна големина на системот, во зависност од промената на вртежниот момент -  $T(t)$  (влезна големина), тогаш директно од равенка (2.57) се добива бараниот облик на математичкиот модел на системот:

$$J_{EKV} \frac{d\omega_3}{dt} + B_{EKV} \omega_3 = T(t) \quad (2.58)$$

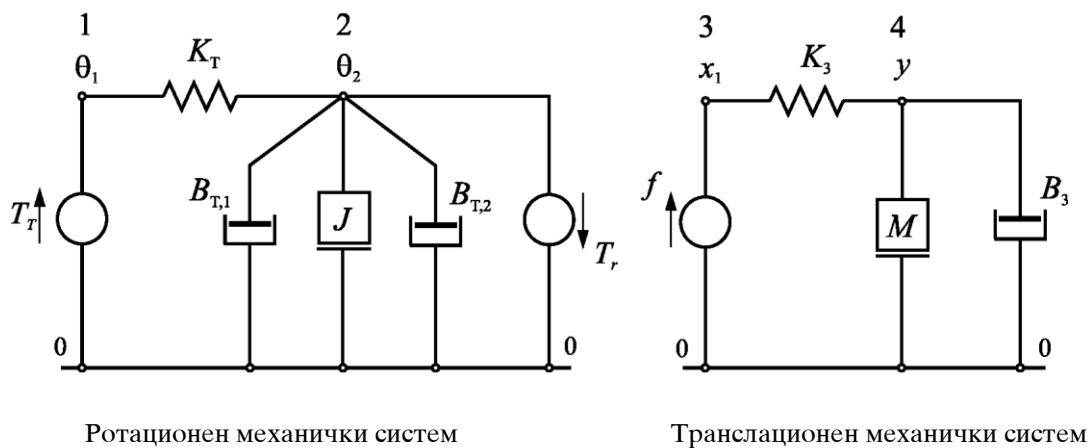
### 2.1.3. Транслационо - ротациони системи

**Задача 2.13.** Да се определи математичкиот модел со кој се опишува однесувањето на следниот транслационо - ротационен механички систем (слика 2.31).



Слика 2.31. Скица на транслационо-ротационен механички систем

**Решение:** Еквивалентната механичка шема за дадениот механички систем е прикажана на слика 2.32.



Слика 2.32. Еквивалентна механичка шема на механичкиот систем

Математичкиот модел за зададениот механички систем се пишува на основа на еквивалентната механичка шема на идентичен начин како во претходните примери со напомена дека врската помеѓу ротациониот и транслаторниот дел од системот е изразена со равенките:

$$T_r = f \cdot r \quad (2.59)$$

$$x_1 = r \cdot \theta_2 \quad (2.60)$$

Се пишуваат равенките за поедините јазли:

$$\text{Јазол 1:} \quad K_T \theta_1 - K_T \theta_2 = T_r \quad (2.61.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad [JD^2 + (B_{T,1} + B_{T,2})D + K_T] \theta_2 - K_T \theta_1 + T_r = 0 \quad (2.61.б)$$

$$\text{Јазол 3:} \quad K_3 x_1 - K_3 y = f \quad (2.61.в)$$

$$\text{Јазол 4:} \quad (MD^2 + B_3 D + K_3) y - K_3 x_1 = 0 \quad (2.61.г)$$

## 2.2. Електрични системи

Од електричните системи ќе бидат анализирани едноставни електрични мрежи и неколку вида на електромотори.

### 2.2.1. Електрични мрежи

Електричните системи во голем број случаи може да се претстават во облик на електрични мрежи, кои се составени од идеални елементи - пасивни и активни.

Пасивни елементи се:

1. **Отпорник**; во него се одвива неповратен процес на претворање на електричната енергија во топлина. Овој елемент го карактеризира параметарот на отпорноста -  $R (\Omega)$ . Напонот на отпорникот и струјата, која протекува низ него, преку Омовиот закон се поврзани со релацијата:

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad (2.62)$$

Симболот на отпорникот е прикажан на слика 2.33.а.

2. **Кондензатор;** во него се акумулира електричната енергија. Карактеристичен параметар на кондензаторот е капацитативноста -  $C$  (се мери во Фаради -  $F$ ). Под влијание на напонот  $u(t)$  на плочите на кондензаторот се акумулира електрично оптоварување  $q(t)$ , кое е пропорционално со напонот:

$$q(t) = C \cdot u(t) \quad (2.63)$$

Електричното оптоварување  $q(t)$  и струјата се поврзани со релацијата:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.64)$$

односно:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = q(0) + \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (2.65)$$

Каде што е:  $q(0)$  - почетното (во моментот  $t = 0$ ) оптоварување на кондензаторот.

Според тоа, напонот и струјата на кондензаторот ќе бидат поврзани со релацијата:

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (2.66)$$

односно:

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (2.67)$$

Каде што е:  $u(0)$  - почетниот напон (во моментот  $t = 0$ ) на кондензаторот.

Симболот на кондензатор е прикажан на слика (2.33.б).

3. **Индуктивен калем;** во него е сконцентрирана магнетната енергија. Магнетниот флуks -  $\Phi(t)$  е пропорционален на струјата:

$$\Phi(t) = L \cdot i(t) \quad (2.68)$$

Константниот параметар -  $L$  претставува самоиндуктивност (се мери во Хенри -  $H$ ) на калемот. Кога калемот е поврзан на напон  $u(t)$ , магнетниот флуks во него се менува според релацијата:

$$u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (2.69)$$

Според тоа, помеѓу напонот и струјата на калемот постои релацијата:

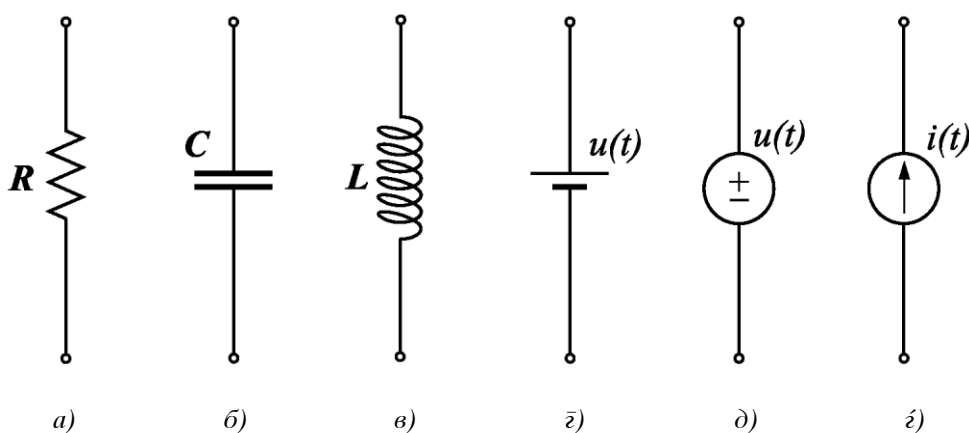
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.70)$$

односно:

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (2.71)$$

Каде што е:  $i(0)$  - почетната струја (во моментот  $t = 0$ ) во калемот.

Симболот за индуктивен калем е прикажан на слика 2.33.в.



Слика 2.33. Симболи на електричните компоненти

- |                     |                              |
|---------------------|------------------------------|
| а) Отпорник         | г) Извор на константен напон |
| б) Кондензатор      | д) Извор на променлив напон  |
| в) Индуктивен калем | з) Извор на струја           |

Активни елементи се:

1. **Извор на напон;** на чии краеве напонот е определен како функција од времето  $u = u(t)$ , независно од струјата низ изворот. На слика 2.33.г. е прикажан симбол на извор на константен напон, а на слика 2.33.д. е прикажан извор на променлив напон.

2. **Извор на струја;** дава струја која што претставува функција од времето  $i = i(t)$ , независно од напонот на краевите од изворот.

Симболот за извор на струја е прикажан на слика 2.33.з.



Под анализа на електричните мрежи се подразбира определување на струите и напоните на сите елементи во мрежата. Равенките на електричните мрежи може да се добијат со примена на двата Крхофови закони:

I. Алгебарскиот збир на струите кои проијектуваат низ некој јазол во секој момент е еднаков на нула.

$$\sum_j i_j(t) = 0 \quad (2.72)$$

Во овој збир, струите кои влегуваат во јазолот имаат предзнак "+", а овие кои истекуваат имаат предзнак "-".

II. Алгебарскиот збир на напоните во гранките, земени во определена насока по должина на било која контура во електричната мрежа во секој момент е еднаков на нула.

$$\sum_j u_j(t) = 0 \quad (2.73)$$

Во посложените случаи, наместо Кирхофовите закони се употребуваат методата на контурни струи или методата на потенцијали на јазлите.

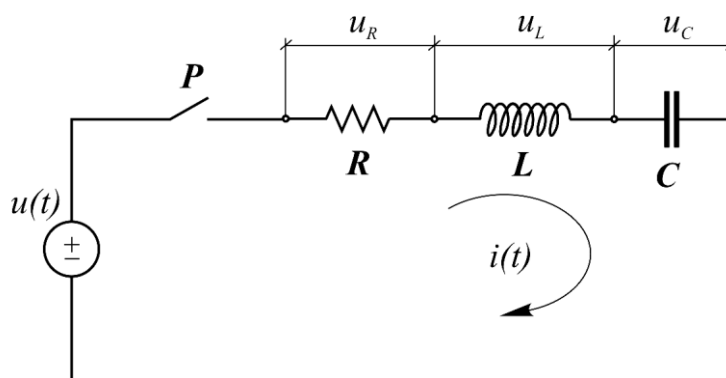
По првата метода, од  $k$ -равенки се определуваат контурните струи, а од овие равенки, со просто алгебарско собирање, се определуваат струите во сите гранки.

По втората метода, од  $l$ -равенки се определуваат потенцијалите на јазлите, а од нив следат напоните на сите елементи, како разлики на потенцијалите на јазлите.

Овие методи се изучуваат во електротехника.

**Задача 2.14.** На слика 2.34 е прикажана една едноставна електрична мрежа, таканаречена редна  $RLC$  - мрежа. Во почетниот момент ( $t = 0$ ) се затвора прекинувачот  $P$ . Почетните вредности на струјата во калемот -  $i(0)$  и напонот на кондензаторот -  $u(0)$  се еднакви на нула.

Да се определи математичкиот модел на електричната мрежа, ако промената на напонот во кондензаторот -  $u(t)$  е влез, а промената на струјата во мрежата -  $i(t)$  е излез на системот.



Слика 2.34. Редна  $RLC$  - електрична мрежа

**Решение:** Бидејќи во електричната мрежа постои само една гранка, тогаш низ сите елементи во мрежата тече иста струја  $i(t)$ . Според II. Кирхофов закон (2.73) следи:

$$u_R + u_L + u_C = u(t) \quad (2.74)$$

Со замена на релациите (2.62), (2.67) и (2.70) во равенка (2.74) и за  $i(0) = 0$ ,  $u(0) = 0$  се добива:

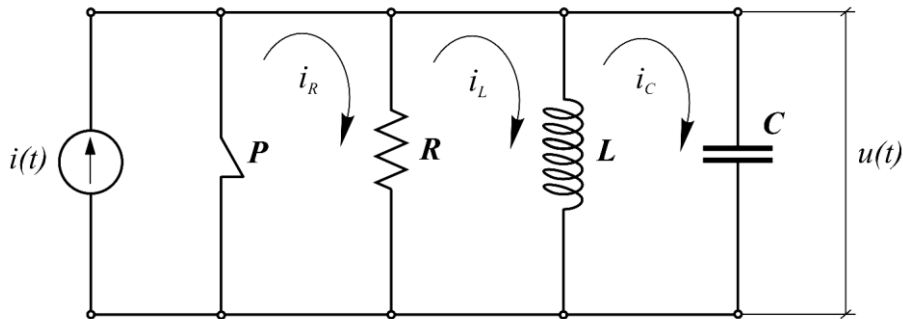
$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = u(t) \quad (2.75)$$

Со диференцирање на равенката (2.75) се добива конечниот облик на математичкиот модел на системот:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt} \quad (2.76)$$

**Задача 2.15.** На слика 2.35 е прикажана паралелна  $RLC$  - електрична мрежа. Со отворање на прекинувачот  $P$ , во моментот  $t = 0$ , сите елементи во мрежата се приклучуваат на изворот на струја  $i(t)$ . Почетниот напон во кондензаторот и почетната струја во калемот се еднакви на нула.

Да се определи математичкиот модел на електричната мрежа ако промената на струјата  $i(t)$  е влез, а промената на напонот на колото  $u(t)$  е излез на системот.



Слика 2.35. Паралелна  $RLC$  - електрична мрежа

**Решение:** Бидејќи сите елементи во електричната мрежа се приклучени на ист напон  $u(t)$ , тогаш според I. Кирхофов закон (2.72) следи:

$$i_R + i_L + i_C = i(t) \quad (2.77)$$

Со замена на релациите (2.62), (2.64) и (2.71) во равенка (2.77) и за  $i(0) = 0$ ,  $u(0) = 0$  се добива:

$$\frac{1}{R}u + \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + C \frac{du}{dt} = i(t) \quad (2.78)$$

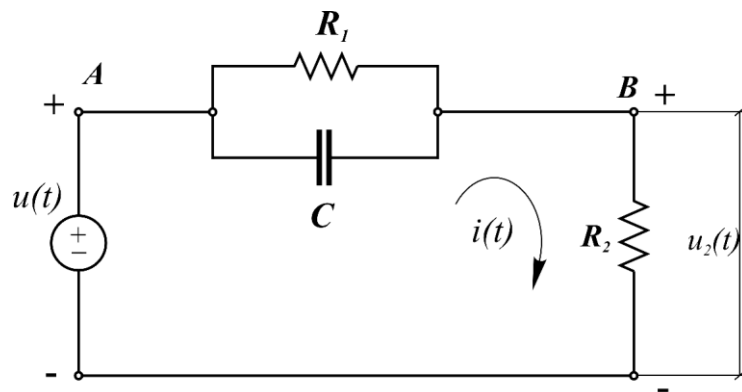
Со диференцирање на равенката (2.78) се добива математичкиот модел на системот:

$$C \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{1}{L}u = i(t) \quad (2.79)$$

**Задача 2.16.** На слика 2.36 е прикажан еден забрзувачки компензатор реализиран со  $RC$  - електрична мрежа.

Да се најде математичкиот модел за оваа мрежа ако промената на напонот  $u(t)$  е влез, а промената на напонот  $u_2(t)$  е излез на системот.

Во почетниот момент  $t = 0$ , мрежата не е оптоварена, односно  $i(0) = 0$ .



Слика 2.36. Електрична мрежа на забрзувачки компензатор

**Решение:** За делот од електричната мрежа помеѓу точките  $A$  и  $B$  според I. Кирхофов закон (2.72) следи:

$$\frac{1}{R_1}(u - u_2) + C \frac{d}{dt}(u - u_2) = i(t) \quad (2.80)$$

Според релацијата (2.62) се добива:

$$i(t) = \frac{1}{R_2} u_2(t) \quad (2.81)$$

Со замена на равенка (2.81) во равенката (2.80) и со нејзино средување се добива бараниот облик на математичкиот модел за дадената електрична мрежа:

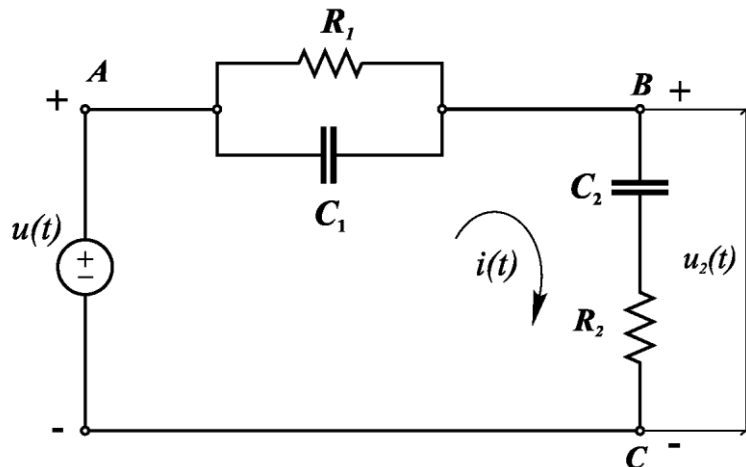
$$\left( D + \frac{1}{CR_1} \right) u = \left( D + \frac{1}{CR_1} + \frac{1}{CR_2} \right) u_2 \quad (2.82)$$

односно:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{CR_1} u = \frac{du_2}{dt} + \left( \frac{1}{CR_1} + \frac{1}{CR_2} \right) u_2 \quad (2.83)$$

**Задача 2.17.** Да се определи математичкиот модел за електричната мрежа прикажана на слика 2.37, ако промената на влезниот напон  $u(t)$  е влез, а промената на напонот  $u_2(t)$  е излез на системот.

Во почетниот момент ( $t=0$ ) мрежата не е оптоварена, односно  $u(0)=0$  и  $i(0)=0$ .



Слика 2.37. Скица на RC - електрична мрежа

**Решение:** За делот од електричната мрежа помеѓу точките  $A$  и  $B$  според I. Кирхофов закон следи:

$$\frac{1}{R_1}(u-u_2) + C_1 \frac{d}{dt}(u-u_2) = i(t) \quad (2.84)$$

За делот од електричната мрежа помеѓу точките  $B$  и  $C$  според II. Кирхофов закон следи:

$$\frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau + Ri = u_2(t) \quad (2.85)$$

Со диференцирање на равенката (2.85) се добива:

$$\left( \frac{1}{C_2} + RD \right) i = Du_2 \quad (2.86)$$

Ако се определи струјата  $i(t)$  од равенката (2.86) и тој израз се замени во равенка (2.84), со нејзино средување се добива:

$$\left[ D^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) D + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right] u_2 = \left[ D^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) D + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right] u \quad (2.87)$$

односно, конечниот облик на бараниот математички модел ќе биде:

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + a_1 \frac{du_2}{dt} + a_0 u_2 = \frac{d^2 u}{dt^2} + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (2.88)$$

Каде што коефициентите на системот се:

$$a_1 = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1}$$

$$a_0 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \equiv b_0 \qquad b_1 = \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}$$

**Задача 2.18.** Да се определи математичкиот модел за електричната мрежа прикажана на слика 2.38, ако промената на влезниот напон  $u(t)$  е влез, а промената на напонот  $u_2(t)$  е излез на системот.

Во почетниот момент ( $t = 0$ ) мрежата не е оптоварена, односно  $u(0) = 0$ .

**Решение:** Електричната мрежа е составена од две меѓусебно поврзани затворени контури. Заеднички елемент помеѓу двете контури е кондензаторот  $C_1$ , па затоа при пресметката на напонот на неговите краеве ќе биде меродавна разликата на струите што протекуваат во поедините контури.

Се пишува II. Кирхофов закон за I. контура:

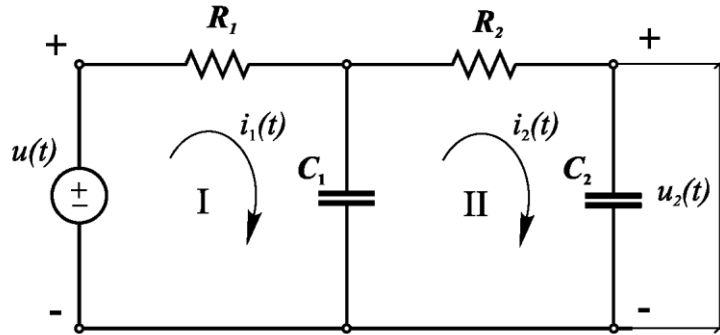
$$R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t [i_1(\tau) - i_2(\tau)] d\tau = u(t) \quad (2.89)$$

II. Кирхофов закон за II. контура ќе биде:

$$R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + \frac{1}{C_1} \int_0^t [i_2(\tau) - i_1(\tau)] d\tau = 0 \quad (2.90)$$

Излезниот напон е даден со релацијата:

$$u_2(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2(\tau) d\tau \quad (2.91)$$



Слика 2.38. Скица на електрична мрежа

Со диференцирање на равенките (2.89) и (2.90) се добива:

$$\left(R_1 D + \frac{1}{C_1}\right) i_1 - \frac{1}{C_1} i_2 = D u \quad (2.92)$$

$$-\frac{1}{C_1} i_1 + \left(R_2 D + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i_2 = 0 \quad (2.93)$$

Ако се определи струјата  $i_1$  од равенката (2.93) и ако добиениот израз се замени во равенката (2.92), со нејзино средување се добива изразот за вредноста на струјата  $i_2$  во облик:

$$i_2 = \frac{C_2 D u}{R_1 R_2 C_1 C_2 D^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) D + 1} \quad (2.94)$$

Со диференцирање на равенката (2.91) се добива:

$$i_2 = C_2 D u_2 \quad (2.95)$$

Ако се замени равенката (2.95) во равенката (2.94) конечно се добива бараниот облик на математичкиот модел:

$$\left[R_1 R_2 C_1 C_2 D^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) D + 1\right] u_2 = u \quad (2.96)$$

односно:

$$a_2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + a_1 \frac{du_2}{dt} + u_2 = u \quad (2.97)$$

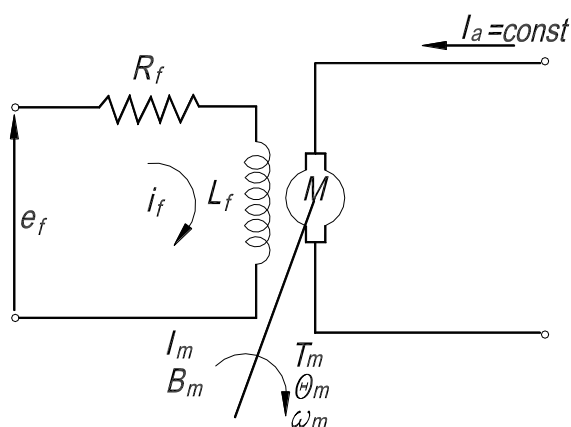
Каде што се:

$$a_2 = R_1 R_2 C_1 C_2 \quad a_1 = R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2 \quad (2.98)$$

коэффициенти на системот.

### 2.2.2. Електромотори на еднонасочна струја

**Задача 2.19.** Да се напише математичкиот модел за еднонасочен електромотор управуван од побудата, ако промената на побудниот напон  $e_f(t)$  е влез, а промената на аголната позиција на роторот на моторот  $\theta_m(t)$  е излез на системот (слика 2.39).



Слика 2.39. Скица на еднонасочен електромотор управуван од побудата

**Решение:** Воведените ознаки на слика 2.39 означуваат:

- $e_a$  - Директен напон.
- $R_a$  - Директна отпорност.
- $\Phi$  - Флуks низ воздушниот процеп.
- $e_b$  - Напон на повратната електромоторна сила.
- $K_i$  - Константа на вртежниот момент.
- $i_a$  - Директна струја.
- $e_f$  - Напон на побудата.
- $i_f$  - Струја на побудата.
- $T_m$  - Вртежен момент развиен од моторот.



$J_m$  - Момент на инерција на роторот на моторот.

$B_m$  - Коефициент на триење на роторот.

$\theta_m$  - Аголна позиција на роторот.

Се воведуваат следните претпоставки:

$$i_a = I_a = \text{const} \quad (2.99.a)$$

$$\Phi(t) = K_f \cdot i_f(t) \quad (2.99.б)$$

$$T_m(t) = K_m \cdot I_a \cdot \Phi(t) \quad (2.99.в)$$

Со замена на изразот (2.99.б) во изразот (2.99.в) се добива:

$$T_m(t) = K_m \cdot I_a \cdot K_f \cdot i_f(t) \quad (2.100)$$

односно:

$$T_m(t) = K_i \cdot i_f(t) \quad (2.101)$$

Каде што е:  $K_i = K_m K_f I_a$  - Коефициент на пропорционалност на вртежниот момент -  $T_m$  со струјата на побудата -  $i_f$ .

Од електричната мрежа прикажана на слика 2.39 (редна  $RL$  - мрежа) се добива следната равенка (според равенка 2.75):

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e_f \quad (2.102)$$

За ротационата маса на роторот на електромоторот може да се нацрта следната еквивалентна механичка шема (слика 2.40).

Се пишува диференцијалната равенка за јазолот 1 од еквивалентната механичка шема:

$$(J_m D^2 + B_m D)\theta_m = T_m \quad (2.103)$$

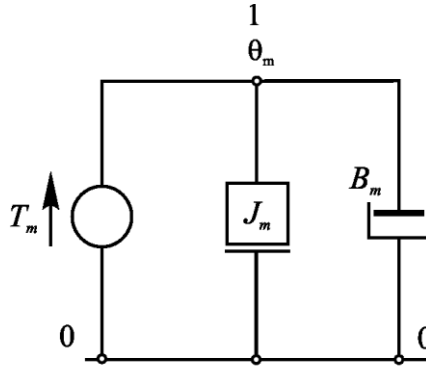
односно:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = T_m \quad (2.104)$$

Ако равенката (2.104) се изрази во однос на аголната брзина на роторот се добива:

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} + B_m \omega_m = T_m \quad (2.105)$$

Каде што е:  $\omega_m = \frac{d\theta_m}{dt}$  - аголна брзина на роторот на електромоторот.



Слика 2.40. Еквивалентна механичка шема за роторот на електромотор

Со замена на изразот (2.101) во равенка (2.103) се добива:

$$(J_m D^2 + B_m D) \theta_m = K_i \cdot i_f \quad (2.106)$$

Ако се изрази струјата  $i_f$  од равенка (2.102) и добиениот израз се замени во равенка (2.106) се добива бараниот облик на математичкиот модел:

$$(J_m D^2 + B_m D)(L_f D + R_f) \theta_m = K_i \cdot e_f \quad (2.107)$$

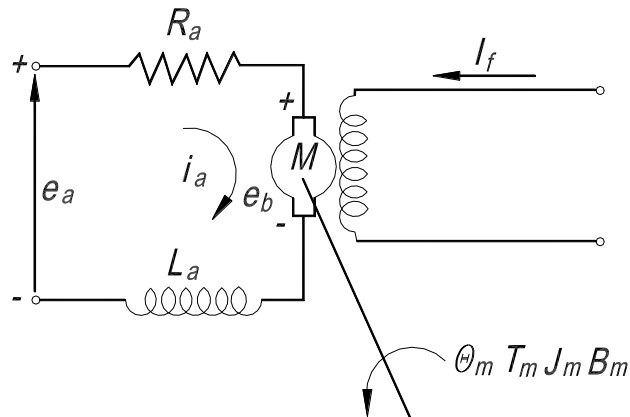
односно:

$$\left[ J_m L_f D^3 + (B_m L_f + J_m R_f) D^2 + B_m R_f D \right] \theta_m = K_i \cdot e_f \quad (2.108)$$

Математичкиот модел со кој се опишува динамиката на еднонасочен електромотор управуван од побудата (равенка 2.108) може да се напише во облик: побудниот напон  $e_f$  да е влез, а аголната брзина на роторот на моторот  $\omega_m$  да е излез на системот:

$$J_m L_f \frac{d^2 \omega_m}{dt^2} + (B_m L_f + J_m R_f) \frac{d\omega_m}{dt} + B_m R_f \omega_m = K_i \cdot e_f \quad (2.109)$$

**Задача 2.20.** Да се напише математичкиот модел за еднонасочен електромотор директно управуван, ако промената на директниот напон  $e_a(t)$  е влез, а промената на аголната позиција на роторот на моторот  $\theta_m(t)$  е излез на системот (слика 2.41).



Слика 2.41. Скица на еднонасочен електромотор директно управуван

**Решение:** Важат истите ознаки од претходниот случај и притоа се воведуваат следните претпоставки:

$$i_f = I_f = \text{const} \quad (2.110.a)$$

$$\Phi = K_f \cdot I_f \quad (2.110.б)$$

$$T_m(t) = K_m \cdot \Phi \cdot i_a(t) \quad (2.110.в)$$

$$e_b = K_b \cdot D\theta_m = K_b \cdot \omega_m \quad (2.110.г)$$

Каде што е:  $K_b$  - Коэффициент на повратната електромоторна сила.

Со замена на изразот (2.110.б) во изразот (2.110.в) се добива:

$$T_m(t) = K_m \cdot I_f \cdot K_f \cdot i_a(t) = K_i \cdot i_a(t) \quad (2.111)$$

Каде што е:  $K_i$  - Коэффициент на пропорционалност.

Од електричната мрежа прикажана на слика 2.41 (редна  $RL$  - мрежа со пасивен напон  $e_b$ ) се добива:

$$L_a D i_a + R_a i_a + e_b = e_a \quad (2.112)$$

Диференцијалната равенка со која се опишува движењето на роторот на електромоторот е идентична со равенка (2.104) од задача 2.19.

Со замена на изразот (2.111) во равенка (2.104) се добива:

$$(J_m D^2 + B_m D)\theta_m = K_i \cdot i_a \quad (2.113)$$

Ако се определи струјата  $i_a$  од равенка (2.113) и ако се замени изразот (2.110.г) во равенка (2.112) се добива бараниот облик на математичкиот модел за еднонасочен електромотор директно управуван:

$$\left[ L_a J_m D^3 + (B_m L_a + J_m R_a) D^2 + (B_m R_a + K_i K_b) D \right] \theta_m = K_i \cdot e_a \quad (2.114)$$

односно:

$$L_a J_m \frac{d^3 \theta_m}{dt^3} + (B_m L_a + J_m R_a) \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} + (B_m R_a + K_i K_b) \frac{d \theta_m}{dt} = K_i \cdot e_a \quad (2.115)$$

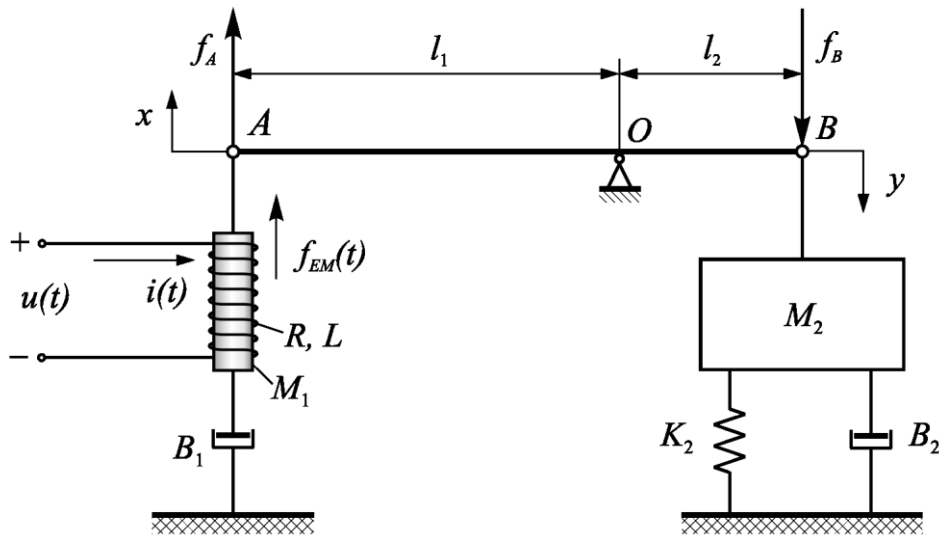
### 2.3. Комбинирани електро-механички системи

**Задача 2.21.** Поларизируваниот соленоид создава сила  $f_{EM}(t)$ , која се пренесува на јадрото од меко железо со маса  $M_1$ . Силата е пропорционална на струјата која тече низ побудниот калем:

$$f_{EM}(t) = K_i \cdot i(t)$$

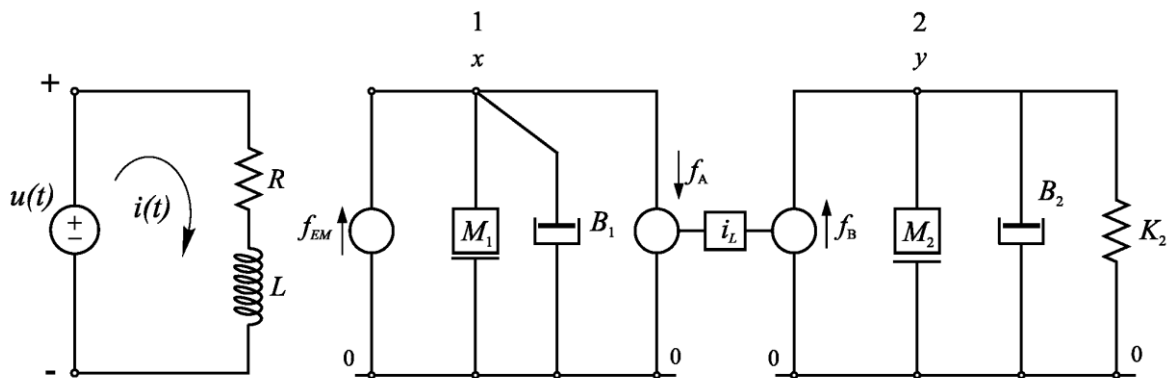
Побудниот калем има отпорност  $R$  и самоиндуктивност  $L$ .

Да се напише математичкиот модел за системот ако промената на напонот кој се доведува на електромагнетот  $u(t)$  е влез, а промената на позицијата на масата  $y(t)$  е излез на системот (слика 2.42).



Слика 2.42. Скица на електро-механички комбиниран систем

**Решение:** За дадениот систем се цртаат одвоено електричниот систем и еквивалентната механичка шема за транслациониот механички систем (слика 2.43).



Слика 2.43. Електрична мрежа и еквивалентна механичка шема

Се определува математичкиот модел за електричната мрежа, која претставува редна  $RL$  - мрежа. Според тоа, директно од равенка (2.75) може да се напише:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u(t) \quad (2.116)$$

Врската помеѓу електричниот и механичкиот систем претставува односот:

$$f_{EM}(t) = K_i \cdot i(t) \quad (2.117)$$

Се пишуваат диференцијалните равенки за поедините јазли од еквивалентната механичка шема:

$$\text{Јазол 1:} \quad (M_1 D^2 + B_1 D)x + f_A = f_{EM} \quad (2.118.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad (M_2 D^2 + B_2 D + K_2)y = f_B \quad (2.118.б)$$

Односите на силите и поместувањата на краевите од лостот  $AOB$  се дадени со релациите:

$$\frac{f_A}{f_B} = \frac{l_2}{l_1} = i_L \quad (2.119.a)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{i_L} \quad (2.119.б)$$

Ако се определи позицијата  $x$  од релацијата (2.119.б) и силата  $f_B$  од релацијата (2.119.a) и добиените изрази се заменат во системот на симултани диференцијални равенки (2.118) се добива:

$$\frac{1}{i_L} (M_1 D^2 + B_1 D)y + f_A = f_{EM} = K_i \cdot i(t) \quad (2.120.a)$$

$$(M_2 D^2 + B_2 D + K_2)y = \frac{1}{i_L} \cdot f_A \quad (2.120.б)$$

Со средување на системот од равенки (2.120) и со замена на вредноста на струјата  $i$  од равенка (2.116) се добива бараниот облик на математичкиот модел на електро-механичкиот систем:

$$(a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y(t) = K_i \cdot u(t) \quad (2.121)$$

односно:

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = K_i \cdot u(t) \quad (2.122)$$

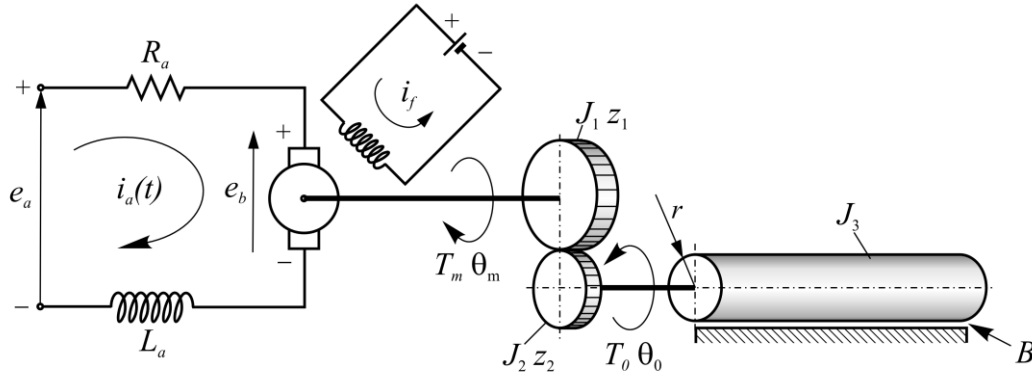
Каде што се:

$$a_3 = \frac{1}{i_L} M_1 L + i_L M_2 L \quad a_2 = \frac{1}{i_L} B_1 L + i_L B_2 L + \frac{1}{i_L} M_1 R + i_L M_2 R$$

$$a_1 = \frac{1}{i_L} B_1 R + i_L B_2 R + i_L K_2 L \quad a_0 = i_L K_2 R$$

коефициенти на математичкиот модел.

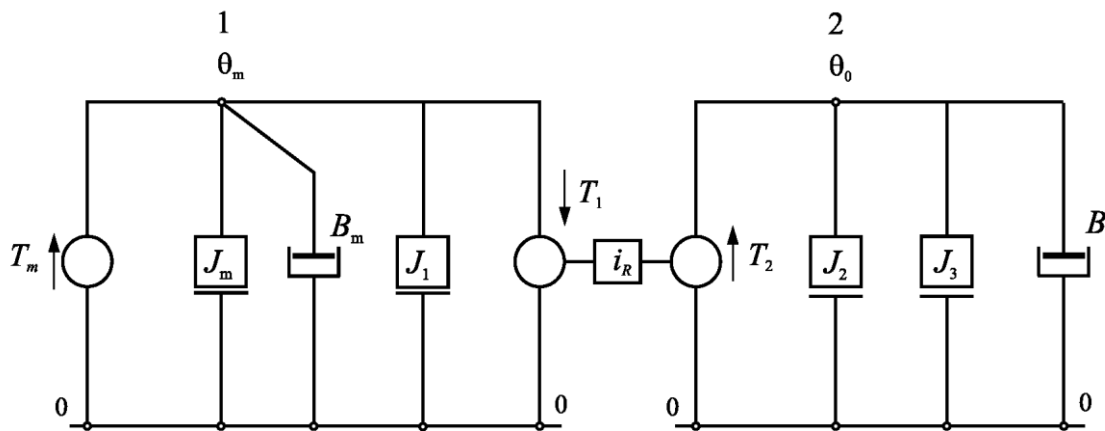
**Задача 2.22.** На слика 2.44 е прикажан електро-механички систем составен од еднонасочен електромотор директно управуван, запчест пренос и оптоварување.



Слика 2.44. Скица на електро-механички систем

Да се определи математичкиот модел за дадениот механизам, ако промената на директниот напон  $e_a(t)$  е влезна големина, а промената на аголната позиција на оптоварувањето  $\theta_0(t)$  е излезна големина на системот.

**Решение:** За дадениот систем на слика 2.44 се црта еквивалентната механичка шема (слика 2.45).



Слика 2.45. Еквивалентна механичка шема на системот

Од задача 2.20 се пишуваат равенките за еднонасочниот електромотор директно управуван, кои се идентични со равенките (2.112), (2.110.г) и (2.111):

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \quad (2.123.a)$$

$$e_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt} \quad (2.123.б)$$

$$T_m = K_i i_a \quad (2.123.в)$$

Од еквивалентната механичка шема се определуваат диференцијалните равенки за поедините јазли:

$$\text{Јазол 1:} \quad [(J_m + J_1)D^2 + B_m D] \cdot \theta_m + T_1 = T_m \quad (2.134.a)$$

$$\text{Јазол 2:} \quad [(J_2 + J_3)D^2 + BD] \cdot \theta_0 = T_2 \quad (2.134.б)$$

Притоа, за запчестиот пар важат релациите (задача 2.12):

$$i_R = \frac{\omega_m}{\omega_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{z_2}{z_1}$$

односно:

$$\theta_m = i_R \cdot \theta_0 \quad (2.125.a)$$

$$T_2 = \eta \cdot i_R \cdot T_1 \quad (2.125.б)$$

Равенките (2.123), (2.124) и (2.125) го сочинуваат математичкиот модел за дадениот систем. Со нивно средување се добива бараниот облик на математичкиот модел, кога директниот напон  $e_a(t)$  е влез, а аголната позиција  $\theta_0(t)$  е излез на системот:

$$(a_3 D^3 + a_2 D^2 + a_1 D) \cdot \theta_0 = K_i \cdot e_a \quad (2.126)$$

односно:

$$a_3 \frac{d^3 \theta_0}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_0}{dt} = K_i \cdot e_a \quad (2.127)$$

Каде што се:

$$a_3 = L_a \left[ i_R (J_m + J_1) + \frac{1}{i_R \eta} (J_2 + J_3) \right]$$



$$a_2 = R_a \left[ i_R (J_m + J_1) + \frac{1}{i_R \eta} (J_2 + J_3) \right] + L_a \left( i_R B_m + \frac{B}{i_R \eta} \right)$$

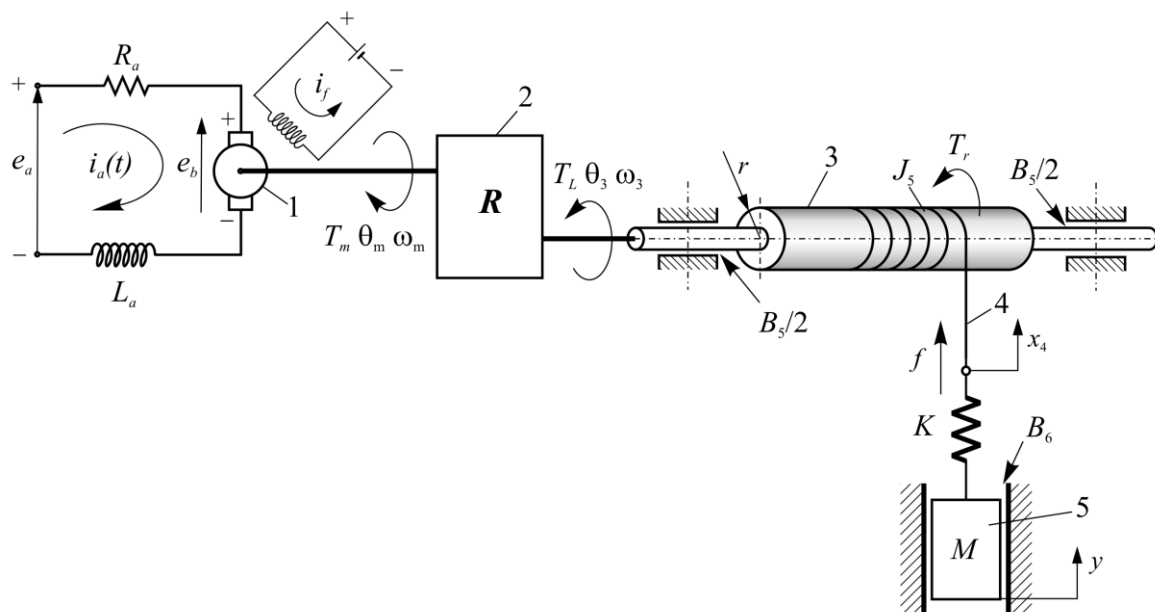
$$a_1 = R_a \left( i_R B_m + \frac{B}{i_R \eta} \right) + i_R K_b K_i$$

коэффициенти на математичкиот модел.

**Задача 2.23.** На слика 2.46 е прикажана шема на еден лифт, погонуван од електромотор на еднонасочна струја директно управуван (1), кој преку двостепениот редуктор (2) го задвижува чекргот (3) со полупречник  $r$  и момент на инерција  $J_5$ . Чекргот е потпрен на две лежишта, чии вкупен коефициент на триење изнесува  $B_5$ . Моторот произведува момент пропорционален (константа  $K_i$ ) на директната струја  $i_a$ . При ротација на роторот, во неговите намотки се индуцира повратна електромоторна сила пропорционална (коефициент  $K_b$ ) на аголната брзина на роторот  $\omega_m$ . Излезното вратило на електромоторот е поврзано со двостепен редуктор со цилиндрични запченици со прави запци, чиј преносен однос е  $i = i_1 i_2$  и степен на полезно дејство  $\eta = \eta_1 \eta_2$  (параметрите и математичкиот модел на редукторот се идентични со редукторот од задача 2.12, слика 2.28, со таа разлика што оптоварувањето  $T_L$  во конкретниот пример е различно).

Преку јажето (4) со крутост  $K$ , чекргот (3) ја подигнува масата  $M$ , која се движи во водилки со коефициент на вискозно триење  $B_6$ .

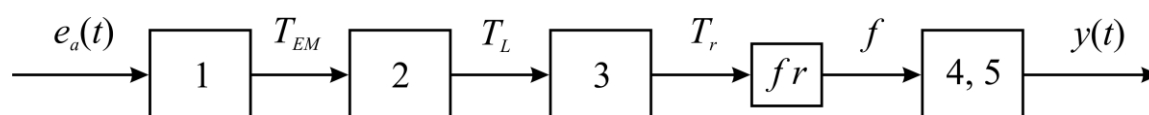
Под претпоставка дека системот во почетниот момент ( $t = 0$ ) се наоѓа во рамнотежна состојба, да се определи математичкиот модел на системот, ако поместувањето  $y(t)$  на масата  $M$  е излезна големина, а директниот напон приклучен на роторот на еднонасочниот електромотор  $e_a(t)$  е влезна големина на системот.



Слика 2.46. Упростена скица на електро-механички лифт

**Решение:** Оваа задача по делови е веќе решена во претходните примери.

Најпрво се пишуваат равенките за секој елемент од овој систем, според блок-дијаграмот прикажан на слика 2.47.



Слика 2.47. Блок-дијаграм на електро-механички лифт

Равенките со кои се опишува динамиката на еднонасочен електромотор директно управуван (поз. 1) се дадени во задача 2.20 и задача 2.22 (важат истите ознаки од наведените задачи), од каде што следи:

- Равенки за еднонасочен електромотор директно управуван (поз. 1).

$$L_a D i_a + R_a i_a + K_b D \theta_m = e_a \quad (2.128.a)$$

$$(J_m D^2 + B_m D) \cdot \theta_m + T_{EM} = T_m = K_i i_a \quad (2.128.б)$$

Движењето на двостепен редуктор, изведен со цилиндрични запченици со прави запци (поз. 2), е опишано во задача 2.12.

Користејќи ги истите ознаки, равенките за двостепениот редуктор ќе бидат:

- Равенки за двостепен редуктор (поз. 2)

$$J_1 D^2 \theta_1 + B_1 D \theta_1 + T_1 = T_{EM} \quad (2.129.a)$$

$$J_2 D^2 \theta_2 + B_2 D \theta_2 + T_3 = T_2 \quad (2.129.б)$$

$$J_3 D^2 \theta_3 + B_3 D \theta_3 + T_L = T_4 \quad (2.129.в)$$

Притоа важат односите:

$$\theta_2 = i_2 \theta_3 \quad T_2 = \eta_1 i_1 T_1$$

$$\theta_1 = i_1 \theta_2 = i_1 i_2 \theta_3 \quad T_4 = \eta_2 i_2 T_3$$

Математичкиот модел за чекргот (поз. 3) и лифтот (поз. 4 и 5) е определен во задача 2.13. Од таму следи:

- Равенка за чекргот (поз. 3)

$$(J_5 D^2 + B_5 D) \cdot \theta_3 + T_r = T_L \quad (2.130)$$

- Равенки за лифтот (поз. 4 и 5)

$$Kx_4 - Ky = f \quad (2.131.a)$$

$$(MD^2 + B_6 D + K)y - Kx_4 = 0 \quad (2.131.б)$$

При што важат односите:

$$T_r = f \cdot r$$

$$x_4 = r \cdot \theta_3$$

Според тоа, равенките (2.128), (2.129), (2.130) и (2.131) го опишуваат движењето на електро-механичкиот лифт. Со нивно средување, според блок-дијаграмот прикажан на слика 2.47, се добива бараниот облик на математичкиот модел за системот, кога  $e_a(t)$  е влез, а  $y(t)$  е излез.

Од равенките (2.131) се добива математичкиот модел за лифтот, кога  $f(t)$  е влез, а  $y(t)$  е излез:

$$(MD^2 + B_6D)y = f \quad (2.132)$$

Од равенка (2.130), користејќи ги односите што важат за чекргот, се добива математичкиот модел кога вртежниот момент  $T_L(t)$  е влезна големина, а позицијата на лифтот  $y(t)$  е излезна големина:

$$(a_{14}D^4 + a_{13}D^3 + a_{12}D^2 + a_{11}D)y = T_L \quad (2.133)$$

Каде што се:

$$a_{14} = \frac{J_5M}{rK}, \quad a_{13} = \frac{B_5M}{rK} + \frac{J_5B_6}{rK},$$

$$a_{12} = rM + \frac{B_5B_6}{rK} + \frac{J_5}{r}, \quad a_{11} = rB_6 + \frac{B_5}{r}$$

коефициенти на математичкиот модел.

Од равенка (2.132) и равенка (2.131), користејќи ги односите кои важат за лифтот и чекргот, се добива релацијата:

$$\theta_3 = \frac{1}{r} \left( \frac{M}{K} D^2 + \frac{B_6}{K} D + 1 \right) y \quad (2.134)$$

Ако вртежниот момент  $T_L(t)$ , потребен да се задвижи лифтот (5), од равенка (2.133) се изрази во облик:

$$T_L = \psi(D)y \quad (2.135)$$

Од системот на диференцијални равенки (2.129), со кој што се опишува движењето на двостепениот редуктор, и равенката (2.135) се добива:

$$(J_{EKV}D^2 + B_{EKV}D)\theta_3 + \frac{\psi(D)}{i_1i_2\eta_1\eta_2}y = T_{EM} \quad (2.136)$$

Каде што се:

$$J_{EKV} = i_1i_2J_1 + \frac{i_2}{i_1\eta_1}J_2 + \frac{1}{i_1i_2\eta_1\eta_2}J_3 \quad (2.137)$$

еквивалентен момент на инерција на редукторот и

$$B_{EKV} = i_1 i_2 B_1 + \frac{i_2}{i_1 \eta_1} B_2 + \frac{1}{i_1 i_2 \eta_1 \eta_2} B_3 \quad (2.138)$$

еквивалентен коефициент на триење на редукторот.

Со замена на релацијата (2.134) во диференцијалната равенка (2.136) се добива математичкиот модел, кога вртежниот момент на електромоторот  $T_{EM}(t)$  е влезна големина, а позицијата на лифтоот  $y(t)$  е излезна големина:

$$(a_{24}D^4 + a_{23}D^3 + a_{22}D^2 + a_{21}D)y = T_{EM} \quad (2.139)$$

Каде што се:

$$a_{24} = \frac{J_{EKV}M}{rK} + \frac{a_{14}}{i_1 i_2 \eta_1 \eta_2}$$

$$a_{23} = \frac{J_{EKV}B_6}{rK} + \frac{MB_{EKV}}{rK} + \frac{a_{13}}{i_1 i_2 \eta_1 \eta_2}$$

$$a_{22} = \frac{B_{EKV}B_6}{rK} + \frac{J_{EKV}}{rK} + \frac{a_{12}}{i_1 i_2 \eta_1 \eta_2}$$

$$a_{21} = \frac{B_{EKV}}{r} + \frac{a_{11}}{i_1 i_2 \eta_1 \eta_2}$$

коефициенти на математичкиот модел.

Од системот на равенки за еднонасочниот електромотор (2.128) се добива:

$$\left[ L_a J_m D^3 + (R_a J_m + L_a B_m) D^2 + (R_a B_m + K_i K_a) D \right] \cdot \theta_m + T_{EM} = K_i e_a \quad (2.140)$$

Аголната позиција на вратилото на електромоторот  $\theta_m(t)$  може да се изрази на следниот начин:

$$\theta_m \equiv \theta_1 = i_1 i_2 \theta_3 \quad (2.141)$$

односно, ако во изразот (2.141) се замени релацијата (2.134) се добива:

$$\theta_m = \left( \frac{i_1 i_2 M}{rK} D^2 + \frac{i_1 i_2 B_6}{rK} D + \frac{i_1 i_2}{r} \right) y \quad (2.142)$$

Конечно, со замена на равенка (2.142) и равенка (2.139) во равенката (2.140), се добива бараниот облик на математичкиот модел за електро-механички лифт, кога поместувањето на лифтот  $y(t)$  е излезна големина, а промената на напонот на еднонасочниот електромотор  $e_a(t)$  е влезна големина:

$$(a_{35}D^5 + a_{34}D^4 + a_{33}D^3 + a_{32}D^2 + a_{31}D)y = K_i e_a \quad (2.143)$$

односно:

$$a_{35} \frac{d^5 y}{dt^5} + a_{34} \frac{d^4 y}{dt^4} + a_{33} \frac{d^3 y}{dt^3} + a_{32} \frac{d^2 y}{dt^2} + a_{31} \frac{dy}{dt} = K_i e_a \quad (2.144)$$

Каде што се:

$$a_{35} = L_a J_m \frac{i_1 i_2 M}{rK}$$

$$a_{34} = (R_a J_m + L_a B_m) \frac{i_1 i_2 M}{rK} + L_a J_m \frac{i_1 i_2 B_6}{rK} + a_{24}$$

$$a_{33} = L_a J_m \frac{i_1 i_2}{r} + (R_a J_m + L_a B_m) \frac{i_1 i_2 B_6}{rK} + (R_a B_m + K_i K_b) \frac{i_1 i_2 M}{rK} + a_{23}$$

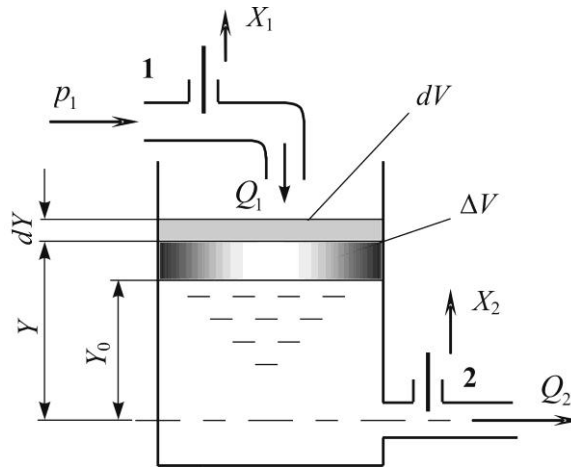
$$a_{32} = (R_a J_m + L_a B_m) \frac{i_1 i_2}{r} + (R_a B_m + K_i K_b) \frac{i_1 i_2 B_6}{rK} + a_{22}$$

$$a_{31} = (R_a B_m + K_i K_b) \frac{i_1 i_2}{r} + a_{21}$$

коефициенти на математичкиот модел.

## 2.4. Хидраулични системи

**Задача 2.24.** На слика 2.48. е прикажана скица на еден резервоар за течност во кого дотекува и истекува течноста. Се поставува задача нивото на течноста  $Y$  во секој момент  $t$  да биде константно, односно да ја има номиналната (зададена, барана) вредност  $Y_0$  за номинална вредност на додокот  $Q_{10}$  и номинална вредност на протокот на истекување  $Q_{20}$ .



Слика 2.48: Шематски приказ на проточен резервоар за течност

Ако притисокот на влезот во доводната цевка е константен, да се определи математичкиот модел за проточниот резервоар прикажан на слика 2.48, согласно зададеното барање: да се одржува константно ниво на водата во резервоарот.

**Решение:** Влезовите и излезот за овој систем се определени во задача 1.1 (слика 1.2). При тоа, треба да се напомене дека притисокот на влезот во доводната цевка не претставува влезна големина, бидејќи во условите дадени во задачата тој е константен.

Во стационарен режим на работа, кога нивото на течноста во резервоарот е  $Y_0$ , мора да биде дотокот на течноста  $Q_{10}$  еднаков со протокот на истекување на течноста од резервоарот  $Q_{20}$ , односно:

$$Q_{10} = Q_{20} = Q_0 = \text{const} \quad (2.145)$$

Зададената вредност на протокот може да се регулира со положбата на вентилот 2, т.е. со пресекот на неговиот отвор, кој што е пропорционален на поместувањето на славината  $X_2$  (заради поеднастување на пресметката усвоено е попречниот пресек да биде во правоаголна форма), односно за номиналната (стационарната) вредност  $Q_{20}$  важи:

$$A_{20} = b_2 \cdot X_{20} \quad (2.146)$$

каде што се:  $b_2 = \text{const}$  - широчината на отворот на вентилот 2,

$A_{20}$  - попречен пресек на светлиот отвор на вентилот 2 во стационарен режим на работа.

Слично важи и за доводниот вентил 1. Во номиналната работна точка неговата проточна површина ќе биде:

$$A_{10} = b_1 \cdot X_{10} \quad (2.147)$$

каде што се:  $b_1 = const$  - широчината на отворот на вентилот 1,

$A_{10}$  - попречен пресек на светлиот отвор на вентилот 1 во стационарен режим на работа.

Максималните вредности што можат да ги достигнат овие големини ќе се обележат со индекс "max". Според тоа се добива:

$$Q_{1,max} \text{ за } X_{1,max}, \quad Q_{2,max} \text{ за } X_{2,max}$$

при што е:

$$\frac{Q_{20}}{Q_{2,max}} = \frac{Q_{10}}{Q_{1,max}} = \frac{Q_0}{Q_{max}} = \lambda < 1 \quad (2.148)$$

односно:

$$\frac{X_{20}}{X_{2,max}} = \frac{X_{10}}{X_{1,max}} = \lambda < 1$$

Половината од вредноста на односот на номиналната и максималната вредност на протокот дефинирана со равенката (2.148) се вика коефициент на саморегулирање или степен на самоодржување.

$$q = \frac{1}{2} \lambda = \frac{1}{2} \frac{Q_0}{Q_{max}} \quad (2.149)$$

Ако кај опишаниот резервоар од било кои причини дојде до промена на протокот во доводната цевка (на пример, поради промена на попречниот пресек на вентилот 1), ќе дојде и до промена на нивото на течноста во резервоарот, а со тоа и до промена на протокот во одводната цевка. Рамнотежата ќе биде нарушена и ќе отпочне промена на сите анализирани големини со текот на времето.



Нека, во било кој временски момент  $t$ , анализираните големини имаат вредност:  $Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$  и нека во тој временски момент висината во резервоарот достигнала вредност  $Y(t)$ .

Според законот за одржување на материјата, односно равенката на континуитетот, после истекот на временскиот интервал  $dt$  од воочениот момент  $t$ , зголемувањето на волуменот на течноста во резервоарот ќе биде:

$$dV = A_0 \cdot dY,$$

каде што е:  $A_0 = \text{const}$  - попречен пресек на резервоарот,

Од друга страна, промената на волуменот на течноста во резервоарот ќе биде еднаков на разликата на дотечената течност -  $Q_1 dt$  и истечената течност -  $Q_2 dt$ , за тој мал временски интервал :

$$A_0 dY = Q_1 dt - Q_2 dt$$

односно:

$$A_0 \frac{dY}{dt} = Q_1 - Q_2 \quad (2.150)$$

Водејќи сметка дека стационарните вредности се  $Q_{10} = Q_{20} = \text{const}$  и  $Y_0 = \text{const}$ , односно  $\frac{dY_0}{dt} = 0$ , горната диференцијална равенка (2.150) може да се напише и во облик:

$$A_0 \frac{d}{dt}(Y - Y_0) = (Q_1 - Q_{10}) - (Q_2 - Q_{20}), \quad (2.151)$$

односно таа да се изрази преку пертурбациите на анализираните големини од нивните номинални вредности.

Протокот  $Q_1(t)$  во доводната цевка (за константна разлика на притисоците во доводната цевка -  $\Delta p$  и константен коефициент на истекување -  $\mu$ ), зависи само од пресекот на отворот на вентилот 1, односно:

$$Q_1(t) = \mu A_1 \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p} = \mu b_1 X_1 \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta p} = \alpha_1 \cdot X_1 \quad (2.152)$$

при што е:

$$\alpha_1 = \mu b_1 \sqrt{\frac{2}{\rho}} \Delta p = \text{const.}$$

Во стационарниот режим, исто така, ќе биде:

$$Q_{10} = \alpha_1 X_{10} = \alpha_1 X_{10} \frac{X_1}{X_{10}} = Q_{10} \frac{X_1}{X_{10}} \quad (2.153)$$

Ако е пресекот на резервоарот  $A_0$  многу поголем од пресекот  $A_2 = b_2 \cdot X_2$ , низ кој течноста истекува низ одводната цевка, тогаш за струењето може да се претпостави дека е стационарно, односно тоа е случај на истекување низ мал отвор, па според тоа, протокот  $Q_2(t)$  ќе биде:

$$Q_2(t) = \mu A_2 \sqrt{2gY} = \mu b X_2 \sqrt{2gY} = \alpha_2 \cdot X_2 \cdot \sqrt{Y} \quad (2.154)$$

каде што е:

$$\alpha_2 = \mu b \sqrt{2g} = \text{const.}$$

Во стационарниот режим ќе биде:

$$Q_{20} = \alpha_2 \cdot X_{20} \cdot \sqrt{Y_0} \quad (2.155)$$

Како што се гледа од горниот израз (2.154), протокот  $Q_2(t)$  е нелинеарна функција од  $Y$ . Ако пертурбациите на сите променливи се многу мали, равенката (2.154) може да се линеаризира во околина на стационарната точка и ќе се добие:

$$dQ_2 = (Q_2 - Q_{20}) = \left. \frac{\partial Q_2}{\partial X_2} \right|_0 \cdot dX_2 + \left. \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right|_0 \cdot dY \quad (2.156)$$

при што пертурбациите се:  $dQ_2 = Q_2 - Q_{20}$ ,  $dX_2 = X_2 - X_{20}$  и  $dY = Y - Y_0$

За парцијалните изводи во околина на работната (стационарната) точка во равенка (2.156), се добиваат следните изрази:

$$\left. \frac{\partial Q_2}{\partial X_2} \right|_0 = \alpha_2 \sqrt{Y} \Big|_0 = \alpha_2 \sqrt{Y_0} = \frac{\alpha_2 X_{20} \sqrt{Y_0}}{X_{20}} = \frac{Q_{20}}{X_{20}} \quad (2.157)$$

$$\left. \frac{\partial Q_2}{\partial Y} \right|_0 = \frac{1}{2} \alpha_2 X_2 \frac{1}{\sqrt{Y}} \Big|_0 = \frac{1}{2} \alpha_2 X_{20} \frac{1}{\sqrt{Y_0}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_2 X_{20} \sqrt{Y_0}}{Y_0} = \frac{1}{2} \frac{Q_{20}}{Y_0} \quad (2.158)$$

Со замена на овие вредности (2.157) и (2.158) во равенката (2.156) се добива:

$$dQ_2 = (Q_2 - Q_{20}) = \frac{Q_{20}}{X_{20}} dX_2 + \frac{1}{2} \frac{Q_{20}}{Y_0} dY = Q_{20} \frac{X_2 - X_{20}}{X_{20}} + \frac{Q_{20}}{2} \frac{Y - Y_0}{Y_0} \quad (2.159)$$

Со замена на изразите (2.152), (2.153), (2.159) во равенката (2.151) се добива:

$$A_0 \frac{d}{dt} (Y - Y_0) = \alpha_1 (X_1 - X_{10}) - \left( Q_{20} \frac{X_2 - X_{20}}{X_{20}} + \frac{Q_{20}}{2} \frac{Y - Y_0}{Y_0} \right) \quad (2.160)$$

Воведувајќи бездимензионални променливи:

$$y = \frac{Y - Y_0}{Y_0}, \quad x_1 = \frac{X_1 - X_{10}}{X_{10}}, \quad x_2 = \frac{X_2 - X_{20}}{X_{20}}$$

последната диференцијална равенка (2.160) добива облик:

$$A_0 Y_0 \frac{dy}{dt} = \alpha_1 X_{10} x_1 - Q_{20} x_2 - \frac{1}{2} Q_{20} y \quad (2.161)$$

Со средување на равенката (2.161) се добива:

$$A_0 Y_0 \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} Q_{20} y = Q_{10} x_1 - Q_{20} x_2 \quad (2.162)$$

Ако се има предвид условот (2.145) и ако се подели равенката (2.162) со вредноста  $Q_{\max}$ , се добива:

$$\frac{A_0 Y_0}{Q_{\max}} \dot{y} + \frac{1}{2} \frac{Q_0}{Q_{\max}} y = \frac{Q_0}{Q_{\max}} x_1 - \frac{Q_0}{Q_{\max}} x_2$$

од каде, со воведување на коефициентот на саморегулирање, дефиниран со равенката (2.149), се добива:

$$T_a \frac{dy}{dt} + qy = \lambda(x_1 - x_2) \quad (2.163)$$

Во оваа равенка константата :

$$T_a = \frac{A_0 Y_0}{Q_{\max}} = \frac{V_0}{Q_{\max}} \quad (2.164)$$

е време што е потребно при затворен вентил 2 ( $X_2 = 0$ ), резервоарот да се наполни од висина  $Y = 0$  до висина  $Y = Y_0$ , кога вентилот 1 нагло и потполно ќе се отвори ( $X_1 = X_{1,\max}$ , односно  $Q_1 = Q_{1,\max}$ ). Од тие причини, ова време се вика уште и време на залетување.

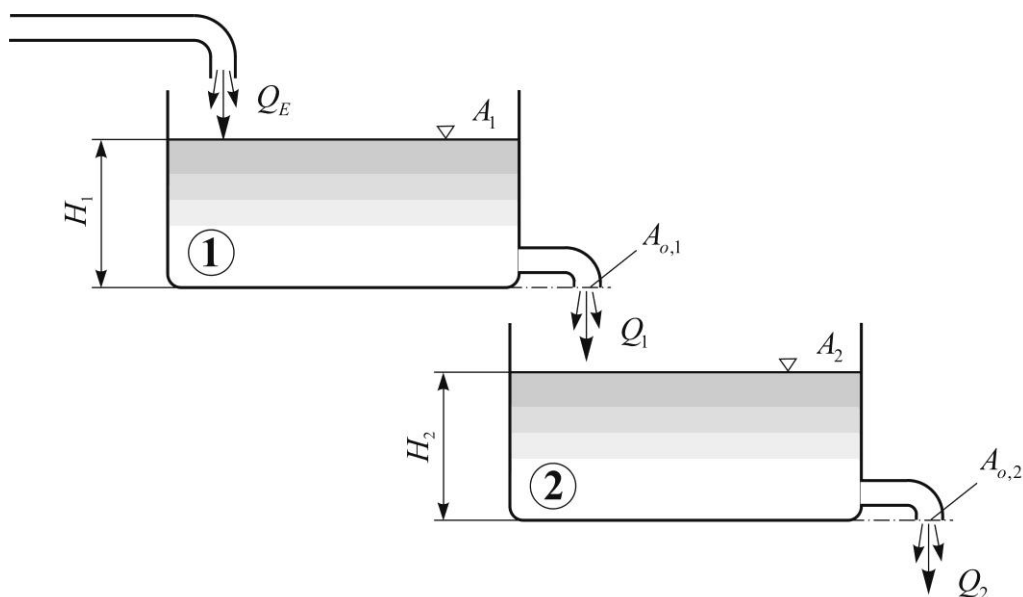
Ако равенката (2.163) се подели со  $q$  се добива равенката на однесувањето на резервоарот во конечен облик:

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = 2(x_1 - x_2) \quad (2.165)$$

Каде што е:  $T_1 = \frac{T_a}{2} = \frac{2A_0Y_0}{Q_0}$  - временска константа, која уште се вика временска константа на преносната функција на резервоарот.

менска константа на преносната функција на резервоарот.

**Задача 2.25.** Даден е хидрауличен систем од два резервоари, претставен на слика 2.49. Да се определи математичкиот модел со кој што се опишува овој хидрауличен систем, ако влез е протокот кој што се доведува во резервоарот 1 -  $Q_E(t)$ , а излез е висината на нивото на течноста во резервоарот 2 -  $H_2(t)$ .



Слика 2.49: Скица на хидрауличен систем со два резервоари

При поставување на математичкиот модел за хидрауличниот систем да се воведат следните почетни ограничувања:

- Резервоарите се со константен попречен пресек по целата нивна висина ( $A_i = const$ ).

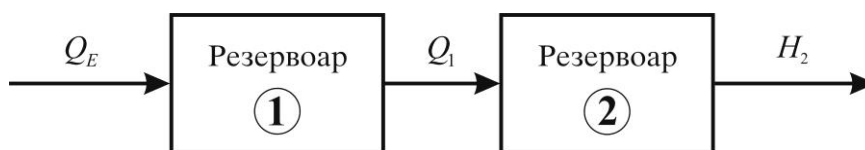
- Попречните пресеци на резервоарите се многу поголеми од отворите на истекување на течноста ( $A_i \gg A_{o,i}$ ), што условува да се релативно спори промените на висините на слободните нивоа на течноста во резервоарите.

Карактеристични параметри за секој од резервоарите (слика 2.49) се:

- $A_i$  ( $m^2$ ) - попречен пресек на резервоарот,
- $A_{o,i}$  ( $m^2$ ) - поречен пресек на отворот на истекување,
- $\mu_i$  - коефициент на истекување низ отворот,
- $H_i$  ( $m$ ) - висина на слободното ниво на течноста,
- $Q_i$  ( $m^3/s$ ) - волуменски проток на течноста.

**Решение:** Блок-дијаграмот за овој хидрауличен систем, според условите дадени во задачата е прикажан на слика 2.50.

При изведување на математичкиот модел за хидрауличниот систем со два резервоари, важат истите објаснувања, како во задача 2.24, приспособени за условите дадени во конкретниот пример.



Слика 2.50: Блок-дијаграм на хидрауличниот систем со два резервоари

Во стационарен режим на работа на системот важат следните релации:

$$\begin{aligned}
 Q_{E0} &= Q_{10} = Q_{20} = Q_0 = \text{const} \\
 Q_{10} &= \alpha_1 \cdot \sqrt{H_{10}}; & \alpha_1 &= \mu_1 A_{o,1} \sqrt{2g} = \text{const} \\
 Q_{20} &= \alpha_2 \cdot \sqrt{H_{20}}; & \alpha_2 &= \mu_2 A_{o,2} \sqrt{2g} = \text{const}.
 \end{aligned}
 \tag{2.166}$$

Според тоа, аналогно на равенка (2.151) за резервоарот 1 може да се напише равенката:

$$A_1 \frac{d}{dt}(H_1 - H_{10}) = (Q_E - Q_{E0}) - (Q_1 - Q_{10}), \quad (2.167)$$

Протокот на истекување на течноста од резервоарот 1 -  $Q_1(t)$ , се пресметува од изразот:

$$Q_1(t) = \mu_1 \cdot A_{o,1} \cdot \sqrt{2gH_1} = \alpha_1 \cdot \sqrt{H_1} \quad (2.168)$$

каде што е:  $\alpha_1 = \mu_1 A_{o,1} \sqrt{2g} = const.$

За мали промени на големините во околина на нивната номинална (стационарна) вредност, нелинеарната равенка (2.168), по однос на променливата  $H_1$ , може да се линеаризира на следниот начин:

$$\begin{aligned} dQ_1 &= (Q_1 - Q_{10}) = \left. \frac{dQ_1}{dH_1} \right|_{H_{10}} \cdot dH_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{H_1}} \Big|_{H_{10}} \cdot dH_1 \\ dQ_1 &= \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{\sqrt{H_{10}}}{H_{10}} \cdot (H_1 - H_{10}) = \frac{1}{2} \frac{Q_{10}}{H_{10}} \cdot (H_1 - H_{10}) \end{aligned} \quad (2.169)$$

Со замена на изразот (2.169) во равенката (2.167) се добива:

$$A_1 \frac{d}{dt}(H_1 - H_{10}) = (Q_E - Q_{E0}) - \frac{1}{2} \frac{Q_{10}}{H_{10}} \cdot (H_1 - H_{10}) \quad (2.170)$$

Се воведуваат следните бездимензионални променливи:

$$x = \frac{Q_E - Q_{E0}}{Q_{E0}}, \quad h_1 = \frac{H_1 - H_{10}}{H_{10}}, \quad q_1 = \frac{Q_1 - Q_{10}}{Q_{10}}, \quad y = \frac{H_2 - H_{20}}{H_{20}} \quad (2.171)$$

Според тоа, равенките (2.169) и (2.170) се сведуваат во облик:

$$q_1(t) = \frac{1}{2} h_1(t) \quad \Rightarrow \quad h_1(t) = 2 \cdot q_1(t) \quad (2.172)$$

$$A_1 \cdot H_{10} \cdot \frac{dh_1}{dt} + \frac{1}{2} Q_{10} \cdot h_1 = Q_{E0} \cdot x(t) \quad (2.173)$$

Со замена на равенка (2.172) во равенката (2.173) се добива математичкиот модел за првиот резервоар, согласно блок-дијаграмот претставен на слика 2.50:

$$T_1 \cdot \frac{dq_1}{dt} + q_1 = k_1 \cdot x(t) \quad (2.174)$$

Каде што се:  $T_1 = \frac{2A_1H_{10}}{Q_{10}}$  - временска константа за резервоарот 1,

$k_1 = \frac{Q_{E0}}{Q_{10}}$  - коефициент на засилување на преносната функција на резервоар 1.

Се воведува линеарниот оператор на диференцирање:

$$D \xleftarrow{\text{def}} \frac{d}{dt}$$

равенката (2.174) се сведува во облик:

$$(T_1D+1)q_1 = k_1 \cdot x(t) \quad (2.175)$$

Аналогно на постапката за изведување на математичкиот модел за резервоарот 1, за резервоарот 2, согласно равенката (2.173), се добива;

$$A_2 \cdot H_{20} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} Q_{20} \cdot y = Q_{10} \cdot q_1 \quad (2.176)$$

Равенката (2.176) може да се напише во облик:

$$T_2 \cdot \frac{dy}{dt} + y = k_2 \cdot q_1 \quad (2.177)$$

Каде што се:  $T_2 = \frac{2A_2H_{20}}{Q_{20}}$  - временска константа за резервоарот 2,

$k_2 = \frac{Q_{10}}{Q_{20}}$  - коефициент на засилување на преносната функција на резервоар 2.

Се воведува линеарниот оператор на диференцирање се добива:

$$(T_2D+1)y = k_2 \cdot q_1 \quad (2.178)$$

Системот на симултани диференцијални равенки (2.174) и (2.177) го сочинуваат вкупниот математички модел за хидрауличниот систем од два резервоари.

Со изразување на променливата  $q_1(t)$  од равенката (2.175) и со замена во равенката (2.178) се добива релацијата:

$$(T_2D+1)y(t) = \frac{k_1k_2}{T_1D+1} \cdot x(t),$$

од каде што се добива конечниот облик на математичкиот модел на хидрауличниот систем со два резервоари, ако влез е промената на протокот:  $Q_E(t)$  -

$\left( x(t) = \frac{Q_E - Q_{E0}}{Q_{E0}} \right)$ , а излез е промената на висината на нивото на течност во резервоарот 2:  $H_2(t)$  -

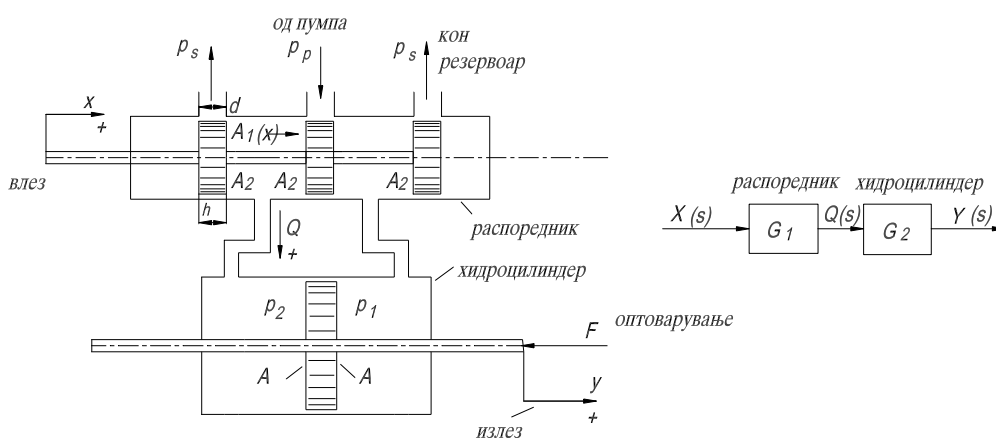
$\left( y(t) = \frac{H_2 - H_{20}}{H_{20}} \right)$ :

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dy}{dt} + y = k_1 k_2 \cdot x(t) \quad (2.179)$$

Вредноста на реалната променлива  $H_2(t)$  лесно може да се определи од добиената промена на вредноста на бездимензионалната променлива  $y(t)$  од изразот:

$$H_2(t) = y(t) \cdot H_{20} + H_{20} \quad (2.180)$$

**Задача 2.26.** Да се определи математичкиот модел на хидрауличниот систем составен од хидрауличен цилиндар и распоредник, прикажан на слика 2.51.



Слика 2.51: Скица на хидрауличен систем: хидрауличен цилиндар - распоредник



**Решение:** Постојат два приода при формирањето на математичкиот модел на хидрауличниот систем: хидрауличен цилиндар - распоредник, ако влез е поместувањето на клипчето на распоредникот -  $x(t)$ , а излез е поместувањето на клипњачата (клипот) на цилиндарот -  $y(t)$ .

Првиот е со воведување на голем број на поедноставувања и апроксимации и дава упростен математички модел (I), а вториот приод ги зема предвид некои повлијателни процеси во динамиката на овој хидрауличен систем и дава по-komplициран и попрецизен математички модел (II).

I. Се воведуваат следните поедноставувања и апроксимации:

1. Флуидот во хидрауличната инсталација е нестислив.
2. Распоредникот е со нулто прекривање, односно должината на клипчето  $h_k$  е еднаква на должината на отворот  $h_R$ .
3. Инерцијалните сили на сите подвижни маси се занемарливо мали.
4. Притисокот на флуидот кој се доведува од пумпата -  $p_p$  е константен.
5. Работните површини на клипот на хидроцилиндерот се еднакви.
6. Сите сили на триење се занемарливо мали.
7. Се занемаруваат сите реакциони хидродинамички сили при струењето на флуидот.
8. Волуменските загуби на флуид во хидрауличниот систем се занемаруваат.
9. Хидрауличниот систем се анализира без надворешното оптоварување  $F(t) = 0$ .
10. Карактеристиката на клипниот распоредник во работната област е линеарна:

Протокот што прострујува низ распоредникот може да се определи од изразот:

$$Q(t) = \mu \cdot A_1(x) \cdot \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = C_R \cdot x(t) \quad (2.181)$$

Каде што се:  $\mu = const$  - коефициент на струење низ распоредникот,

$A_1(x) = \pi \cdot d \cdot x$  - проточна површина низ распоредникот,

$d$  - дијаметар на клипчето на распоредникот,

$\Delta p = p_p - p_2 = const$  - разлика на притисоците во распоредникот,

$\rho$  - густина на флуидот во хидрауличниот систем,

$$C_R = \mu \cdot \pi \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \text{const} - \text{карактеристика на распоредникот.}$$

Од равенката на континуитет за волуменскиот проток во хидрауличниот систем, имајќи ги предвид сите воведени претпоставки, се добива:

$$Q = A \cdot \frac{dy}{dt} \quad (2.182)$$

Каде што е:  $A = \frac{\pi(D^2 - d_k^2)}{4}$  - работна површина на клипот на цилиндарот.

Со изедначување на равенките (2.181) и (2.182) се добива поедноставениот математички модел на хидрауличниот систем: хидрауличен цилиндар - распоредник:

$$A \cdot \frac{dy}{dt} = C_R \cdot x$$

односно:  $\frac{dy}{dt} = K \cdot x(t) \quad (2.183)$

Каде што е:  $K = \frac{C_R}{A}$  - карактеристика на хидрауличниот систем.

**II.** Ако некои од претходно применетите апроксимации не се воведат (1, 8, 9, 10) се добива покомплициран и попречижен математички модел за дадениот хидрауличен систем: хидрауличен цилиндар - распоредник.

Волуменскиот проток на работната течност низ проточната површина на распоредникот (рав. 2.181), ако се земе предвид и промената на оптоварувањето на хидрауличниот цилиндар, односно  $\Delta p = p_p - p_2 \neq \text{const}$ , тогаш истиот ќе биде претставен со нелинеарна функција:

$$Q(t) = \mu \cdot A_1(x) \cdot \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \mu \cdot A_1(x) \cdot \sqrt{\frac{2(p_p - p)}{\rho}} = f(x, p) \quad (2.184)$$

Каде што е:  $p \equiv p_2$  ако се занемарат отпорите на струење на флуидот во одводниот канал, односно  $p_1 = 0$ .

Нелинеарната функција (2.184) може да линеаризира во околина на работната (референтната) точка  $x_0$  и  $p_0$ , применувајќи го разложувањето во Тајлоров ред и занемарувајќи ги членовите од втор и повисок ред:

$$Q = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_0 \cdot x + \left. \frac{\partial Q}{\partial p} \right|_0 \cdot p \quad (2.185)$$

односно: 
$$Q = C_x \cdot x + C_p \cdot p \quad (2.186)$$

Каде што се  $C_x$  и  $C_p$  константи, односно:

$$C_x = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_0 = const \text{ и } C_p = \left. \frac{\partial Q}{\partial p} \right|_0 = const$$

Од друга страна, волуменскиот проток со којшто се исполнува работната комора на цилиндарот, ако се земе предвид компресибилноста на работниот флуид и ако се вкалкулира неконтролираното истекување на течноста (волуменските загуби), ќе се пресмета според образецот:

$$Q = Q_C + Q_P + Q_E \quad (2.187)$$

$Q_C$  - Некомпресибилна компонента на протокот, се користи за поместување на клипот.

Протокот  $Q_C$ , како што е познато, зависи од брзината на движење на клипот, односно:

$$Q_C = A \cdot v_C = A \cdot \frac{dy}{dt} \quad (2.188)$$

Каде што се:  $A = \frac{\pi(D^2 - d_k^2)}{4}$  - ефективна површина на клипот на цилиндарот.

$$v_C = \frac{dy}{dt} \text{ - брзина на движење на клипот.}$$

$Q_P$  - Проток низ процепите во хидрауличниот цилиндар (волуменски загуби).

Протокот низ процепите на клипот и други процепи на нехерметичките врски е пропорционален на разликата на притисоците од обете страни на процепите, односно:

$$Q_P = k_1 (p_2 - p_1) \quad (2.189)$$

каде што е:  $k_1$  - коефициент на неконтролирано истекување.

Коефициентот на пропорционалноста  $k_1$  зависи од повеќе фактори и како таков може да се најде во литература. За нов цилиндар со голема точност може да се усвои  $k_1 = 0$ , бидејќи нема волуменски загуби.

Ако се занемарат отпорите на струење во одводниот канал тогаш е  $p_1 = 0$ , па според тоа е  $p_2 - p_1 = p_2 \equiv p$ , односно:

$$Q_p = k_1 \cdot p \quad (2.190)$$

$Q_E$  - Компресибилна компонента на протокот (волуменски проток со којшто се надополнува количеството на течност поради компресија на истата).

Зависноста на промената на волуменот на течноста  $dV$  во однос на промената на притисокот  $dp$  е дадена со равенката:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dp}{E_F} \quad (2.191)$$

Каде што се:  $V$  - Волумен на заробено количество на течност.

$E_F$  - Модул на еластичност на течноста.

Протокот  $Q_E$  кој што служи за компензација на промената на волуменот на течноста  $dV$  при прираст на притисокот за  $dp$  се добива од равенката:

$$Q_E = \frac{dV}{dt} \quad (2.192)$$

односно со замена на равенка (2.191) во равенка (2.192) се добива:

$$Q_E = \frac{V}{E_F} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (2.193)$$

Со замена на равенките (2.188), (2.190) и (2.193) во равенката (2.187) се добива:

$$Q = A \cdot \frac{dy}{dt} + k_1 \cdot p + \frac{V}{E_F} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (2.194)$$

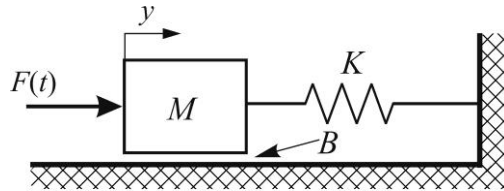
Со изедначување на равенките (2.186) и (2.194) се добива:

$$A \cdot \frac{dy}{dt} + (C_p + k_1) \cdot p + \frac{V}{E_F} \cdot \frac{dp}{dt} = C_x \cdot x \quad (2.195)$$

Силата со која што клипњачата дејствува на надворешното оптоварување на цилиндарот ќе изнесува:

$$F = A \cdot p \cdot \eta \quad (2.196)$$

Каде што е:  $\eta$  - степен на полезно дејство на цилиндарот.



Слика 2.52: Скица на оптоварувањето на хидрауличниот цилиндар

При оптоварување на цилиндарот, во најопшт облик, составено од маса, триење и пружина, како што е прикажано на слика 2.52, силата што треба да ја оддава клипњачата на цилиндарот  $F$  ќе се пресмета од равенката:

$$F = M \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + B \cdot \frac{dy}{dt} + K \cdot y \quad (2.197)$$

Со изедначување на равенките (2.197) и (2.196) се добива:

$$p = \frac{M}{A \cdot \eta} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{B}{A \cdot \eta} \frac{dy}{dt} + \frac{K}{A \cdot \eta} y \quad (2.198)$$

односно:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{M}{A \cdot \eta} \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{B}{A \cdot \eta} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{K}{A \cdot \eta} \frac{dy}{dt} \quad (2.199)$$

Со замена на изразите за промената на притисокот (2.198) и дивергенцијата на притисокот (2.199) во равенката (2.195) се добива конечниот облика на математичкиот модел за дадениот хидрауличен систем:

$$a_3 \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = b_0 \cdot x \quad (2.200)$$

Каде што константите на системот ќе се пресметаат од изразите:

$$a_3 = \frac{V \cdot M}{E_F \cdot A \cdot \eta}; \quad a_2 = \frac{V \cdot B}{E_F \cdot A \cdot \eta} + \frac{M}{A \cdot \eta} (C_p + k_1);$$

$$a_1 = A + \frac{V \cdot K}{E_F \cdot A \cdot \eta} + \frac{B}{A \cdot \eta} (C_p + k_1); \quad a_0 = \frac{K}{A \cdot \eta} (C_p + k_1); \quad b_0 = C_x.$$

---

## ТРЕТА ГЛАВА

---



### 3. ЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

**Задача 3.1.** Една голема класа на системи на автоматско управување е претставена со линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти чија општа формула е:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x}{dt^j} \quad m \leq n \quad (3.1)$$

При тоа е усвоено:  $y \equiv y(t)$  и  $x \equiv x(t)$ .

Да се докаже дека овој систем е линеарен.

**Решение:** Системот ќе биде линеарен ако важи принципот на суперпозиција, односно за влез:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad (3.2)$$

Одзивот на системот треба да биде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (3.3)$$

За влез во системот  $x_1$ , одзивот на системот ќе го обележиме со  $y_1$ , а за влез  $x_2$ , одзивот ќе биде  $y_2$ , односно со замена во (3.1) се добива:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_1}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x_1}{dt^j} \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_2}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x_2}{dt^j} \quad (3.5)$$

Ако на влезот во системот се доведе линеарна комбинација од претходно споменатите влезови, т.е.  $x = C_1 x_1 + C_2 x_2$  со замена во (3.1) одзивот на системот ќе биде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} &= \sum_{j=0}^m b_j \left[ C_1 \frac{d^j x_1}{dt^j} + C_2 \frac{d^j x_2}{dt^j} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^m \left[ C_1 b_j \frac{d^j x_1}{dt^j} + C_2 b_j \frac{d^j x_2}{dt^j} \right] = C_1 \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x_1}{dt^j} + C_2 \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x_2}{dt^j} = \end{aligned} \quad (3.6)$$

Со замена на равенките (3.4) и (3.5) во равенката (3.6), истата го добива следниот облик:

$$\begin{aligned} &= C_1 \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_1}{dt^i} + C_2 \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_2}{dt^i} = \\ &= \sum_{i=0}^n a_i \left[ C_1 \frac{d^i y_1}{dt^i} + C_2 \frac{d^i y_2}{dt^i} \right] = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} (C_1 y_1 + C_2 y_2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Со споредување на почетниот и крајниот дел од равенката (3.6) се добива:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} (C_1 y_1 + C_2 y_2) \quad (3.7)$$

од каде што лесно може да се заклучи дека важи:  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ , со што всушност се докажува принципот на суперпозиција.

**Задача 3.2.** Ако за системите на автоматско управување претставени со ординарната (обичната) диференцијална равенка (рав. 3.1), е дадено фундаменталното множество:

$$\{y_1(t), y_2(t), \dots, \dots, y_n(t)\} \quad (3.8)$$

Да се докаже дека секој слободен одзив ја задоволува диференцијалната равенка:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0 \quad (3.9)$$

**Решение:** Слободниот одзив претставува линеарна комбинација од членовите на фундаменталното множество, т.е. тој е даден со изразот:

$$y_a(t) = \sum_{k=0}^n C_k y_k \quad (3.10)$$

Според тоа со замена на равенката (3.10) во (3.9) се добива:

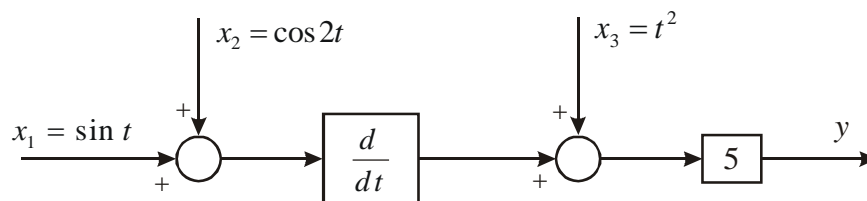
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} [y_a(t)] &= \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} \left[ \sum_{k=0}^n C_k y_k \right] = \\ &= \sum_{i=0}^n C_k \frac{d^i}{dt^i} \left[ \sum_{k=0}^n a_i y_k \right] = \sum_{i=0}^n C_k \sum_{k=0}^n a_i \frac{d^i y_k}{dt^i} = \\ &= \sum_{k=0}^n C_k \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_k}{dt^i} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Бидејќи секој член од фундаменталното множество ја задоволува диференцијалната равенка:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_k}{dt^i} = 0 \quad (3.12)$$

Со замена на равенката (3.12) во (3.11) доказот е очигледен, односно слободниот одзив ја задоволува диференцијалната равенка (3.9).

**Задача 3.3.** Да се определи излезот на системот прикажан на наредната слика.



Слика 3.1. Блок дијаграм за даден систем



**Решение:** Од блок-дијаграмот со кој е прикажан дадениот систем се гледа дека системот е составен од линеарни оператори, односно дадениот систем е линеарен. Според тоа може да се примени принципот на суперпозиција за определување на вкупниот одзив на системот. На основа на тоа следи:

$$x_2 = x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 5 \frac{d}{dt}(\sin t) = 5 \cos t \quad (3.13)$$

$$x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad y_2 = 5 \frac{d}{dt}(\cos 2t) = -10 \sin 2t \quad (3.14)$$

$$x_1 = x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_3 = -5t^2 \quad (3.15)$$

Вкупниот одзив на системот се добива за случај кога во системот се доведуваат сите влезови истовремено, односно кога вкупниот влез е еднаков на збирот од трите поединечни влезови:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \quad (3.16)$$

користејќи го принципот на суперпозиција, вкупниот одзив на системот, исто така, ќе претставува збир од поединечните излези, односно:

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = 5(\cos t - 2 \sin 2t - t^2). \quad (3.17)$$

**Задача 3.4.** Два система се дефинирани со помош на релацијата помеѓу влезот  $x(t)$  и излезот  $y(t)$  на следниот начин:

$$\text{а) } y(t) = x(t+T) \cdot e^{(t+T)}; \quad T > 0 \quad (3.18)$$

$$\text{б) } y(t) = x(t-T) \cdot e^{(t-T)}; \quad T > 0 \quad (3.19)$$

Дали било кој од овие два система е каузален?

**Решение:** Ако се замени во двата система (3.18) и (3.19) дека е  $t = T$ , се добива:

$$\text{а) } y(T) = x(2T) \cdot e^{2T} \quad (3.20)$$

Тоа значи дека ако го разгледуваме системот во моментот  $t = T$ , односно за да ја добиеме вредноста за  $y(T)$  потребно е да ја познаваме вредноста за  $x(2T)$ , што значи дека системот предњачи, а таков систем е физички неостварлив и не е каузален.

Пример за ваков тип на систем е ако се пушти балон од одредена висина, а тој што треба да го фати балонот треба во истиот момент да се појави на местото каде што ќе падне балонот, односно местото треба точно да се предвиди.

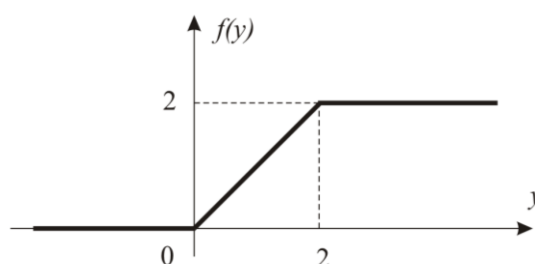
$$б) \quad y(T) = x(0) \cdot 1 \quad (3.21)$$

Ова претставува модел на физички остварлив систем, поточно систем со кашење. Тој е каузален систем.

**Задача 3.5.** Дадена е диференцијалната равенка на еден физички систем:

$$5 \frac{d^3 y}{dt^3} + 14 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + f(y) = 0 \quad (3.22)$$

Каде што функцијата  $f(y)$  е дадена со следниот дијаграм:



Слика 3.2. Графички приказ на функцијата  $f(y)$

Да се претстави овој нелинеарен систем како систем кој е по делови линеарен.

**Решение:** Од дијаграмот се гледа дека функцијата  $f(y)$  е линеарна во поедините интервали. Од таму и диференцијалната равенка (3.22), со која е опишан системот, ќе се разгледува во тие интервали. Според тоа се добива:

$$5 \frac{d^3 y}{dt^3} + 14 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 0 \quad y \in (-\infty, 0) \quad (3.23)$$

$$5 \frac{d^3 y}{dt^3} + 14 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad y \in [0, 2] \quad (3.24)$$

$$5 \frac{d^3 y}{dt^3} + 14 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2 = 0 \quad y \in (2, +\infty) \quad (3.25)$$

**Задача 3.6.** Да се определи карактеристичниот полином и карактеристичната равенка за секој од системите:

$$\text{а) } \frac{d^4 y}{dt^4} + 9 \frac{d^2 y}{dt^2} + 7y = x \quad (3.26)$$

$$\text{б) } \frac{d^3 y}{dt^3} + \sin t \frac{d^2 y}{dt^2} + t^2 \frac{dy}{dt} + ty = x \quad (3.27)$$

$$\text{в) } \frac{d^4 y}{dt^4} + 9 \frac{d^2 y}{dt^2} + 7y = \sin t \quad (3.28)$$

**Решение:** Усвоено е линеарниот оператор на диференцирање скратено да се означува на следниот начин:

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \quad D^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} \quad (3.29)$$

Според тоа следи:

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad D^4 y + 9D^2 y + 7y &= x \\ (D^4 + 9D^2 + 7)y &= x \end{aligned} \quad (3.30)$$

Од диференцијалната равенка (3.30), која всушност е идентична со диференцијалната равенка (3.26), директно се определуваат карактеристичниот полином и карактеристичната равенка, односно:

- карактеристичен полином:

$$f(D) = D^4 + 9D^2 + 7 \quad (3.31)$$

- карактеристична равенка:

$$D^4 + 9D^2 + 7 = 0 \quad (3.32)$$

б) Со замена на линеарниот оператор (3.29) во равенката (3.27) се добива:

$$\begin{aligned} D^3 y + \sin t D^2 y + t^2 D y + ty &= x \\ (D^3 + \sin t D^2 + t^2 D + t)y &= x \end{aligned} \quad (3.33)$$

Од каде следи: - карактеристичен полином:

$$f(D) = D^3 + \sin t D^2 + t^2 D + t \quad (3.34)$$

- карактеристична равенка:

$$D^3 + \sin t D^2 + t^2 D + t = 0 \quad (3.35)$$

в) Идентично се добива и за равенката (3.28):

$$D^4 y + 9D^2 y + 7y = \sin t$$

$$(D^4 + 9D^2 + 7)y = \sin t \quad (3.36)$$

односно: - карактеристичен полином:

$$f(D) = D^4 + 9D^2 + 7 \quad (3.37)$$

-карактеристична равенка:

$$D^4 + 9D^2 + 7 = 0 \quad (3.38)$$

**Задача 3.7.** Да се определат фундаменталните множества за диференцијалните равенки:

а)  $\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = x \quad (3.39)$

б)  $3\frac{d^3 y}{dt^3} + 9\frac{d^2 y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} + 3y = x + 1 \quad (3.40)$

в)  $\frac{d^3 y}{dt^3} + 5\frac{d^2 y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 4y = x \quad (3.41)$

г)  $\frac{d^3 y}{dt^3} + 4\frac{d^2 y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 4y = x \quad (3.42)$

д)  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y = x \quad (3.43)$

**Решение:**

а) Најпрво се определува карактеристичната равенка за диференцијалната равенка (3.39):

$$D^2 - 2D + 1 = 0 \quad (3.44)$$

односно:  $(D-1)^2 = 0$ .

Потоа се пресметуваат решенијата на карактеристичната равенка (3.44), со чија помош се определуваат членовите од фундаменталното множество.

Според тоа се добива:

$$D_1 = D_2 = 1$$

$$\{e^t; te^t\} \quad (3.45)$$

б) Аналогно на претходниот пример следи:

$$3D^3 + 9D^2 + 9D + 3 = 0 \quad (3.46)$$

$$3(D^3 + 3D^2 + 3D + 1) = 0$$

$$3(D+1)^3 = 0$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = -1$$

Според тоа фундаменталното множество ќе биде:

$$\{e^{-t}; te^{-t}; t^2 e^{-t}\} \quad (3.48)$$

в)  $D^3 + 5D^2 + 8D + 4 = 0$  <sup>1)</sup> (3.49)

$$(D+1)(D+2)(D+2) = 0$$

$$D_1 = -1; D_2 = D_3 = -2$$

Фундаментално множество:

$$\{e^{-t}; e^{-2t}; te^{-2t}\} \quad (3.50)$$

<sup>1)</sup> ПОТСЕТУВАЊЕ:

Од простите множители на слободниот член, со проверка, се бара едно можно решение на равенката (3.49). За конкретниот пример можни решенија се: -1, -2 и -4. Очигледно е дека  $D_1 = -1$  е едно решение. Другите две решенија се добиваат со делење на полиномот (3.49) со решението  $(D+1)$ , односно:

$$\begin{aligned} (D^3 + 5D^2 + 8D + 4) : (D+1) &= D^2 + 4D + 4 \\ - (D^3 + D^2) & \\ \hline 4D^2 + 8D & \\ - (4D^2 + 4D) & \\ \hline 4D + 4 & \\ - (4D + 4) & \\ \hline & \end{aligned}$$

Според тоа, другите две решенија се добиваат со решавање на квадратната равенка:

$$D^2 + 4D + 4 = 0$$

односно:  $(D+2)^2 = 0$

од каде што се добива:  $D_2 = -2, D_3 = -2$

$$\text{г) } D^3 + 4D^2 + 6D + 4 = 0 \quad (3.51)$$

$$(D+2)(D+1-j)(D+1+j) = 0$$

$$D_1 = -2; \quad D_2 = -1 + j; \quad D_3 = -1 - j$$

Фундаментално множество:

$$\{e^{-2t}; e^{-(1-j)t}; e^{-(1+j)t}\} \quad (3.52)$$

$$\text{д) } D^2 + 5D + 4 = 0 \quad (3.53)$$

$$(D+1)(D+4) = 0$$

$$D_1 = -1; \quad D_2 = -4$$

Фундаментално множество:

$$\{e^{-t}; e^{-4t}\} \quad (3.54)$$

**Задача 3.8.** Математичкиот модел на еден физички систем е претставен со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 4y = \frac{dx}{dt} + 4x \quad (3.55)$$

Да се определи: фундаменталното множество, слободниот одзив, форсираниот одзив и тоталниот одзив, ако се дадени почетните услови:

$$y(0) = 0; \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1 \quad (3.56)$$

и ако на влезот се доведе експоненцијална функција:

$$x(t) = e^{-3t}; \quad t \geq 0.$$

**Решение:** Од карактеристичната равенка на математичкиот модел на системот (3.55) се определува фундаменталното множество, односно:

$$D^2 + 5D + 4 = 0$$

$$(D+1)(D+4) = 0$$

$$D_1 = -1; \quad D_2 = -4$$

од каде што следи:

$$\{e^{-t}; e^{-4t}\} \quad (3.57)$$

Слободниот одзив на системот ќе биде:

$$y_a(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t} \quad (3.58)$$

Коефициентите  $C_1$  и  $C_2$  се определуваат од почетните услови на системот:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} &= -C_1 - 4C_2 = 1 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Со решавање на системот од линеарни равенки (3.59) се добиваат вредностите на коефициентите:

$$C_1 = \frac{1}{3}; \quad C_2 = -\frac{1}{3} \quad (3.60)$$

Со замена на (3.60) во равенката (3.58) се добива слободниот одзив на системот:

$$y_a(t) = \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-4t} \quad (3.61)$$

Вкупниот влез во системот ќе го поприми следниот облик:

$$x_v(t) = \frac{dx}{dt} + 4x = \frac{d(e^{-3t})}{dt} + 4e^{-3t} = e^{-3t} \quad (3.62)$$

Од дефиницијата за тежинската функција следи:

$$\omega(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^2 C_i y_i & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

со почетни услови (по дефиниција):

$$\omega(0) = 0; \quad \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = 1 \quad (3.64)$$

Бидејќи почетните услови (3.63) се совпаѓаат со почетните услови на системот (3.56) се добива:

$$\omega(t) \equiv y_a(t) = \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-4t} \quad (3.65)$$

Форсираниот одзив на системот (3.55) за влез даден со равенката (3.62) се определува со помош на конволуциониот интеграл:

$$y_b(t) = \int_0^t \omega(t-\tau) \cdot x_v(\tau) \cdot d\tau = \frac{1}{3} \cdot \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-4(t-\tau)}] \cdot e^{-3\tau} \cdot d\tau$$

$$y_b(t) = \frac{1}{3} e^{-4t} - \frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{6} e^{-t} \quad (3.66)$$

Тоталниот одзив на системот (3.55) ќе биде збир од слободниот одзив (3.61) и форсираниот одзив (3.66), односно:

$$y(t) = y_a(t) + y_b(t) = -\frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-t} \quad (3.67)$$

**Задача 3.9.** Да се определат одзивите на системите опишани со своите диференцијални равенки (3.41) и (3.42), дадени во задача 3.7:

$$\text{а) } \frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 4y = x$$

$$\text{б) } \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 4y = x$$

ако се дадени почетните услови за системите:

$$y(0) = 0; \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=0} = 1 \quad (3.68)$$

и ако на влезот се доведе единечна одскочна функција:

$$x(t) = u(t)$$

**Решение:** а) Фундаменталното множество за системот е дадено со равенка (3.50), односно:

$$\{e^{-t}; e^{-2t}; te^{-2t}\}$$

Слободен одзив на системот ќе биде:

$$y_a(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 t e^{-2t}$$



Коефициентите  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  се определуваат од почетните услови (3.68):

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} &= -C_1 - 2C_2 + C_3 = 0 \\ \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t=0} &= C_1 + 4C_2 - 4C_3 = 1 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Со решавање на системот од линеарни равенки (3.69) се добива:

$$C_1 = 1; \quad C_2 = -1; \quad C_3 = -1$$

односно, слободниот одзив на системот ќе биде:

$$y_a(t) = e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t} \quad (3.70)$$

Од дефиницијата за тежинската функција следи дека е:

$$\omega(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^3 C_i y_i; & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Почетните услови за тежинската функција се дадени по дефиниција:

$$\omega(0) = 0; \quad \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=0} = 1$$

односно:

$$\omega(t) \equiv y_a(t) = e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t} \quad (3.71)$$

За влез во системот:  $x(t) = u(t)$ , форсираниот одзив се определува со помош на конволуциониот интеграл:

$$\begin{aligned} y_b(t) &= \int_0^t \omega(t-\tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} - (t-\tau) \cdot e^{-2(t-\tau)}] \cdot u(\tau) \cdot d\tau \quad 2) \\ y_b(t) &= \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \int x e^{ax} dx &= \frac{e^{ax}}{a^2} (ax-1) + C \\ \int x^n e^{ax} dx &= \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx + C \end{aligned}$$

Тоталниот одзив на системот (3.41) ќе биде збир од слободниот одзив (3.70) и форсираниот одзив (3.72), односно:

$$y(t) = y_a(t) + y_b(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} \quad (3.73)$$

Проверка: 
$$y(0) = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0;$$

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \Big|_{t=0} = 1 + 1 - 1 = 1$$

б) Фундаменталното множество за системот е дадено со равенка (3.52), односно:

$$\{e^{-2t}; e^{-(1-j)t}; te^{-(1+j)t}\}$$

Слободен одзив на системот ќе биде:

$$y_a(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-(1-j)t} + C_3te^{-(1+j)t}$$

Коефициентите  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  се определуваат од почетните услови (3.68):

$$y(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = -2C_1 - (1-j)C_2 - (1+j)C_3 = 0 \quad (3.74)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \Big|_{t=0} = 4C_1 - 2jC_2 + 2jC_3 = 1$$

Со решавање на системот од линеарни равенки (3.74) се добива:

$$C_1 = \frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{1}{4}(1+j); \quad C_3 = -\frac{1}{4}(1-j)$$

односно, слободниот одзив на системот ќе биде:

$$y_a(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}(1+j)e^{-(1-j)t} - \frac{1}{4}(1-j)e^{-(1+j)t} \quad (3.75)$$

Од дефиницијата за тежинската функција следи дека е:

$$\omega(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^3 C_i y_i; & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Почетните услови за тежинската функција се дадени по дефиниција:

$$\omega(0)=0; \quad \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=0} = 1$$

односно:

$$\omega(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{4}(1+j)e^{-(1-j)t} - \frac{1}{4}(1-j)e^{-(1+j)t} \quad (3.76)$$

За влез во системот:  $x(t) = u(t)$ , форсираниот одзив се определува со помош на конволуциониот интеграл:

$$\begin{aligned} y_b(t) &= \int_0^t \omega(t-\tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_0^t \left[ \frac{1}{2}e^{-2(t-\tau)} - \frac{1}{4}(1+j)e^{-(1-j)(t-\tau)} - \frac{1}{4}(1-j)e^{-(1+j)(t-\tau)} \right] \cdot u(\tau) \cdot d\tau \\ y_b(t) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}je^{-(1-j)t} - \frac{1}{4}je^{-(1+j)t} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Тоталниот одзив на системот (3.42) ќе биде збир од слободниот одзив (3.75) и форсираниот одзив (3.77), односно:

$$y(t) = y_a(t) + y_b(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-(1-j)t} - \frac{1}{4}e^{-(1+j)t} \quad (3.78)$$

Ако решението го напишеме со примена на Ојлеровите формули <sup>3)</sup> се добива:

$$y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} \cos t \quad (3.79)$$

односно:

$$y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-t} (e^{-t} - 2 \cos t)$$

<sup>3)</sup> Ојлерови формули:

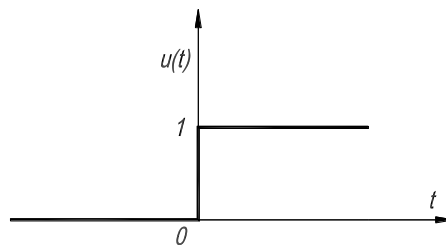
$$e^{x \pm j\varphi} = e^x (\cos \varphi \pm j \sin \varphi)$$

$$\begin{aligned} \text{односно:} \quad e^{j\varphi} &= \cos \varphi + j \sin \varphi & \cos \varphi &= \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \\ e^{-j\varphi} &= \cos \varphi - j \sin \varphi & \sin \varphi &= \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \end{aligned}$$

**ОСНОВНИ ФУНКЦИИ**

## I. Единечна отскочна функција (Хевисајдова функција)

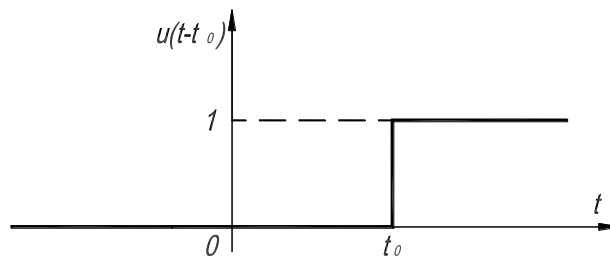
$$u(t) = \begin{cases} = 0; & t \in (-\infty, 0) \\ \in [0, 1]; & t = 0 \\ = 1; & t \in (0, +\infty) \end{cases}$$



Слика 3.3. Единечна отскочна функција

## II. Единечна отскочна функција со каснење

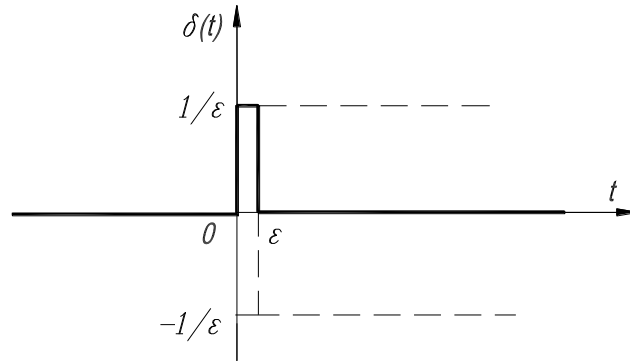
$$u(t - t_0) = \begin{cases} = 0; & t \in (-\infty, t_0) \\ \in [0, 1]; & t = t_0 \\ = 1; & t \in (t_0, +\infty) \end{cases}$$



Слика 3.4. Единечна отскочна функција со каснење

### III. Единична импулсна функција (Диракова функција)

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [u(t) - u(t - \varepsilon)]$$

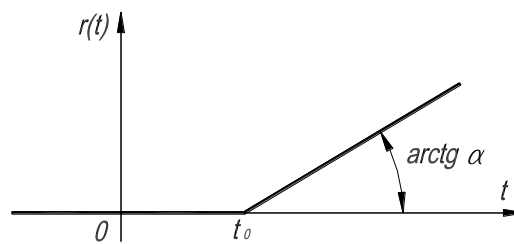


Слика 3.5. Единична импулсна функција

Особина: 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

### IV. Единична рампа со касење

$$r(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau - t_0) d\tau = \begin{cases} 0; & t \in (-\infty, t_0) \\ \text{tg } \alpha \cdot t; & t \in (t_0, +\infty); \quad \alpha \in (-\infty; +\infty) \end{cases}$$

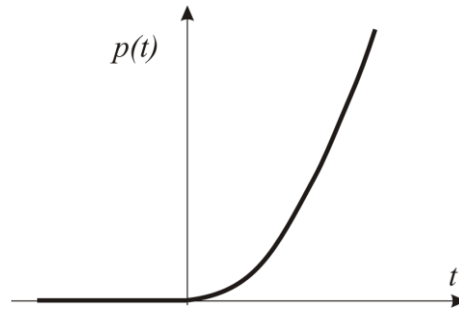


Слика 3.6. Единична рампа со касење

### V. Единична парабола

$$p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) d\tau = \begin{cases} 0; & t \in (-\infty, 0) \\ \beta \cdot t^2; & t \in (0, +\infty); \quad 0 \leq \beta \leq 0 \end{cases}$$

односно: 
$$p(t) = \beta \cdot t^2 \cdot u(t)$$



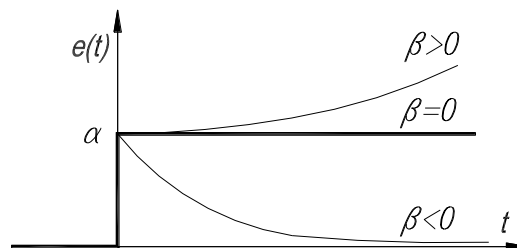
Слика 3.7. Единична параболоа

## VI. Единична експоненцијална функција

$$e(t) = \begin{cases} = 0; & t \in (-\infty, 0) \\ \in [0, \alpha]; & t = 0; \quad \alpha \in (-\infty, +\infty) \\ = \alpha e^{\beta t}; & t \in (0, +\infty); \quad 0 \leq \beta \leq 0 \end{cases}$$

или:

$$e(t) = \alpha e^{\beta t} u(t)$$



Слика 3.8. Единична експоненцијална функција

**Задача 3.10.** Со примена на особината на селективност на импулсната функција да се определи вредноста на функциите:

$$\text{а) } y(t) = \int_5^8 t^2 \delta(t-6) dt \quad (3.80)$$

$$\text{б) } y(t) = \int_0^4 \sin t \delta(t-7) dt \quad (3.81)$$

$$\text{в) } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}t\right) \delta(t-1) dt \quad (3.82)$$

**Решение:** Од особината на селективност на импулсната функција следува:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (3.83)$$

Со примена на оваа особина на конкретните примери ќе се добие:

$$\text{а) } y(t) = \int_5^8 t^2 \delta(t-6) dt = t^2 \Big|_{t=6} = 36 \quad (3.84)$$

$$\text{б) } y(t) = \int_0^4 \sin t \delta(t-7) dt = \sin t \Big|_{t=7} = 0 \quad (3.85)$$

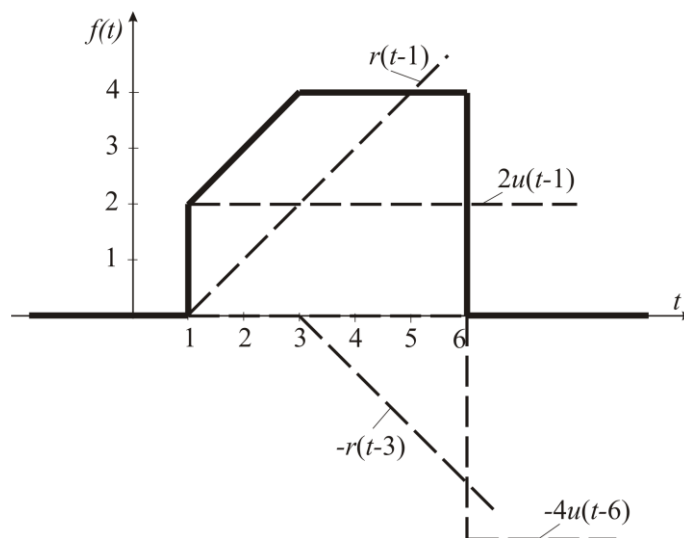
Вредноста на функцијата е еднаква на нула, бидејќи импулсната функција се појавува надвор од разгледуваниот интервал на интегрирање.

$$\text{в) } y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}t\right) \delta(t-1) dt = e^{-t} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_{t=1} = e^{-1} = 0,36788 \quad (3.86)$$

**Задача 3.11.** Следната функција да се прикаже со помош на посебните (основните) функции:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ t+1, & 1 < t \leq 3 \\ 4, & 3 < t \leq 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases} \quad (3.87)$$

**Решение:** Дадената функција се скицира, а потоа се апроксимира со помош на основните функции, како што може да се види од слика 3.9.



Слика 3.9 Графички приказ на функцијата  $f(t)$

Според тоа функцијата  $f(t)$  може да се напише како збир од посените функции:

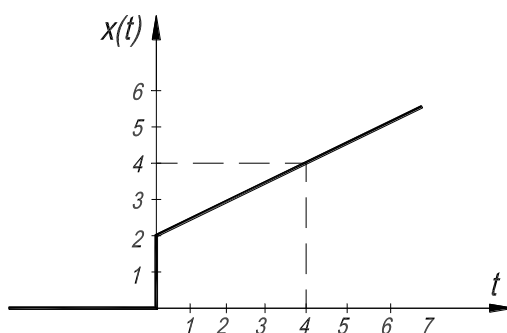
$$f(t) = 2u(t-1) + r(t-1) - r(t-3) - 4u(t-6) \quad (3.88)$$

**Задача 3.12.** Да се определи одзивот во временски домен и да се определи сталната состојба и преодниот одзив за  $t \geq 0$ , за системот опишан со неговиот математички модел:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3 = x(t) \quad (3.89)$$

при почетни услови:  $y(0) = 0$ ;  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1$

ако на влезот се доведе следната функција, прикажана на слика 3.10:



Слика 3.10. Функција на влез во системот

**Решение:** - Фундаментално множество:

$$\begin{aligned} D^2 + 4D + 3 &= 0 \\ (D + 3)(D + 1) &= 0 \\ D_1 &= -1; D_2 = -3 \\ \{e^{-t}; e^{-3t}\} & \end{aligned} \quad (3.90)$$

- Слободен одзив на системот:

$$y_a(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} \quad (3.91)$$

Коефициентите  $C_1$  и  $C_2$  се определуваат од почетните услови:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} &= -C_1 - 3C_2 = 1 \end{aligned}$$



од каде се добива:

$$C_1 = \frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{1}{2}$$

Со замена на вредностите на коефициентите  $C_1$  и  $C_2$  во равенка (3.91) се добива слободниот одзив на системот, односно:

$$y_a(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \quad (3.92)$$

- Форсиран одзив на системот:

Функцијата која се доведува на влезот од системот е прикажана на слика 3.10. и може да се напише во следниот облик:

$$x(t) = 2u(t) + r(t) = 2u(t) + 0,5t \quad (\operatorname{tg} \alpha = 0,5) \quad (3.93)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (3.94)$$

Од дефиницијата за тежинската функција следува:

$$\omega(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 C_i y_i; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

Почетните услови за тежинската функција се дадени по дефиниција:

$$\omega(0) = 0; \quad \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = 1$$

од каде се добива:

$$\omega(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \quad (3.95)$$

Форсираниот одзив за влез  $x_1(t) = 2u(t)$  ќе изнесува:

$$\begin{aligned} y_{b1}(t) &= \int_0^t \omega(t-\tau)x_1(\tau)d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}] \cdot 2 \cdot u(\tau)d\tau = \\ &= 1 - e^{-t} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t} \\ y_{b1}(t) &= \frac{2}{3} - e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \end{aligned} \quad (3.96)$$

Форсираниот одзив за влез  $x_2(t) = 0,5t$  ќе биде:

$$\begin{aligned} y_{b2}(t) &= \int_0^t \omega(t-\tau)x_2(\tau)d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}] \cdot \frac{1}{2} \cdot t d\tau \\ y_{b2}(t) &= -\frac{2}{9} + \frac{1}{6}t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{36}e^{-3t} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Вкупниот форсиран одзив ќе изнесува:

$$y_b = y_{b1} + y_{b2} = -\frac{4}{9} + \frac{1}{6}t - \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{11}{36}e^{-3t} \quad (3.98)$$

Тоталниот одзив претставува сума од слободниот и форсираниот одзив:

$$\begin{aligned} y &= y_a + y_b = -\frac{4}{9} + \frac{1}{6}t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{7}{36}e^{-3t} \\ y &= -0,44 + 0,17t + 0,25e^{-t} - 0,19e^{-3t} \end{aligned} \quad (3.99)$$

- Стална и преодна состојба на одзивот:

$$\begin{aligned} y &= y_{ss} + y_{ps} && (y_a \neq y_{ss}) \text{ и } (y_b \neq y_{ps}) \\ y_{ss} &= \frac{1}{6}t - \frac{4}{9} && \lim_{t \rightarrow \infty} y_{ss} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$y_{ps} = -\frac{7}{36}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{ps} = 0 \quad (3.101)$$

**Задача 3.13.** Математичкиот модел од еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = x \quad (3.102)$$

влезот во системот е  $x(t)$ , а излезот е  $y(t)$ .

- Да се определат две различни основни множества.
- Да се определат тежинските функции за секое од основните множества најдени под (а).
- Да се определи единечниот импулсен одзив за овој систем.

**Решение:** а). Се определува основното (фундаменталното) множество:

$$D^2 + 5D + 6 = 0$$

$$(D + 2) \cdot (D + 3) = 0$$

односно:  $D_1 = -2, D_2 = -3$

Според тоа, првото основно множество ќе биде:

$$\{e^{-2t}; e^{-3t}\} \quad (3.103)$$

Основното множество не е еднозначно. Било која линеарна комбинација од членовите на веќе определеното основно множество (3.103), која е линеарно независна, ќе претставува ново основно множество. За таа цел е доволно да се формира квадратна детерминанта од ред 2 x 2, која е различна од нула, односно:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad (3.104)$$

Според тоа, второто основно множество ќе биде:

$$\{z_1(t), z_2(t)\}$$

каде што се:

$$z_1(t) = 1 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot e^{-3t}$$

$$z_2(t) = 0 \cdot e^{-2t} + 1 \cdot e^{-3t}$$

односно:

$$\{e^{-2t} + e^{-3t}; e^{-3t}\} \quad (3.105)$$

б). Еден систем има само една тежинска функција:

$$\omega(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 C_i y_i; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

$$\omega(0) = 0, \quad \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = 1$$

*Проверка:* Се определува тежинската функција од првото основно множество (3.103), односно:

$$\omega_1(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-3t}$$

Од дадените почетни услови се добива:

$$\omega_1(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \quad (3.106)$$

Се определува тежинската функција од второто основно множество (3.105):

$$\omega_2(t) = C_1(e^{-2t} + e^{-3t}) + C_2e^{-3t} = C_1e^{-2t} + C_1e^{-3t} + C_2e^{-3t}$$

Од почетните услови следува:

$$\begin{aligned} C_1 + C_1 + C_2 &= 0 \\ -2C_1 - 3C_1 - 3C_2 &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2; \quad C_1 = 1$$

односно:

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= e^{-2t} + e^{-3t} - 2e^{-3t} = e^{-2t} - e^{-3t} \\ \omega_2(t) &= e^{-2t} - e^{-3t} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Очигледно е дека тежинската функција е идентична за двете основни множества.

в). По дефиниција, единечниот импулсен одзив е еднаков на тежинската функција на системот.

*Доказ:* За почетни услови еднакви на нула слободниот одзив на системот е еднаков на нула, односно:

$$y_a(t) = 0 \quad (3.108)$$

Форсираниот одзив се добива со помош на конволуциониот интеграл:

$$\begin{aligned} y_b(t) &= \int_0^t \omega(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau = \int_0^t [e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}] \cdot \delta(\tau) d\tau = \\ &= e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} \delta(\tau) d\tau - e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau} \delta(\tau) d\tau = e^{-2t} e^{2\tau} \Big|_{\tau=0} - e^{-3t} e^{3\tau} \Big|_{\tau=0} \\ y_b(t) &= e^{-2t} - e^{-3t} \end{aligned} \quad (3.109)$$

\*) Се користи селективното својство на импулсната функција.

Тоталниот единечен импулсен одзив ќе биде:

$$y_\delta(t) = y_a(t) + y_b(t) = e^{-2t} - e^{-3t} \equiv \omega(t) \quad (3.110)$$

**Задача 3.14.** Математичкиот модел од еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 2y = x \quad (3.111)$$

Влезот во системот е  $x(t)$ , а излезот е  $y(t)$ . Почетните услови на системот се:

$$y(0) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=0} = 2 \quad (3.112)$$

Влезот во системот е единечна импулсна функција:  $x(t) = \delta(t)$ .

Да се определат следните одзиви: слободниот, форсираниот, тоталниот, како и преодната и сталната состојба на одзивот.

**Решение:** - Фундаментално (основно) множество:

$$\begin{aligned} D^3 + 3D^2 + 4D + 2 &= 0 \\ (D+1)(D+1+j)(D+1-j) &= 0 \\ D_1 = -1; \quad D_2 = -1-j; \quad D_3 = -1+j \\ \{e^{-t}; \quad e^{-(1+j)t}; \quad e^{-(1-j)t}\} \end{aligned} \quad (3.113)$$

- Слободен одзив на системот:

$$y_a(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-(1+j)t} + C_3 t e^{-(1-j)t}$$

Од почетните услови на системот (3.112) се добива:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} &= -C_1 - (1+j)C_2 - (1-j)C_3 = 0 \\ \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=0} &= C_1 + 2jC_2 - 2jC_3 = 2 \end{aligned}$$

односно:

$$C_1 = 2; \quad C_2 = -1; \quad C_3 = -1$$

Според тоа, слободниот одзив на системот ќе биде:

$$y_a(t) = 2e^{-t} - e^{-(1+j)t} - e^{-(1-j)t} \quad (3.114)$$

- Тежинска функција на системот:

$$\omega(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-(1+j)t} + C_3 t e^{-(1-j)t}$$

Од почетните услови дадени по дефиниција:

$$\omega(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = -C_1 - (1+j)C_2 - (1-j)C_3 = 0$$

$$\left. \frac{d^2\omega}{dt^2} \right|_{t=0} = C_1 + 2jC_2 - 2jC_3 = 1$$

се добива:  $C_1 = 1; \quad C_2 = -\frac{1}{2}; \quad C_3 = -\frac{1}{2}$

односно:

$$\omega(t) = e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-(1+j)t} - \frac{1}{2}e^{-(1-j)t} \quad (3.115)$$

- Форсираниот (принудниот) одзив на системот за влез единечна импулсна функција, според дефиниција е еднаков на тежинската функција:

$$y_b(t) = e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-(1+j)t} - \frac{1}{2}e^{-(1-j)t} \quad (3.116)$$

- Тотален (вкупен) одзив на системот:

$$y(t) = y_a(t) + y_b(t) = 3e^{-t}(1 - \cos t) \quad (3.117)$$

- Стална и преодна состојба на одзивот:

$$y = y_{ss} + y_{ps}$$

$$y_{ss} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{ss} \neq 0 \quad (3.118)$$

$$y_{ps} = 3e^{-t}(1 - \cos t) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{ps} = 0 \quad (3.119)$$

**Задача 3.15.** Да се определи: пригушувањето на системот  $\xi$ , непригушената природна фреквенција  $\omega_n$ , пригушената природна фреквенција  $\omega_d$ , пригушниот коефициент  $\alpha$  и временската константа  $\tau$  за следниот систем од втор ред:

$$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 8y = 8x \quad (3.120)$$

**Решение:** Општиот облик на диференцијалната равенка од втор ред е:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = k \cdot \omega_n^2 x \quad (3.121)$$

Со споредување на равенка (3.120) и (3.121) лесно може да се добијат бараните големини ( $k=1$ ):

$$\xi = \frac{1}{2} - \text{степен на пригушување,}$$

$$\omega_n = 2 - \text{природна непригушена фреквенција,}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{3} - \text{природна пригушена фреквенција,}$$

$$\alpha = \xi\omega_n = 1 - \text{пригушен коефициент,}$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = 1(s) - \text{временска константа.}$$

**Задача 3.16.** Даден систем е опишан со математички модел, преку диференцијална равенка од втор ред:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 2x(t) \quad (3.122)$$

Да се определи прескокот, времето на воспоставување и времето на каснење на системот ако на влезот се доведе единична отскочна функција и ако почетните услови на системот се еднакви на нула.

**Решение:** Општиот облик на диференцијалната равенка за систем од втор ред е:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = k \cdot \omega_n^2 x$$

Со споредување на равенка (3.122) и (3.123) лесно може да се добијат бараните големини ( $k=1$ ):

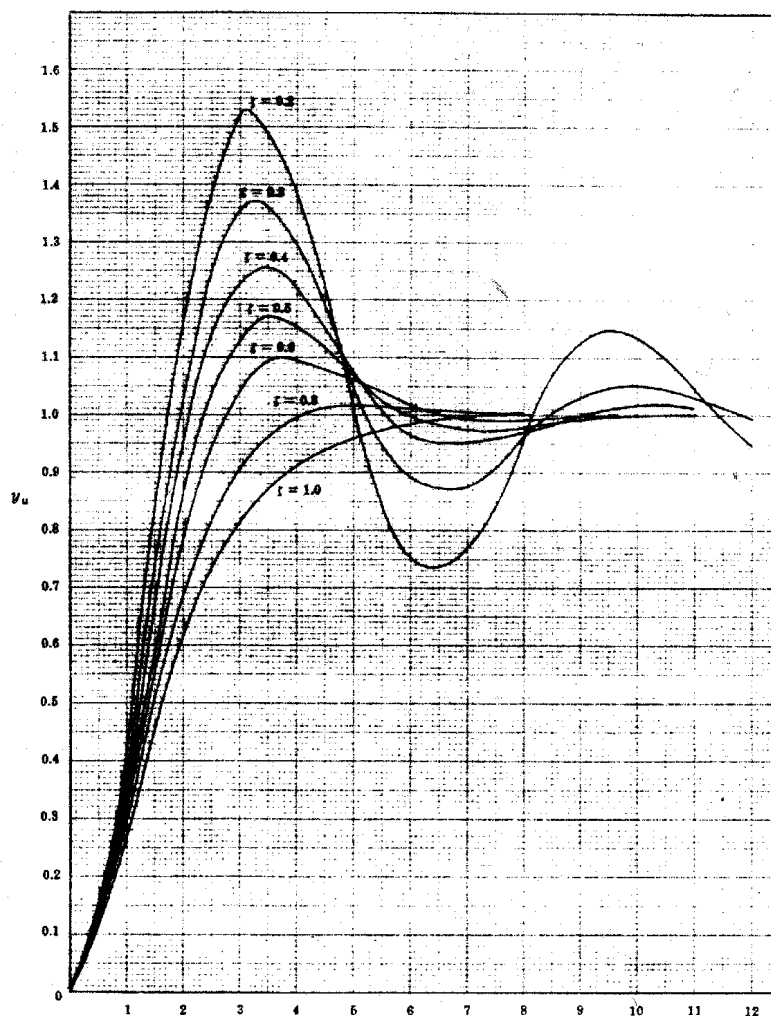
$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 - \text{степен на пригушување,}$$

$$\omega_n = \sqrt{2} = 1,41 - \text{природна непригушена фреквенција.}$$

Одзивот на систем од втор ред за влез единична отскочна функција во зависност од степенот на пригушување прикажан е во дијаграмот на слика 3.10.

Од дијаграмот се отчитува:

- Прескок:  $P_r \approx 4\%$



Слика 3.10. Единечен отсочен одзив за систем од втор ред

- Време на воспоставување (време потребно да се постигне од 10% до 90% од крајната вредност на излезот):

$$\omega_n T_r = 2,7 - 0,4 = 2,3$$

$$T_r = \frac{2,3}{\omega_n} = 1,63 \text{ (s)} \quad (3.123)$$



- Време на каснење (време потребно да се постигне 50% од крајната вредност на излезот):

$$T_k = \frac{1,5}{\omega_n} = \frac{1,5}{\sqrt{2}} = 1,061 \text{ (s)} \quad (3.124)$$

**Задача 3.17.** Единечниот импулсен одзив на еден физички систем, кој е опишан со математички модел од втор ред, изнесува:

$$y_\delta(t) = e^{-t} \sin t \quad (3.125)$$

Да се определат: пригушувањето на системот  $\xi$ , непригушената природна фреквенција  $\omega_n$ , пригушената природна фреквенција  $\omega_d$  и временската константа  $\tau$  на системот.

**Решение:** Единечниот импулсен одзив е еднаков на тежинската функција на системот (види задача 3.13), според тоа следи:

$$y_\delta(t) \equiv \omega(t) = \frac{1}{2j} e^{-t} (e^{jt} - e^{-jt}) = \frac{1}{2j} e^{-(1-j)t} - \frac{1}{2j} e^{-(1+j)t} \quad (3.126)$$

Основното множество на системот ќе биде:

$$\{e^{-(1-j)t}; e^{-(1+j)t}\} \quad (3.127)$$

Карактеристичната равенка на системот, според Виетовите формули, ќе биде:

$$[D+(1-j)] \cdot [D+(1+j)] = 0$$

односно:  $D^2 + 2D + 2 = 0 \quad (3.128)$

Според тоа математичкиот модел за дадениот физички систем ќе биде:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 2x(t) \quad (3.129)$$

Со споредба на равенката (3.129) со општиот облик на математичкиот модел на систем од втор ред (види задача 3.15 и 3.16):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 x$$

се добива:

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} - \text{степен на пригушување,}$$

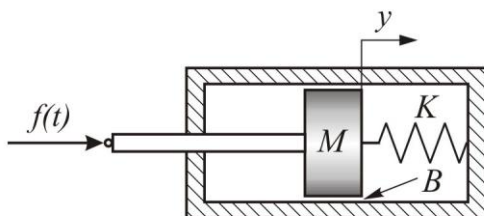
$$\omega_n = \sqrt{2} - \text{природна непригушена фреквенција,}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 1 - \text{природна пригушена фреквенција,}$$

$$\alpha = \xi \omega_n = 1 - \text{пригушен коефициент,}$$

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = 1(s) - \text{временска константа.}$$

**Задача 3.18.** Даден е следниот механизам (слика 3.11):



Слика 3.11. Скица на механички систем

Каде што е: силата  $f(t)$  - влез, а поместувањето на клипот  $y(t)$  - излез.

а). Да се определат: коефициентот на вискозно триење  $B$  и крутоста на пружината  $K$ , така што излезот  $y(t)$  ќе има крајна вредност  $y(\infty) = 1$ , а неговата промена нема прескок  $Pr = 0\%$ , кога силата  $f(t)$  има облик на единечна отс-кочна функција.

б). Ако е  $M = 1$  која ќе биде вредноста на времето на воспоставување  $T_r = ?$

**Решение:** а). Математичкиот модел за овој механички систем ќе биде (види поглавие 2.1.1):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{B}{M} \frac{dy}{dt} + \frac{K}{M} y = \frac{1}{M} f(t) \quad (3.130)$$

Од условот  $y(\infty) = 1$  следи општиот облик на математичкиот модел за систем од втор ред (види задача 3.15 и 3.16):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 f(t) \quad (3.131)$$

Со споредба на равенките (3.130) и (3.131) се добива:

$$\frac{1}{M} = \frac{K}{M} = \omega_n^2 \text{ од каде што се добива: } K = 1; \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Од условот  $\text{Pr} = 0\%$  од дијаграмот на слика 3.10 следи дека е  $\xi = 1$ , односно:

$$2\xi\omega_n = \frac{B}{M} \text{ од каде се добива: } B = 2\sqrt{M}$$

б). За  $M = 1$  равенката (3.130) го поприма следниот облик:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = f(t) \quad (3.132)$$

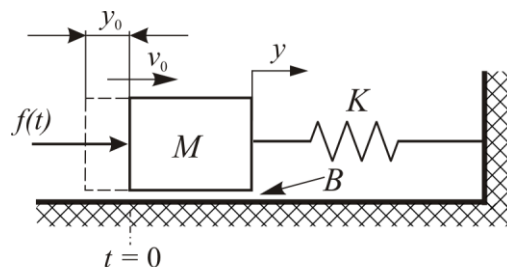
Времето на воспоставување (време потребно да се постигне од 10% до 90% од крајната вредност на излезот) се отчитува од дијаграмот на слика 3.10:

$$\omega_n T_r = 3,85 - 0,4 = 3,45$$

односно: 
$$T_r = \frac{3,45}{\omega_n} = 3,45 \text{ (s)}$$

**Задача 3.19.** Механизмот претставен на слика 3.12 во почетниот момент ( $t = 0$ ) има почетна состојба:

$$y(0) = 0,01 \text{ (m)}; \quad v_0 = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0,1 \text{ (m/s)} \quad (3.133)$$



Слика 3.12. Скица на механички систем

Потребно е да се определи промената на позицијата на масата  $y(t)$  во зависност од промената на силата  $f(t)$ , односно  $f(t)$  е влез, а  $y(t)$  е излез во системот.

Во почетниот момент ( $t = 0$ ) на масата  $M$  е доведена сила во облик на отскочна функција со интензитет  $f(t) = 20(N)$ . Ако се дадени следните параметри:  $M = 2(kg)$ ,  $B = 6(Ns/m)$ ,  $K = 4(N/m)$ , да се определи:

- Како ќе се задвижи масата во зависност само од почетните услови?
- Како ќе се задвижи масата само под дејство на надворешната сила?
- Каква ќе биде промената на нејзината позиција кога ќе се земат предвид почетните услови и дејството на силата  $f(t)$ ?
- Во која позиција ќе се стационира масата по подолго време на дејство на силата  $f(t)$ , односно кога  $t \rightarrow \infty$ ?

**Решение:** Блок-дијаграмот за дадениот механички систем, според терминологијата на управувачките системи, е прикажан на слика 3.13.

Математичкиот модел со кој се опишува овој технички систем ќе биде:

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} + Ky = f(t) \quad (3.134)$$



Слика 3.13. Блок-дијаграм за механичкиот систем

За дадените параметри на системот се добива:

$$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 4y = 20u(t) \quad (3.135)$$

односно:  $(D^2 + 3D + 2)y = 10u(t) \quad (3.136)$

а). - Се определува фундаменталното множество на системот:

$$D^2 + 3D + 2 = 0$$

$$(D+1) \cdot (D+2) = 0$$

односно:  $D_1 = -1, \quad D_2 = -2$

Според тоа, основното множество ќе биде:

$$\{e^{-t}; e^{-2t}\} \quad (3.137)$$

- Слободен одзив на системот:

$$y_a(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

Од почетните услови на системот (3.133) се добива:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0,01$$

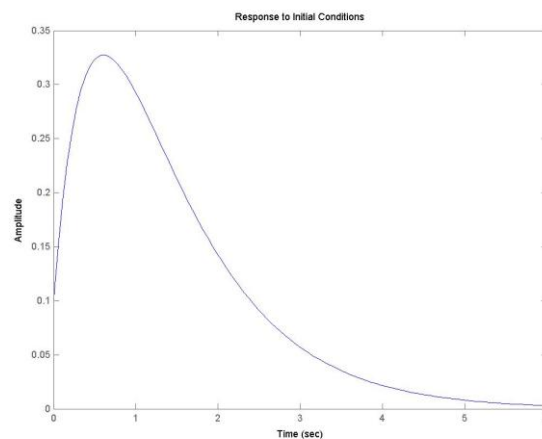
$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -C_1 - 2C_2 = 0,1$$

од каде се добива:  $C_1 = 0,12; C_2 = -0,11$

Според тоа, слободниот одзив на системот ќе биде:

$$y_a(t) = 0,12e^{-t} - 0,11e^{-2t} \quad (3.138)$$

На слика 3.14 е прикажан дијаграмот на слободниот одзив, за дадените почетни услови на системот, добиен со помош на софтверскиот пакет "MATLAB".



Слика 3.14. Слободен одзив на системот пресметан со помош на "MATLAB"

б). - Се определува тежинската функција на системот:

$$\omega(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

Од почетните услови дадени по дефиниција:

$$\omega(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = -C_1 - 2C_2 = 1$$

се добива:  $C_1 = 1; C_2 = -1$

односно:  $\omega(t) = e^{-t} - e^{-2t}$  (3.139)

- Форсираниот (принудниот) одзив на системот за влез отскочна функција, односно за  $x(t) = 10u(t)$ , се добива со помош на конволуциониот интеграл:

$$\begin{aligned} y_b(t) &= \int_0^t \omega(t-\tau)x(\tau)d\tau = \\ &= \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] \cdot 10 \cdot u(\tau) d\tau = \end{aligned}$$

односно:  $y_b(t) = 5 - 10e^{-t} + 5e^{-2t}$  (3.140)

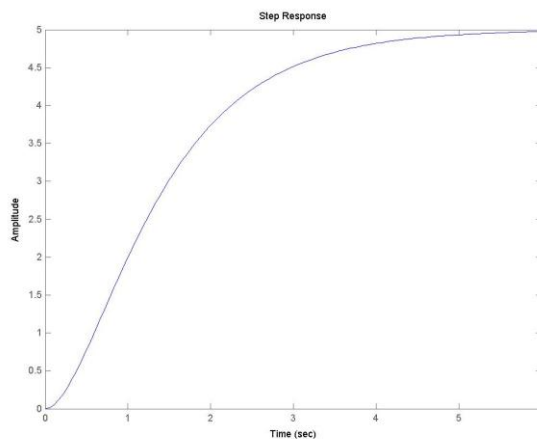
в). Вкупниот одзив на системот ќе биде:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_a(t) + y_b(t) \\ y(t) &= 5 - 9,88e^{-t} + 4,89e^{-2t} \end{aligned} \quad (3.141)$$

г). Сталната состојба на одзивот ќе биде:

$$y_{ss}(t) = 5 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{ss}(t) = 5 \quad (3.142)$$

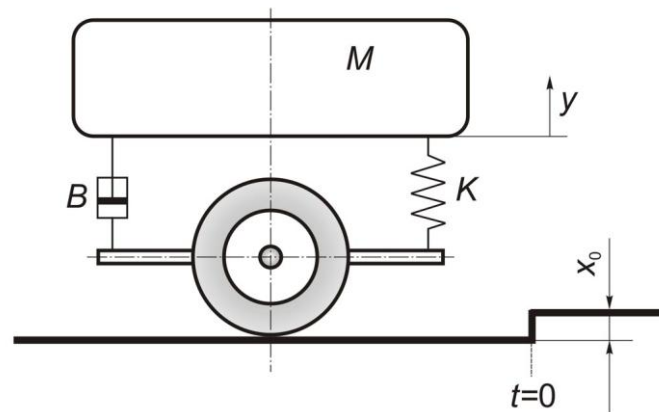
На слика 3.15 е прикажан дијаграмот на одзивот, за дадените параметри на системот, добиен со помош на софтверскиот пакет "MATLAB".



Слика 3.15. Одзив на системот пресметан со помош на "MATLAB"

**Задача 3.20.** За примерот даден во задача 2.2, каде што се анализира упростен модел на едно возило, да се определи поместувањето на кабината на возилото  $y(t)$ , за истите параметри на возилото ( $M = 1000 \text{ kg}$ ,  $B = 12 \cdot 10^3 \text{ Ns/m}$ ,  $K = 20 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ ), ако во даден момент ( $t = 0$ ) се појави нерамнина на патот која изнесува  $x_0 = 0,05 \text{ (m)}$ , како што е прикажано на слика 3.16.

Почетните услови, односно поместувањето на кабината  $y(0)$  и нејзината брзина  $\dot{y}(0)$  во  $y$ -правец се еднакви на нула.



Слика 3.16. Упростен модел на возило

**Решение:** Блок-дијаграмот за упростениот модел на возило, според терминологијата на управувачките системи, е прикажан на слика 3.17.



Слика 3.17. Блок-дијаграм за модел на возило

Математичкиот модел на упростениот модел на возило во движење, ако е нерамнината на патот  $x(t)$  - влез, а вертикалното поместување на кабината на возилото  $y(t)$  - излез, за дадените параметри на возилото, е даден со равенка (2.9):

$$\left(D^2 + \frac{B}{M}D + \frac{K}{M}\right)y = \left(\frac{B}{M}D + \frac{K}{M}\right)x \quad (2.9)$$

односно: 
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dx} + 20y = 12\frac{dx}{dt} + 20x \quad (2.11)$$

Општиот облик на диференцијална равенка од втор ред има облик:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = k \left( \frac{dx}{dt} + z_r x \right) \quad (3.143)$$

Со споредба на математичкиот модел за упростениот модел на возило (2.9) и (2.11) со општиот облик на диференцијалната равенка (3.143), може да се определат следните параметри на возилото за динамиката на неговото поместување во  $y$  - правец:

Природна непригушена фреквенција: 
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{20} = 4,472 \text{ rad/s}$$

Пригушување на системот: 
$$\xi = \frac{B}{M} \frac{1}{2\omega_n} = 1,342$$

Временска константа на системот: 
$$\tau = \frac{1}{\xi\omega_n} = \frac{1}{6} = 0,167 \text{ s}$$

Бидејќи почетните услови се еднакви на нула, слободниот одзив на системот, исто така, ќе биде еднаков на нула, односно нема да има никакво поместување на кабината на возилото во  $y$ -правец како последица од почетните услови:

$$y_a(t) = 0 \quad (3.144)$$

- Основното множество на математичкиот модел (2.11) се добива од карактеристичната равенка:

$$\begin{aligned} D^2 + 12D + 20 &= 0 \\ (D + 2) \cdot (D + 10) &= 0 \\ D_1 &= -2; \quad D_2 = -10 \end{aligned}$$

односно: 
$$\{e^{-2t}; e^{-10t}\} \quad (3.145)$$

- Тежинската функција на системот ќе биде:

$$\omega(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-10t}$$



Од почетните услови за тежинската функција:

$$\omega(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t=0} = -2C_1 - 10C_2 = 1$$

се добива:  $C_1 = 0,125$ ;  $C_2 = -0,125$

односно:  $\omega(t) = 0,125e^{-2t} - 0,125e^{-10t}$  (3.146)

- Форсираниот (принудниот) одзив на системот за влез  $x(t) = 0,05u(t)$ :

односно: 
$$x_v(t) = 12 \frac{d[0,05u(t)]}{dt} + 20[0,05u(t)]$$

$$x_v(t) = 0,6\delta(t) + u(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (3.147)$$

се добива со помош на конволуциониот интеграл.

При тоа, поедноставно е ако десната страна од равенка (2.11), користејќи го принципот на суперпозиција, се подели на два дела (3.147), односно:

$$y_{b1}(t) = \int_0^t \omega(t-\tau) \cdot x_1(\tau) d\tau = \int_0^t \omega(t-\tau) \cdot 0,6\delta(\tau) d\tau = 0,6 \int_0^t \omega(t-\tau) \cdot \delta(\tau) d\tau$$

од особините на импулсната функција следи (задача 3.13):

$$y_{b1}(t) = 0,6 \cdot \omega(t) = 0,6(0,125e^{-2t} - 0,125e^{-10t})$$

$$y_{b1}(t) = 0,075e^{-2t} - 0,075e^{-10t} \quad (3.148)$$

Вториот дел од принудниот одзив ќе биде:

$$y_{b2}(t) = \int_0^t \omega(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau = 0,125 \int_0^t [e^{-2(t-\tau)} - e^{-10(t-\tau)}] u(\tau) d\tau$$

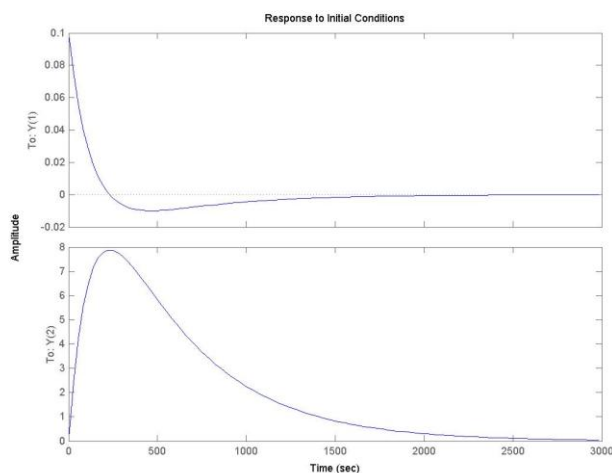
$$y_{b2}(t) = 0,05 - 0,0625e^{-2t} - 0,0125e^{-10t} \quad (3.149)$$

Вкупниот форсиран одзив ќе изнесува:

$$y_b(t) = y_{b1}(t) + y_{b2}(t)$$

$$y_b(t) = 0,05 + 0,0125e^{-2t} - 0,0625e^{-10t} \quad (3.150)$$

На слика 3.18 се прикажани дијаграмите на двата форсирани одзиви, за дадените влезови на системот, добиени со помош на софтверскиот пакет "MATLAB".



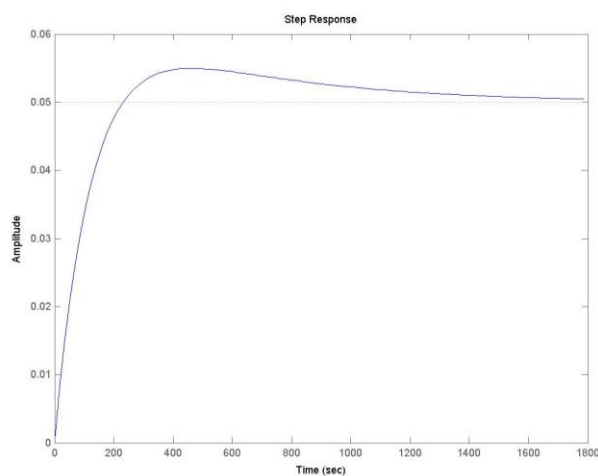
Слика 3.18. Форсирани одзиви на системот пресметани со помош на "MATLAB"

Вкупниот одзив на системот ќе биде:

$$y(t) = y_a(t) + y_b(t)$$

$$y(t) = 0,05 \cdot u(t) + 0,0125e^{-2t} - 0,0625e^{-10t} \quad (3.151)$$

На слика 3.19 е прикажан дијаграмот на одзивот, за дадените параметри на системот, според математичкиот модел на системот даден со равенка (2.11), добиен со помош на софтверскиот пакет "MATLAB".



Слика 3.19. Одзив на системот пресметан со помош на "MATLAB"

\* Каков одзив ќе се добие, односно какво ќе биде поместувањето на кабината на возилото во  $y$ -правец во зависност од нерамнината на патот, ако коефициентот на вискозно триење во амортизерите се намали за три пати (кога амортизерите ќе се расипат), односно:

$$B = 4000 \text{ Ns/m}$$

Во овој случај математичкиот модел за упростениот модел на возило, според равенка (2.9) ќе биде:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 20y = 4 \frac{dx}{dt} + 20x \quad (3.152)$$

Со споредба на математичкиот модел (3.152) со општиот облик диференцијалната равенка (3.143) се добива:

$$\omega_n = \sqrt{20} = 4,472 \text{ rad/s}, \quad \xi = 0,447, \quad \tau = 0,5 \text{ s}$$

Од каде што може да се заклучи дека непригушената природна фреквенција останува непроменета, пригушувањето на системот значително се намалува, а за сметка на тоа се зголемува временската константа на системот.

Од карактеристичната равенка на системот:

$$D^2 + 4D + 20 = 0$$

се добива основното множество:

$$\left\{ e^{-(2-j4)t}; e^{-(2+j4)t} \right\} \quad (3.153)$$

Тежинската функција на системот ќе биде:

$$\omega(t) = \frac{1}{4} e^{-2t} \sin 4t \quad (3.154)$$

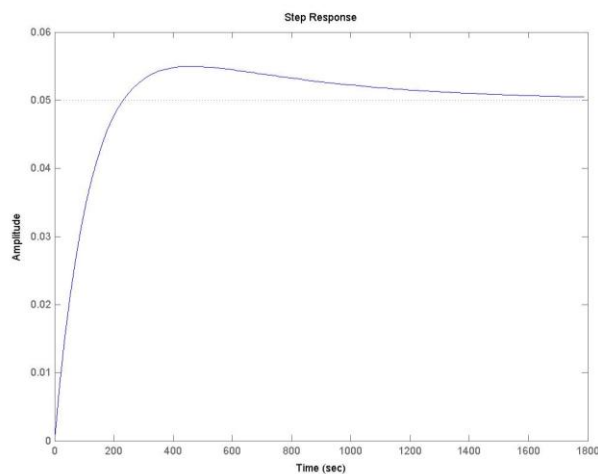
За зададениот влез за системот  $x_v(t) = 0,2\delta(t) + u(t) = x_1(t) + x_2(t)$  форсираниот одзив ќе изнесува:

$$y_{b,1} = 0,05e^{-2t} \sin 4t \quad (3.155)$$

$$y_{b,2} = 0,05 - 0,05e^{-2t} (\cos 4t - 0,5 \sin 4t) \quad (3.156)$$

односно вкупниот одзив ќе биде:

$$y(t) = y_b(t) = y_{b,1}(t) + y_{b,2}(t) = 0,05 - 0,05e^{-2t} (\cos 4t - 0,5 \sin 4t) \quad (3.157)$$

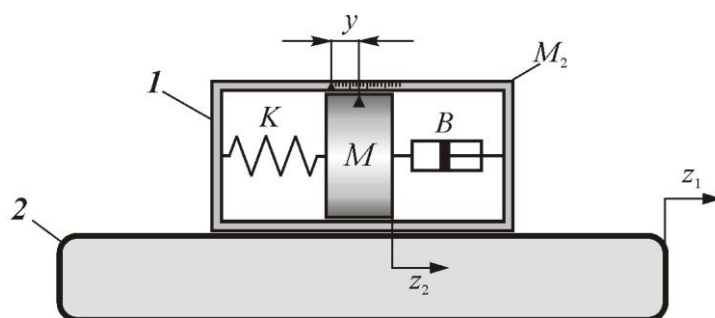


Слика 3.20. Одзив на системот пресметан со помош на "MATLAB"

На слика 3.20 е прикажан дијаграмот на одзивот, за дадените параметри на системот, според математичкиот модел на системот даден со равенка (3.152), добиен со помош на софтверскиот пакет "MATLAB".

Од добиениот дијаграм може да се заклучи дека возилото во овој случај ќе пројави значителен прескок  $P_r = 26\%$  во однос на стационарната состојба и времето на стабилизирање на одзивот ќе се продолжи, што е последица на на-малената функција на амортизерите.

**Задача 3.21.** На слика 3.21 е прикажан упростен модел на механички мерач на забрзување 1 (слично со слика 2.7, задача 2.3), кој е прицврстен на некој подвижен објект 2 (на пример на каросеријата на еден автомобил).



Слика 3.21. Упростен модел на механички мерач на забрзување

Влез во системот е забрзувањето на објектот:

$$x(t) \equiv a(t) = \frac{d^2 z_1}{dt^2} = D^2 z_1(t),$$

а излез е релативното поместување на масата  $M$  во однос на кутијата на мерачот со маса  $M_0 \approx 0$ , односно:

$$y(t) = z_1(t) - z_2(t).$$

Почетните услови на системот се еднакви на нула, односно релативното поместување е:  $y(0) = 0$  (m) и релативната брзина на масата  $M$  е:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \dot{y}(0) = 0 \text{ (m/s)}.$$

Да се определи како ќе се менува релативната позиција на масата  $M$  ( $y(t) = ?$ ), ако забрзувањето на подвижниот објект 2 нагло се зголеми на  $1 \text{ m/s}^2$ , односно

$$a(t) = \frac{d^2 z_1}{dt^2} = u(t) = 1 \text{ m/s}^2,$$

ако е дадено:  $M = 10 \text{ g}$ ,  $B = 0,2 \text{ Ns/m}$ ,  $K = 1 \text{ N/m}$ .

**Решение:** Блок-дијаграмот за упростениот модел на механички мерач на забрзување, според терминологијата на управувачките системи, е прикажан на слика 3.22.



Слика 3.22. Блок-дијаграм на механички мерач на забрзување

Математичкиот модел за дадениот механички систем е даден со равенка (2.17) во задача 2.3:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{B}{M} \frac{dy}{dt} + \frac{K}{M} y = \frac{d^2 z_1}{dt^2} \equiv a(t) \quad (3.158)$$

За зададените параметри на системот се добива:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 20 \frac{dy}{dt} + 100y = a(t) \quad (3.159)$$

Со споредба на равенка (3.159) со општиот математички модел на систем од втор ред се добива:

$$\omega_n = 10 \text{ rad/s}, \quad \xi = 1, \quad \tau = 0,1 \text{ s}$$

Бидејќи почетните услови се еднакви на нула и слободниот одзив на системот, исто така, ќе биде еднаков на нула, односно:

$$y_a(t) = 0$$

Од карактеристичната равенка на системот:

$$D^2 + 4D + 20 = 0 \quad (3.160)$$

односно:  $(D+10)^2 = 0$

се добива основното множесво:

$$\{e^{-10t}; te^{-10t}\} \quad (3.161)$$

Тежинската функција на системот ќе биде:

$$\omega(t) = te^{-10t} \quad (3.162)$$

За зададениот влез во системот:

$$x(t) \equiv a(t) = \frac{d^2 z_1}{dt^2} = u(t)$$

принудниот одзив на системот се определува со помош на конволуциониот интеграл:

$$y_b(t) = \int_0^t \omega(t-\tau) \cdot x(\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau) \cdot e^{-10(t-\tau)} \cdot u(\tau) d\tau$$

од каде се добива:

$$y_b(t) = \frac{1}{100} - \frac{1}{100} e^{-10t} - \frac{1}{10} t e^{-10t} \quad (3.163)$$

Според тоа, вкупниот одзив на системот ќе биде:

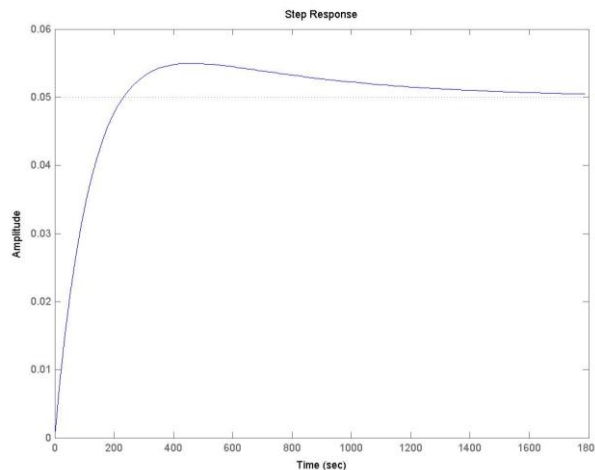
$$y(t) = y_a(t) + y_b(t) = 0,01 - 0,01e^{-10t} - 0,1te^{-10t} \quad \text{за } t \geq 0 \quad (3.164)$$

Стационарната состојба на одзивот на системот изнесува:

$$y_{ss}(t) = 0,01 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{ss} \neq 0 \quad (3.165)$$

односно, по истекот на времето на смирување на системот масата  $M$  ќе се стабилизира на позиција  $y = 10 \text{ mm}$  од нултата позиција, ако забрзувањето на објектот се зголеми на  $1 \text{ m/s}^2$ .

На слика 3.23 е прикажан дијаграмот на одзивот, за дадените параметри на системот, според математичкиот модел на системот даден со равенка (3.159), добиен со помош на софтверскиот пакет "MATLAB".



Слика 3.23. Одзив на системот (3.159) пресметан со помош на "MATLAB"

### Задачи за вежбање:

**Задача 3.22.** Даден е математичкиот модел од еден физички систем:

$$\text{а) } \frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 2x(t) \quad (3.166)$$

$$\text{б) } \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} = x(t) \quad (3.167)$$

Да се определи фундаменталното множество на системот.

**Решение:** Фундаменталното множество на системот ќе изнесува:

$$\text{а) } \{e^{2jt}; e^{-2jt}\} \quad (3.168)$$

$$\text{б) } \{e^{0t}; e^{2jt}; e^{-2jt}\}, \text{ односно } \{1; e^{jt}; e^{-jt}\} \quad (3.169)$$

**Задача 3.23.** Да се определи вредноста на интегралот:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \cdot \cos \omega t \cdot \delta(t-1) dt \quad \text{за } \omega = \pi \quad (\text{rad/s}) \quad (3.170)$$

**Решение:** Се користи селективното својство на импулсната функција (види задача 3.10):

$$A = e^{-t} \cos \pi t \Big|_{t=1} = -\frac{1}{e} \quad (3.171)$$

**Задача 3.24.** Математичкиот модел на еден систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 9 \frac{dy}{dt} + 5y = \frac{dx}{dt} + 3x \quad (3.172)$$

Да се определи единечниот импулсен одзив на системот.

**Решение:** Единечниот импулсен одзив на системот ќе изнесува (види задача 3.13 и 3.14):

$$y_{\delta}(t) = e^{-t} (1 - e^{-t} \cos t) \quad (3.173)$$

*ПОТСЕТУВАЊЕ:* Единечниот импулсен одзив е временскиот одзив на еден систем кога на влезот се доведе единечна импулсна функција, а сите почетни услови на системот се еднакви на нула.

**Задача 3.25.** Математичкиот модел на еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 6y = 5 \frac{dx}{dt} + 6x \quad (3.174)$$

Влезот во системот е  $x(t)$ , а излезот  $y(t)$ . На влезот е доведена единечна отсочна функција:  $x(t) = u(t)$

Да се пресмета временскиот одзив за овој систем кога сите почетни услови се еднакви на нула.



**Решение:** Единечниот отскочен одзив на системот ќе изнесува:

$$y_u(t) = 1 + 2e^{-2t} - 3e^{-3t} \quad (3.175)$$

**Задача 3.26.** Еден физички систем е претставен со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y = 3 \frac{dx}{dt} + 2x \quad (3.176)$$

а). Да се определи тежинската функција  $\omega(t)$ .

б). Да се определи единечниот нагибен одзив на системот.

**Решение:** а). Тежинската функција на системот ќе изнесува:

$$\omega(t) = te^{-2t} \quad (3.177)$$

б). Единечниот нагибен одзив ќе биде:

$$y_r(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}e^{-2t} - te^{-2t}; \quad t > 0 \quad (3.178)$$

односно:

$$y_r(t) = \frac{1}{4}u(t) + \frac{1}{2}r(t) - \frac{1}{4}u(t)e^{-2t} - r(t)e^{-2t}$$

**ПОТСЕТУВАЊЕ:** Единечниот нагибен одзив е временскиот одзив на еден систем кога на влезот се доведе единечна рампа, а сите почетни услови на системот се еднакви на нула.

**Задача 3.27.** Математичкиот модел на еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} = x(t) \quad (3.179)$$

Да се определи единечниот импулсен одзив на системот.

**Решение:** Единечниот импулсен одзив на системот ќе изнесува:

$$y_\delta(t) = 1 - \cos t, \quad t > 0 \quad (3.180)$$

**Задача 3.28.** Математичкиот модел на еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 2x(t) \quad (3.181)$$

Да се определи единичниот отскочен одзив на системот.

**Решение:** Единичниот отскочен одзив на системот ќе изнесува:

$$y_u(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t), \quad t > 0 \quad (3.182)$$

**Задача 3.29.** Математичкиот модел на еден систем е претставен со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 6\frac{d^2 y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 8y = x(t) \quad (3.183)$$

Влезот во системот е:  $x(t) = 2u(t)$  и дадени се почетните услови:

$$y(0) = 0; \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1; \quad \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=0} = 0 \quad (3.184)$$

Да се определат: фундаменталното множество, слободниот одзив, форсира- ниот одзив и тоталниот одзив.

**Решение:** Тоталниот одзив на системот ќе изнесува:

$$y(t) = \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{3}{2}t^2e^{-2t} \quad (3.185)$$

**Задача 3.30.** Да се определи одзивот на системот за  $t \geq 0$ , опишан со неговиот математички модел преку диференцијална равенка:

$$\text{а).} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y = 4x \quad (3.186)$$

$$\text{б).} \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 4y = x \quad (3.187)$$

При почетни услови:

$$y(0) = 1; \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 2; \quad \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=0} = 1 \quad (3.188)$$

ако на влезот се доведе единична отскочна функција  $x(t) = u(t)$ .

**Решение:** Одзивот на системот ќе биде:

$$\text{а). } y(t) = \quad (3.189)$$

$$\text{б). } y(t) = \quad (3.190)$$

**Задача 3.31.** Математичкиот модел на еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 4y = 10x \quad (3.191)$$

Почетните услови на системот се еднакви на нула. На влезот е доведена побуда во облик на единечна рампа.

Да се определи временскиот одзив на системот.

**Решение:** Единечниот нагибен одзив изнесува:

$$y_r(t) = -\frac{15}{4} + \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}e^{-2t} + \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.192)$$

**Задача 3.32.** Математичкиот модел од еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = 10 \frac{dx}{dt} + 20x \quad (3.193)$$

Влезот во системот е  $x(t)$ , а излезот е  $y(t)$ . Почетните услови на системот се:

$$y(0) = 0, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1 \quad (3.194)$$

Влезот во системот е:  $x(t) = e^{-t}$ .

Да се определи временскиот одзив на системот.

**Решение:** Временскиот одзив на системот изнесува:

$$y(t) = 10e^{-t} - 10e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t \quad (3.195)$$

**Задача 3.33.** Да се определи форсираниот одзив на еден физички систем претставен со математичкиот модел:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y = 3 \frac{dx}{dt} + 2x \quad (3.196)$$

ако на влезот во системот е доведена побудата:

$$\text{а). } x(t) = e^{-3t}; \quad t \geq 0 \quad (3.197)$$

$$\text{б). } x(t) = \begin{cases} 2u(t) + 3e^{-3t}; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases} \quad (3.198)$$

**Решение:** Форсираниот одзив на системот изнесува:

$$\text{а). } y_b(t) = 7e^{-2t} - 7te^{-2t} - 7e^{-3t} \quad (3.199)$$

$$\text{б). } y_b(t) = 1 + 6e^{-2t} - 3te^{-2t} - 7e^{-3t} \quad (3.200)$$

**Задача 3.34.** Математичкиот модел од еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 2x \quad (3.201)$$

Влезот во системот е  $x(t)$ , а излезот е  $y(t)$ . Почетните услови на системот се еднакви на нула.

На влезот е доведена побудата:  $x(t) = \sin t$ .

Да се определат: слободниот, форсираниот и тоталниот одзив на системот.

**Решение:** Слободниот одзив на системот ќе биде:  $y_a(t) = 0$ .

Тоталниот одзив на системот ќе биде еднаков на форсираниот одзив:

$$y(t) \equiv y_b(t) = \frac{1}{5} (5e^{-t} - 2e^{-2t} + \sin t - 3 \cos t) \quad (3.202)$$

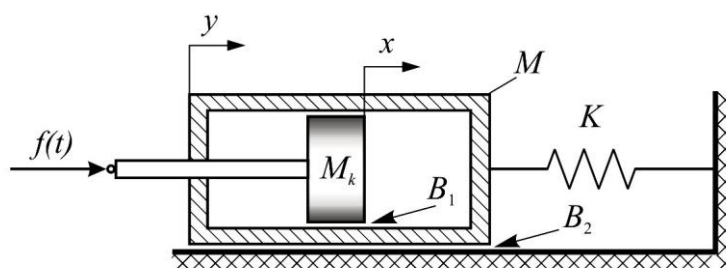
**Задача 3.35.** Да се определи: пригушувањето на системот  $\xi$ , непригушената природна фреквенција  $\omega_n$ , пригушената природна зачестеност  $\omega_d$ , пригушниот коефициент  $\alpha$  и временската константа  $\tau$  за следниот систем од втор ред:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 7y = 7x \quad (3.203)$$

**Решение:** (Види задача 3.15 и 3.16):

$$\xi = \frac{5}{2\sqrt{7}}, \quad \omega_n = \sqrt{7}, \quad \omega_d = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha = \frac{5}{2}, \quad \tau = \frac{2}{5} \quad (3.204)$$

**Задача 3.36.** Даден е механизмот (слика 3.24):



Слика 3.24. Скица на механички систем

Параметрите на системот се:  $M_k \approx 0$ ,  $M = 1$ ,  $B_2 = 4$ ,  $K = 3$ .

На влезот е доведена силата:  $f(t) = te^{-2t}$ .

Да се определи одзивот на системот  $y(t)$  ако почетните услови на системот се еднакви на нула.

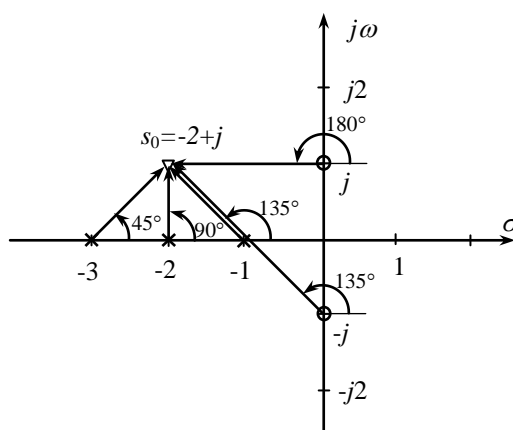
**Решение:** Временскиот одзив на системот изнесува:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + te^{-2t} \quad (3.205)$$

---

## ЧЕТВРТА ГЛАВА

---



## 4. ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА И НЕЈЗИНА ПРИМЕНА

### 4.1. Лапласова трансформација

Во табела 4.1 се претставени Лапласовите трансформации за функциите кои ќе бидат најчесто употребувани. Табелата не е потполна, но кога ќе се користи заедно со особините на Лапласовата трансформација и со постапките за развој на прости дробки, таа е доволна за решавање на сите проблеми кои ќе бидат обработувани. Во прилог на оваа книга е дадена проширена табела на Лапласови трансформации за поширок опсег на функции.

Лапласовата трансформација е линеарен оператор и за неа важи законот за суперпозиција:

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}\{x_i(t)\} \quad (4.1)$$

Доказ:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n a_i x_i(t)\right\} &= \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=1}^n a_i x_i(t)\right] \cdot e^{-st} dt = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \left[\int_0^{\infty} x_i(t) e^{-st} dt\right] = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{L}\{x_i(t)\} \end{aligned}$$

Табела 4.1. Лапласови трансформации на основните функции

Временска функција		Лапласова трансформација
Единечна импулсна	$\delta(t)$	1
Единечна отскочна	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Единечна рампа	$t$	$\frac{1}{s^2}$
Единечна парабола	$t^2$	$\frac{2}{s^3}$
Полином	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Експоненцијална	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
Синусоидална	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Косинусоидална	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Пригушена синусоидална	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Пригушена косинусоидална	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

**Задача 4.1.** Користејќи ја дефиницијата за Лапласова трансформација, да се определи комплексниот лик на функцијата:

$$f(t) = e^{-t} \tag{4.2}$$

**Решение:**

$$\mathcal{L}[e^{-t}] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s+1)t} dt = \frac{-1}{s+1} e^{-(s+1)t} \Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s+1} \quad (4.3)$$

**Задача 4.2.** Да се определи Лапласовата трансформација (ЛТ) за функцијата:

$$f(t) = 3e^{-t} - 4e^{-2t} \quad (4.4)$$

**Решение:** Се користи принципот на суперпозиција за Лапласовата трансформација, односно особината 1:

$$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (4.5)$$

Каде што се:  $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$  и  $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$  (4.6)

Според тоа, користејќи ја особината (4.5), релациите (4.6) и табела 4.1, се добива:

$$\mathcal{L}[f(t)] = 3\mathcal{L}[e^{-t}] - 4\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{3}{s+1} - \frac{4}{s+2}$$

**Задача 4.3.** Да се определи инверзната ЛТ ако е даден комплексниот лик:

$$F(s) = \frac{4}{s+1} - \frac{5}{s+3} \quad (4.7)$$

**Решение:** Се користи принципот на суперпозиција за инверзната Лапласова трансформација, односно особината 2:

$$\mathcal{L}^{-1}[b_1 F_1(s) + b_2 F_2(s)] = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t) \quad (4.8)$$

Каде што се:  $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]$  и  $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$  (4.9)

Користејќи ја особината (4.8), релациите (4.9) и табела 4.1, се добива:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = 4e^{-t} - 5e^{-3t}$$



**Задача 4.4.** Да се определи Лајласовата трансформација од функцијата :

$$f_1(t) = \frac{d}{dt}(e^{-3t}) \quad (4.10)$$

**Решение:** Се користи особината: Лајласова трансформација од извод на функција, односно особината 3:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+) \quad (4.11)$$

Каде што се:  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  и  $(4.12)$

$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(t)$  - почетна вредност, односно десен лимес на функцијата  $f(t)$

Користејќи ја особината (4.11), релациите (4.12) и табела 4.1, се добива:

$$\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-3t} = 1$$

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}e^{-3t}\right] = s \frac{1}{s+3} - 1 = \frac{s - s - 3}{s+3} = -\frac{3}{s+3}$$

**Задача 4.5.** Да се определи Лајласовата трансформација од функцијата :

$$f_1(t) = \int_0^t e^{-2\tau} d\tau \quad (4.13)$$

**Решение:** Се користи особината: Лајласова трансформација од интеграл, односно особината 4:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (4.14)$$

Со користење на особина (4.14) и табела 4.1, се добива:

$$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}; \quad \mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{-2\tau} d\tau\right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+2}$$

**Задача 4.6.** Да се определи граничната вредност, односно почетната вредност на функцијата:

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-5t} = ? \quad (4.15)$$

**Решение:** Се користи особината 5 за почетна вредност  $f(0^+)$  на функцијата  $f(t)$ , односно теорема за почетна вредност:

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (4.16)$$

Со користење на особина (4.16) и табела 4.1, се добива:

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1}{s+3} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1+3/s} = 1$$

**Задача 4.7.** Да се определи граничната вредност, односно крајната вредност на функцијата:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-3t}) = ? \quad (4.17)$$

**Решение:** Се користи особината 6 за крајна вредност  $f(\infty)$  на функцијата  $f(t)$ , односно теорема за крајна вредност:

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4.18)$$

Со користење на особина (4.18) и табела 4.1, се добива:

$$\mathcal{L}[1 - e^{-3t}] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} = \frac{s+3-s}{s(s+3)} = \frac{3}{s(s+3)};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-3t}) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s}{s(s+3)} = 1$$

**Задача 4.8.** Да се определи Лапласовата трансформација од функцијата:

$$f_1(t) = e^{\frac{t}{3}} \quad (4.19)$$

**Решение:** Се користи особината 7 за Лајласова трансформација од функцијата  $f\left(\frac{t}{a}\right)$ , која уште се нарекува "временска разлика":

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as) \quad (4.20)$$

Според тоа, функцијата (4.19) може да се претстави како:  $f_1(t) \equiv f_1\left(\frac{t}{3}\right)$ .

Од табела 4.1 се определува:  $\mathcal{L}\left[e^{-t}\right] = \frac{1}{s+1}$ , па според особина (4.20) и за

$$a=3 \text{ се добива: } \mathcal{L}\left[f_1\left(\frac{t}{3}\right)\right] = \mathcal{L}\left[e^{-\frac{t}{3}}\right] = 3 \cdot \frac{1}{3s+1} = \frac{1}{s+\frac{1}{3}}$$

**Задача 4.9.** Да се определи инверзната Лајласовата трансформација од функцијата:

$$F_1(s) = \frac{1}{4s+3} \quad (4.21)$$

**Решение:** Се користи особината 8 за инверзна Лајласова трансформација од функцијата  $F\left(\frac{s}{a}\right)$ , која уште се нарекува "фреквентна разлика":

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F\left(\frac{s}{a}\right)\right] = a \cdot f(at) \quad (4.22)$$

Функцијата (4.21) може да се претстави како:  $F_1(s) \equiv F_1\left(\frac{s}{1/4}\right) = \frac{1}{\frac{s}{1/4}+3}$ .

Од табела 4.1 се определува:  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = e^{-3t}$ , па според особина (4.22) и за

$$a = \frac{1}{4} \text{ се добива: } \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{1/4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\frac{s}{1/4}+3}\right] = \frac{1}{4} e^{-\frac{3t}{4}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3}{4}t}$$

**Задача 4.10.** Да се определи Лапласовата трансформација од функцијата:

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-3(t-2)} & t > 2 \\ 0 & t \leq 2 \end{cases} \quad (4.23)$$

**Решение:** Се користи особината 9 за Лапласова трансформација од функцијата  $f(t-T)$ , односно чисто временско закаснување:

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-sT} F(s) \quad (4.24)$$

Со користење на особина (4.24) и табела 4.1, се добива:

$$\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}; \quad T=2$$

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[e^{-3(t-2)}] = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s+3}$$

**Задача 4.11.** Да се определи Лапласовата трансформација од функцијата:

$$f_0(t) = e^{-3t} \cdot \cos 2t \quad (4.25)$$

**Решение:** а). Се користи особината 10 за Лапласова трансформација од пригушени функции, односно:

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = F(s+a) \quad (4.26)$$

Со користење на особина (4.26) и табела 4.1, се добива:

$$\mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2+4}; \quad a=3$$

$$\mathcal{L}[f_0(t)] = \mathcal{L}[e^{-3t} \cdot \cos 2t] = \frac{(s+3)}{(s+3)^2+4} = \frac{s+3}{s^2+6s+13}$$

б). Комплексниот лик на функцијата (4.25) може да се определи со примена на особина 11 за Лапласова трансформација од производ на две функции, односно со помош на комплексниот конволуционен интеграл:

$$\mathcal{L}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\omega) F_2(s-\omega) d\omega \quad (4.27)$$

Со користење на особина (4.27) и табела 4.1, се добива:

$$f_1(t) = \cos 2t; \quad \mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{s}{s^2 + 4},$$

$$f_2(t) = e^{-3t}; \quad \mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{1}{s+3},$$

$$\mathcal{L}[f_0(t)] = \mathcal{L}[e^{-3t} \cdot \cos 2t] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \left( \frac{\omega}{\omega^2 + 4} \right) \cdot \left[ \frac{1}{(s-\omega)+3} \right] d\omega = \frac{s+3}{s^2 + 6s + 13}$$

Деталното пресметување на овој интеграл не е дадено овде, бидејќи тоа претставува сложена постапка. Постојат, сепак, многу примери во посовремениот третман на теоријата на системите во кои комплексната конволуција може да биде ефикасно применета.

**Задача 4.12.** Да се определи инверзната Лапласова трансформација од функцијата:

$$F_0(s) = \frac{s}{(s+3) \cdot (s^2 + 4)} \quad (4.28)$$

**Решение:** а). Се користи особината 12 за инверзна Лапласова трансформација од производ на два комплексни лика, односно со помош на конволуционите интеграли:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \int_{0^+}^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_{0^+}^t f_2(\tau) \cdot f_1(t-\tau) d\tau \quad (4.29)$$

Со користење на особина (4.29) и табела 4.1, се добива:

$$F_1(s) = \frac{1}{s+3}; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = e^{-3t}$$

$$F_2(s) = \frac{s}{s^2 + 4}; \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right] = \cos 2t$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_0(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+3)(s^2 + 4)}\right] = \int_{0^+}^t e^{-3(t-\tau)} \cdot \cos 2\tau \cdot d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-3t} \int_{0^+}^t e^{3\tau} \cdot \cos 2\tau \cdot d\tau \stackrel{\text{tab}^*}{=} e^{-3t} \left. \frac{e^{3\tau} (2 \sin 2\tau + 3 \cos 2\tau)}{13} \right|_{0^+}^t = \\
&= e^{-3t} \left[ \frac{e^{3t} (2 \sin 2t + 3 \cos 2t)}{13} - \frac{1(0+3)}{13} \right] = \frac{1}{13} (2 \sin 2t + 3 \cos 2t - 3e^{-3t})
\end{aligned}$$

**Задача 4.13.** Да се определи Лапласовата трансформација од функцијата:

$$f(t) = 2e^{-t} \cos 10t - t^4 + 6e^{-(t-10)} \quad (4.30)$$

**Решение:** Се користи табела 4.1 и особините за Лапласовата трансформација, при што се добива:

$$\mathcal{L}[e^{-t} \cos 10t] = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 10^2},$$

$$\mathcal{L}[t^4] = \frac{4!}{s^5},$$

$$\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1},$$

$$\mathcal{L}[e^{-(t-10)}] = \frac{e^{-10s}}{s+1}$$

Според особината 1 ќе биде:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{2(s+1)}{s^2 + 2s + 101} - \frac{24}{s^5} + \frac{6e^{-10s}}{s+1}$$

---

\*)

$$\int e^{ax} \cdot \cos \omega x \cdot dx = \frac{e^{ax} (\omega \sin \omega x + a \cos \omega x)}{a^2 + \omega^2} + C$$

**Задача 4.14.** Да се определи Лајласовата трансформација од функциите:

$$\text{а). } f(t) = \frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at}) \quad (4.31)$$

$$\text{б). } f(t) = \cos^2 at - \sin^2 at \quad (4.32)$$

$$\text{в). } f(t) = \cos^2 at \quad (4.33)$$

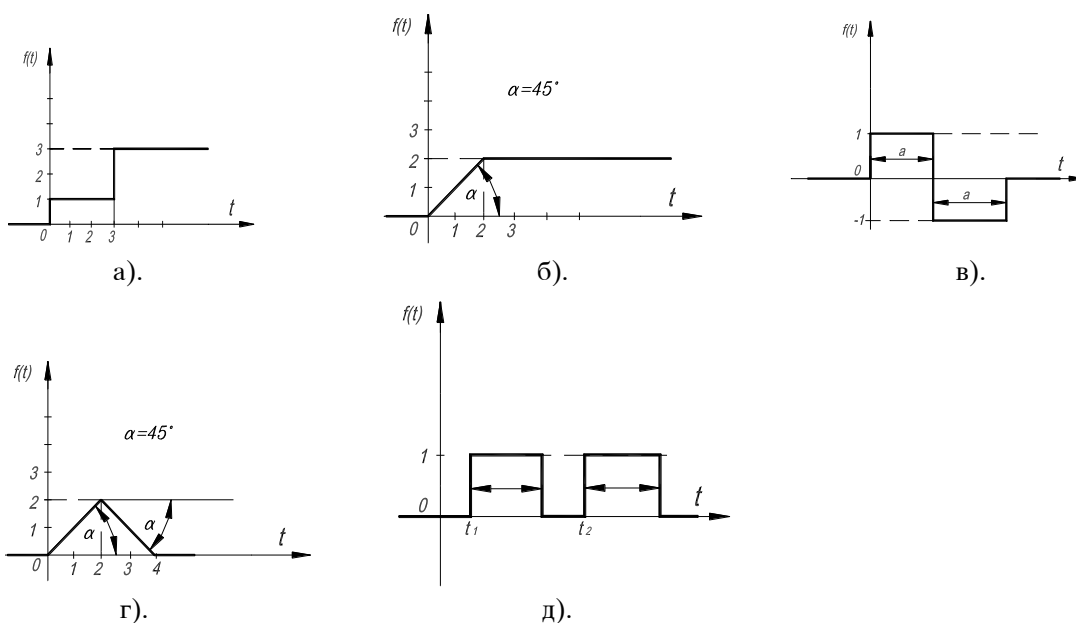
**Решение:** Со користење табела 4.1 и особините за Лајласовата трансформација, се добива:

$$\begin{aligned} \text{а). } F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})\right] = \frac{1}{a^2} \mathcal{L}[at] - \frac{1}{a^2} \mathcal{L}[u(t)] + \frac{1}{a^2} \mathcal{L}[e^{-at}] = \\ &= \frac{1}{a^2} \left( \frac{a}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{1}{s^2(s+a)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\text{б). } F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[\cos^2(at) - \sin^2(at)] = \mathcal{L}[\cos(2at)] = \frac{s}{s^2 + 4a^2} \quad (4.35)$$

$$\text{в). } F(s) = \mathcal{L}[\cos^2 at] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2at)\right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4a^2} \right) = \frac{s^2 + 2a^2}{s(s^2 + 4a^2)} \quad (4.36)$$

**Задача 4.15.** Да се определи Лајласовата трансформација од функциите претставени графички на слика 4.1:



Слика 4.1. Графички приказ на функциите

**Решение:**

а). Функцијатата прикажана на слика 4.1. (а), со помош на посебните функции може да се претстави во облик:

$$f(t) = u(t) + 2u(t-3) \quad (4.37)$$

тогаш нејзината Лапласова трансформација ќе има облик:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t)] + 2\mathcal{L}[u(t-3)] = \frac{1}{s} + 2\frac{1}{s}e^{-3s} = \frac{1}{s}(1 + 2e^{-3s}) \quad (4.38)$$

б). Функцијатата прикажана на слика 4.1. (б), може да се претстави во облик:

$$f(t) = r(t) - r(t-2) \quad (4.39)$$

од каде се добива:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[r(t)] - \mathcal{L}[r(t-2)] = \frac{1}{s^2} - e^{-2s} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-2s}) \quad (4.40)$$

в). Функцијатата прикажана на слика 4.1. (в), со помош на посебните функции може да се претстави во облик:

$$f(t) = u(t) - 2u(t-a) + u(t-2a) \quad (4.41)$$

па според тоа, од равенка (4.41) се добива:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t)] - 2\mathcal{L}[u(t-a)] + \mathcal{L}[u(t-2a)] \\ F(s) &= \frac{1}{s} - 2e^{-as} \frac{1}{s} + e^{-2as} \frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-as})^2 \end{aligned} \quad (4.42)$$

г). Функцијата дадена на слика 4.1.(г), може да биде претставена во облик:

$$f(t) = r(t) - 2r(t-2) + r(t-4) \quad (4.43)$$

тогаш нејзината Лапласова трансформација ќе има облик:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[r(t)] - 2\mathcal{L}[r(t-2)] + \mathcal{L}[r(t-4)] \\ F(s) &= \frac{1}{s^2} - 2e^{-2s} \frac{1}{s^2} + e^{-4s} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-2s})^2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

д). Функцијатата прикажана на слика 4.1.(д), претставена со помош на посебните функции ќе биде:

$$f(t) = u(t-t_1) - u[t-(t_1+a)] + u(t-t_2) - u[t-(t_2+a)] \quad (4.45)$$



Нејзината Лајласова трансформација ќе има облик:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-t_1)] - \mathcal{L}\{u[t-(t_1+a)]\} + \mathcal{L}[u(t-t_2)] - \mathcal{L}\{u[t-(t_2+a)]\}$$

$$F(s) = e^{-t_1s} \frac{1}{s} - e^{-(t_1+a)s} \frac{1}{s} + e^{-t_2s} \frac{1}{s} - e^{-(t_2+a)s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} (e^{-t_1s} + e^{-t_2s}) \cdot (1 - e^{-as}) \quad (4.46)$$

**Задача 4.16.** Да се определи Лајласовата трансформација за функцијата:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ t+1 & 1 < t \leq 3 \\ 4 & 3 < t \leq 6 \\ 0 & t > 6 \end{cases} \quad (4.47)$$

**Решение:** Функцијата дадена со равенка (4.47), графички е прикажана на слика 3.9. и претставена е со помош на посебните функции во задача 3.11, односно:

$$f(t) = 2u(t-1) + r(t-1) - r(t-3) - 4u(t-6)$$

Според тоа се добива:

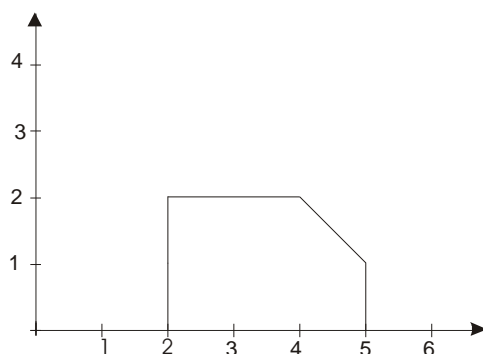
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = 2\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-3s} - 4\frac{1}{s}e^{-6s}$$

**Задача 4.17.** Да се определи Лајласовата трансформација за функцијата:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ 2 & 2 < t \leq 4 \\ -t+6 & 4 < t \leq 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases} \quad (4.48)$$

**Решение:** Функцијата дадена со равенка (4.48), графички е прикажана на слика 4.2. и едноставно може да биде претставена со помош на посебните функции:

$$f(t) = 2u(t-2) + r(t-4) - r(t-5) - u(t-5) \quad (4.49)$$



Слика 4.2. Графички приказ на функцијата (4.48)

Лапласова трансформација на функцијата (4.49) ќе биде:

$$F(s) = 2\frac{1}{s}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-5s} - \frac{1}{s}e^{-5s}$$

**Задача 4.18.** Да се определи оригиналот на комплексниот лик, односно да се пресмета инверзната Лапласова трансформација за функциите:

$$\begin{aligned} \text{а). } F(s) &= \frac{1}{s^2 + 4} & \text{б). } F(s) &= \left(\frac{s+1}{s^2 + 9}\right) \cdot e^{-s} \\ \text{в). } F(s) &= \frac{3s+5}{s^2 + 4} & \text{г). } F(s) &= \frac{e^{-s}}{s(s^2 + 1)} \end{aligned} \quad (4.50)$$

**Решение:** Оригиналот на дадените комплексни ликови ќе се определи, користејќи ја табелата 4.1 на Лапласовите трансформации на поедини функции и особините на Лапласовата трансформација, и притоа се добива:

$$\text{а). } f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + 4}\right] = \frac{1}{2} \sin 2t \quad (4.51.a)$$

$$\text{б). } f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 9} \cdot e^{-s}\right] + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2 + 9} \cdot e^{-s}\right]$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos 3(t-1) + \frac{1}{3} \sin 3(t-1); & t > 1 \\ 0; & t \leq 1 \end{cases} \quad (4.51.б)$$

$$\begin{aligned} \text{в).} \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4} \cdot e^{-s}\right] \\ f(t) &= 3\cos 2t + \frac{5}{2}\sin 2t \end{aligned} \quad (4.51.в)$$

$$\begin{aligned} \text{г).} \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \cdot e^{-s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1} \cdot e^{-s}\right] \\ f(t) &= \begin{cases} u(t-1) - \cos(t-1); & t > 1 \\ 0; & t \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.51.г)$$

или напишано во друг облик ќе биде:

$$f(t) = [1 - \cos(t-1)] \cdot u(t-1)$$

**Задача 4.19.** Да се определи временската функција за комплексниот лик:

$$\text{а).} \quad F(s) = \frac{b}{(s+a)^n}, \quad \text{б).} \quad F(s) = \frac{c+jd}{s+a+jb} + \frac{c-jd}{s+a-jb} \quad (4.52)$$

**Решение:** Оригиналот на функцијата  $F(s)$  се определува со помош на инверзната Лапласова претворања:

$$\text{а).} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = b\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^n}\right] = b\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at} \quad (4.53.а)$$

$$\begin{aligned} \text{б).} \quad f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(c+jd)(s+a-jb)}{(s+a)^2+b^2} + \frac{(c-jd)(s+a+jb)}{(s+a)^2+b^2}\right] = \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c(s+a)+bd}{(s+a)^2+b^2}\right] = 2c\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}\right] + 2d\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\right] \\ f(t) &= 2e^{-at}(c \cdot \cos bt + d \cdot \sin bt) \end{aligned} \quad (4.53.б)$$

**Задача 4.20.** Да се докаже дека важи:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0^+}^{\infty} f(at)e^{-st} dt = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (4.54)$$

ако е:  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

**Решение:** Ако во интегралот во равенката (4.54), се воведи смена  $\tau = at$ , т.е.

$t = \frac{\tau}{a}$ , се добива:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{0^+}^{\infty} f(\tau) e^{-s\frac{\tau}{a}} d\left(\frac{\tau}{a}\right) = \frac{1}{a} \int_{0^+}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (4.55)$$

**Задача 4.21.** Со помош на конволуциониот интеграл (особина 12) да се определи оригиналот на комплексниот лик:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (4.56)$$

**Решение:** Функцијата  $F(s)$  може да се претстави во облик на производ од комплексни ликови :

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Каде што се:  $F_1(s) = \frac{1}{s+1}$ ;  $F_2(s) = \frac{1}{s+2}$  (4.57)

Според табела 4.1 оригиналите на комплексните ликови  $F_1(s)$  и  $F_2(s)$  се:

$$f_1(t) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t}; \quad f_2(t) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-2t} \quad (4.58)$$

Според тоа, оригиналот на комплексниот лик  $F(s)$  се определува со помош на интегралот на конволуција, односно според равенка (4.29):

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \int_{0^+}^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$$

$$f(t) = \int_{0^+}^t e^{-2\tau} \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_{0^+}^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-t} (e^{-\tau}) \Big|_0^t = -e^{-t} (e^{-t} - 1) = e^{-t} - e^{-2t}$$

## 4.2. Примена на Лајласовата трансформација

Примената на Лајласовата трансформација во решавањето на линеарните диференцијални равенки со константни коефициенти е од првостепена важност за проблемите на линеарните управувачки системи.

Математичките модели на линеарните управувачки системи во најопшт случај се претставени со диференцијалната равенка со константни коефициенти, во облик:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x}{dt^j} \quad (4.59)$$

каде што се:  $y(t)$  - излезот,  $x(t)$  - влезот во системот, а  $a_i$  и  $b_j$  се константи.

Лајласовата трансформација на равенката (4.59) е дадена со:

$$\sum_{i=0}^n \left[ a_i \left( s^i \cdot Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} \cdot y_0^k \right) \right] = \sum_{j=0}^m \left[ b_j \left( s^j \cdot X(s) - \sum_{k=0}^{j-1} s^{j-1-k} \cdot x_0^k \right) \right] \quad (4.60)$$

каде што се:  $y_0^k \equiv \left. \frac{d^k y}{dt^k} \right|_{t=0}$ ,  $k=0,1,\dots, n-1$  - почетни услови на излезот,

$x_0^k \equiv \left. \frac{d^k x}{dt^k} \right|_{t=0}$ ,  $k=0,1,\dots, m-1$  - почетни услови на влезот.

При тоа е користена особината 3, односно Лајласова трансформација од извод на функција (4.11):

$$\mathcal{L} \left[ \frac{dy}{dt} \right] = sY(s) - y(0^+) \quad (4.61)$$

каде што е:  $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$

$$\begin{aligned} \text{Според тоа ќе биде: } \mathcal{L} \left[ \frac{d^2 y}{dt^2} \right] &= \mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) \right] = s \mathcal{L} \left[ \frac{dy}{dt} \right] - \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} \stackrel{\text{рав.4.61}}{=} \\ &= s \left[ sY(s) - y(0^+) \right] - y_0^1 = s^2 Y(s) - s y_0 - y_0^1 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Аналогно на тоа се добива:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3 y}{dt^3}\right] = s^3 Y(s) - s^2 y_0 - s y_0^1 - y_0^2 \quad \text{и т.н.} \quad (4.63)$$

Од равенка (4.60) лесно може да се определи Лапласовата трансформација на излезот -  $Y(s)$ , за системот опишан со математичкиот модел (4.59), односно:

$$Y(s) = \underbrace{\left[ \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right]}_{Y_b(s)\text{-ЛТ на принудниот одзив}} X(s) - \frac{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{j-1} b_j s^{j-1-k} x_0^k}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} a_i s^{i-1-k} y_0^k}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (4.64)$$

$Y_a(s)\text{-ЛТ на слободниот одзив}$

Одзивот на системот во временски домен -  $y(t)$  ќе се добие како инверзна Лапласова трансформација од  $Y(s)$ , па според тоа ќе биде:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[Y_b(s)] + \mathcal{L}^{-1}[Y_a(s)] \quad (4.65)$$

каде што се:  $y_b(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_b(s)]$  - принуден (форсиран) одзив,

$y_a(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_a(s)]$  - слободен одзив на системот.

**Задача 4.22.** За системите, чии математички модели се зададени во задача 3.9, за истите почетни услови (3.68) и за влез единична одскачна функција  $x(t) = u(t)$ , да се определи одзивот на системите користејќи ја Лапласовата трансформација:

$$\text{а) } \frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 4y = x \quad (4.66)$$

$$\text{б) } \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 4y = x \quad (4.67)$$

$$\text{за почетни услови: } y_0 \equiv y(0^+) = 0; \quad y_0^1 \equiv \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0; \quad y_0^2 \equiv \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=0} = 1 \quad (4.68)$$

**Решение:** а). Одзивот на системот, опишан со својот математички модел (диференцијална равенка 4.66), се определува се користење на правилото за Лапласова трансформација од извод, односно релациите од (4.60) до (4.64):

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 4y\right] = \mathcal{L}[x(t)] \quad (4.69)$$

Според тоа, за зададените почетни услови (4.68) следи:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] &= sY(s) - y_0 = sY(s) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] &= s^2Y(s) - sy_0 - y_0^1 = s^2Y(s) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^3y}{dt^3}\right] &= s^3Y(s) - s^2y_0 - sy_0^1 - y_0^2 = s^3Y(s) - 1 \\ \mathcal{L}[x(t)] &= \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Со замена на релациите (4.70) во равенка (4.69), лесно може да се добие Лапласовата трансформација на одзивот на системот:

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s}}{\underbrace{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}_{Y_b(s)}} + \frac{1}{\underbrace{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}_{Y_a(s)}}$$

односно:

$$Y(s) = \frac{(s+1)}{s(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s(s+2)^2} \quad (4.71)$$

За определување на одзивот во временски домен -  $y(t)$ , кој претставува инверзна Лапласова трансформација на комплексниот лик -  $Y(s)$ , се користи Хевисајдовиот парцијален развој, според кој се добива:

$$Y(s) = b_3 + \frac{C_{11}}{s} + \frac{C_{21}}{s+2} + \frac{C_{22}}{(s+2)^2} \quad (4.72)$$

каде што е  $b_3 = 0$  за  $n > m$ .

Коефициентите  $C_{ik}$  во равенка (4.72) се определуваат според правилата на Хевисајдовиот парцијален развој, или со помош на графичко определување на резидуумите, изложени во предавањето по предметот "Основи на автоматско управување". Во конкретниот пример тие изнесуваат:

$$C_{11} = s \cdot Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{pmatrix} n_i = 2 \\ k = 1 \end{pmatrix} C_{21} = \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds} \left[ (s+2)^2 \cdot Y(s) \right] \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4} \quad (4.73)$$

$$\begin{pmatrix} n_i = 2 \\ k = 2 \end{pmatrix} C_{22} = (s+2)^2 Y(s) \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$$

Со замена на вредноста на коефициентите (4.73) во равенката (4.72) се добива:

$$Y(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+2)^2}$$

односно одзивот на системот во временски домен ќе биде:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] \quad (4.74)$$

За определување на оригиналот од комплексната функција:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

може да се искористи конволуциониот интеграл:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+2}\right] = \int_0^t e^{-2\tau} \cdot e^{-2(t-\tau)} d\tau = t \cdot e^{-2t}$$

Многу поедноставно е ако се примени таблицата и правилата на Лапласовата трансформација. Како?

Според тоа одзивот на системот во временски домен, односно вкупниот одзив на системот ќе биде:



$$y(t) = \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} \quad (4.75)$$

Одзивот (4.75) е идентичен со резултатот добиен со решавање на диференцијалната равенка во временски домен (3.73), во задача 3. 9.а.

б). Се определува Лапласовата трансформација на математичкиот модел (диференцијална равенка 4.66):

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 4y\right] = \mathcal{L}[x(t)] \quad (4.76)$$

За зададените почетни услови (4.68) се добиваат истите релации (4.70), и според тоа Лапласовата трансформација на одзивот на системот ќе биде:

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s}}{\underbrace{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}_{Y_b(s)}} + \frac{1}{\underbrace{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}_{Y_a(s)}}$$

односно: 
$$Y(s) = \frac{1+s}{s(s+2)(s+1-j)(s+1+j)} \quad (4.77)$$

#### <sup>2)</sup> ПОТСЕТУВАЊЕ:

Од простите множители на слободниот член, со проверка, се бара едно можно решение на равенката  $s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$ . За конкретниот пример можни решенија се: -1, -2 и -4. Очигледно е, дека  $s_1 = -2$  е едно решение. Другите две решенија се добиваат со делење на полиномот со решението  $(s+2)$ , односно:

$$\begin{aligned} (s^3 + 4s^2 + 6s + 4) : (s+2) &= s^2 + 2s + 2 \\ - (s^3 + 2s^2) & \\ \hline 2s^2 + 6s & \\ - (2s^2 + 4s) & \\ \hline 2s + 4 & \\ - (2s + 4) & \end{aligned}$$

Според тоа, другите две решенија се добиваат со решавање на квадратната равенка:

$$s^2 + 2s + 2 = 0$$

односно:  $(s+1-j)(s+1+j) = 0$

од каде што се добива:  $s_2 = -1 + j$ ,  $s_3 = -1 - j$

Со користење на Хевисајдовиот парцијален развој, изразот за комплексниот лик на одзивот на системот -  $Y(s)$ , може да се напише во облик:

$$Y(s) = b_3 + \frac{C_{11}}{s} + \frac{C_{21}}{s+2} + \frac{C_{31}}{(s+1-j)} + \frac{C_{41}}{(s+1+j)} \quad (4.78)$$

каде што е  $b_3 = 0$  за  $n > m$ .

Коефициентите  $C_{ik}$  во равенка (4.78) се определуваат според правилата на Хевисајдовиот парцијален развој, и тие ќе бидат:

$$\begin{aligned} C_{11} &= s \cdot Y(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{4} \\ C_{21} &= (s+2) \cdot Y(s) \Big|_{s=-2} = \frac{1}{4} \\ C_{31} &= (s+1-j) \cdot Y(s) \Big|_{s=-1+j} = -\frac{1}{4} \\ C_{41} &= (s+1+j) \cdot Y(s) \Big|_{s=-1-j} = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4.79)$$

Со замена на вредноста на коефициентите (4.79) во равенката (4.78) и со користење на инверзната Лапласова трансформација се добива:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1-j}\right] - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1+j}\right]$$

односно:

$$y(t) = \frac{1}{4} u(t) + \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-(1-j)t} - \frac{1}{4} e^{-(1+j)t} \quad (4.80)$$

Со примена на Ојлеровите формули (задача 3.9) одзивот на системот се сведува во облик:

$$y(t) = \frac{1}{4} [u(t) + e^{-2t} - 2e^{-t} \cos t] \quad (4.81)$$

кој исто така се совпаѓа со резултатот добиен во задача 3.9.б.

Од оваа задача може да се согледа големата предност на примената на Лапласовата трансформација при пресметка на одзивот на системите, како во поед-

ноставување на пресметката така и во можноста веднаш да дојдеме до тоталниот одзив на системот, без да се пресметуваат слободниот и принудниот одзив посебно, а чие пресметување, исто така, е можно во случај на потреба.

### 4.3. Хевисајдова теорема за парцијален развој на прости дробки

Познато е дека Лапласовата трансформација на одзивот  $Y(s)$ , на линеарни системи со константни коефициенти, се добива во облик на рационални функции (количник на полиноми од променливата  $s$ ), односно:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (4.82)$$

каде што е:  $a_n = 1$  и  $n \geq m$

Равенката од полиномот во именителот

$$D(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i = 0 \quad (4.83)$$

има  $n$  корени (решенија). Некои од овие корени може да бидат повеќекратни. Под претпоставка дека равенката (4.83) има  $n_1$  корени еднакви на  $-p_1$ ,  $n_2$  корени еднакви на  $-p_2$ ,  $\dots$ ,  $n_r$  корени еднакви на  $-p_r$ , каде што е

$$\sum_{i=1}^r n_i = n.$$

Тогаш може да се напише:  $\sum_{i=0}^n a_i s^i = \prod_{i=1}^r (s + p_i)^{n_i}$ , односно рационалната функција (4.82) ќе биде:

$$Y(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\prod_{i=1}^r (s + p_i)^{n_i}} \quad (4.84)$$

Според тоа, претставувањето на рационалната функција  $Y(s)$  преку нејзиниот развој на прости дробки ќе биде:

$$Y(s) = b_n + \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_{ik}}{(s+p_i)^k} \quad (4.85)$$

каде што е:  $b_n = 0$ , освен за случај кога е  $m = n$ .

Коефициентите  $C_{ik}$  се пресметуваат според формулата:

$$C_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} \left[ (s + p_i)^{n_i} Y(s) \right] \Big|_{s = -p_i} \quad (4.86)$$

каде што е:  $n_i$  - број на вкупно повторување на коренот  $-p_i$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_i$  - број на повторување за кој се пресметува коефициентот  $C_{ik}$ .

Посебните коефициенти на парцијалниот развој  $C_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  се наречени остатоци (резидууми) од функцијата  $Y(s)$  во коренот  $-p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ .

Доколку нема повеќекратни корени, тогаш рационалната функција (4.82) ќе може да се напише во облик:

$$Y(s) = b_n + \sum_{i=1}^n \frac{C_{i1}}{s + p_i} \quad (4.87)$$

Коефициентите (остатоците)  $C_{i1}$  се пресметуваат според формулата:

$$C_{i1} = (s + p_i) Y(s) \Big|_{s = -p_i} \quad (4.88)$$

Во продолжение ќе биде презентирани генерален приод кон парцијалниот развој на рационални функции со комплексно конјугирани полови.

Ако именителот  $D(s)$  на рационалната функција  $Y(s)$  (4.82) има комплексно конјугирани полови  $s_{1/2} = \sigma \pm j\omega$ , тогаш таа може да се напише во облик:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\left[ (s + \sigma)^2 + \omega^2 \right] \cdot D_1(s)} = \frac{R(s)}{\left[ (s + \sigma)^2 + \omega^2 \right]} \quad (4.89)$$

односно: 
$$Y(s) = \frac{As + B}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} + h(s) \quad (4.90)$$

Со споредување на равенките (4.89) и (4.90) се добива:

$$R(s) = As + B + h(s) \left[ (s + \sigma)^2 + \omega^2 \right] = \left[ (s + \sigma)^2 + \omega^2 \right] \cdot Y(s) \quad (4.91)$$

каде што е:  $h(s) = \frac{C_{11}}{s + p_1} + \frac{C_{21}}{s + p_2} + \dots$  - парцијален развој на останатиот дел

од функцијата (4.82) во кого нема комплексно коњуигирани корени.

Константите А и В се пресметуваат од изразот (4.91) за  $s = -\sigma \pm j\omega$  со користење на една од следните две релации:

$$R(-\sigma + j\omega) = A(-\sigma + j\omega) + B$$

$$R(-\sigma - j\omega) = A(-\sigma - j\omega) + B$$

Изразот за  $R(s)$  може да се напише во облик:

$$R_1 + jR_2 = A(-\sigma + j\omega) + B$$

$$R_1 - jR_2 = A(-\sigma - j\omega) + B$$

од каде што се добива:  $R_1 = -A\sigma + B$

$$R_2 = A\omega$$

односно:  $A = \frac{R_2}{\omega}; \quad B = \frac{R_1\omega + R_2\sigma}{\omega} \quad (4.92)$

Според тоа рационалната функција (4.90) се сведува во облик:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{As + B}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} + h(s) = \frac{1}{\omega} \frac{(s + \sigma)R_2 + \omega R_1}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} + h(s) \quad (4.93)$$

Со примена на инверзната Лапласова трансформација на функцијата (4.93) се добива:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{\omega} e^{-\sigma t} (R_2 \cos \omega t + R_1 \sin \omega t) + \mathcal{L}^{-1}[h(s)] \quad (4.94)$$

**Задача 4.23.** Дадена е Лапласовата трансформација  $Y(s)$  на одзивот на еден систем. Да се определи одзивот на системот во временски домен.

$$Y(s) = \frac{s}{(s+b)(s^2+a^2)} \quad (4.95)$$

**Решение:** Полиномот во именителот на рационалната функција (4.95) има три корени, и тоа:

$$s_{1/2} = \pm ja, \quad s_3 = -b$$

па според релацијата (4.90), функцијата (4.95) може да се напише во облик:

$$Y(s) = \frac{As + B}{s^2 + a^2} + \frac{C_{11}}{s + b} = \frac{R(s)}{s^2 + a^2} \quad (4.96)$$

Од равенка (4.96) се добива:

$$R(s) = (s^2 + a^2) \cdot Y(s) = \frac{s}{s + b}$$

Според тоа за  $s = ja$  ќе биде:

$$R(ja) = R_1 + jR_2 = \frac{ja}{ja + b} = \frac{ja}{ja + b} \frac{b - ja}{b - ja} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + j \frac{ab}{a^2 + b^2}$$

Од каде што се добива:  $R_1 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}$ ;  $R_2 = \frac{ab}{a^2 + b^2}$

односно според релациите (4.92) ќе биде:

$$A = \frac{b}{a^2 + b^2}; \quad B = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \quad (4.97)$$

Коефициентот (остатокот)  $C_{11}$  се пресметува според формулата (4.88):

$$C_{11} = (s + b)Y(s) \Big|_{s=-b} = \frac{-b}{a^2 + b^2} \quad (4.98)$$

Со замена на добиените вредности за коефициентите (4.97) и (4.98) во равенката (4.96) се добива:

$$Y(s) = \frac{1}{a^2 + b^2} \left( \frac{bs}{s^2 + a^2} + \frac{a^2}{s^2 + a^2} - \frac{b}{s + b} \right) \quad (4.99)$$

Со користење на табела 4.1, одзивот на системот во временски домен  $y(t)$  се добива со инверзна Лапласова трансформација на изразот (4.99):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{a^2 + b^2} (b \cos at + a \sin at - be^{-bt}) \quad (4.100)$$

**Задача 4.24.** Да се определи одзивот на системот во временски домен  $y(t)$ , ако неговата Лапласова трансформација изнесува:

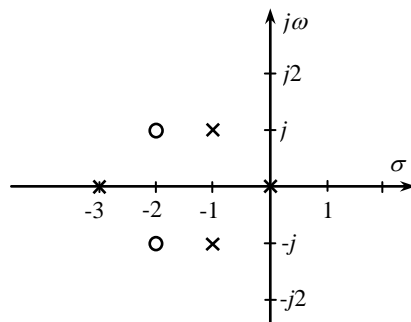
$$Y(s) = \frac{5(s^2 + 4s + 5)}{s(s^3 + 5s^2 + 8s + 6)} \quad (4.101)$$

Да се нацрта пол-нула дијаграмот на функцијата (4.101).

**Решение:** Задедената функција (4.101) може да се напише во облик:

$$Y(s) = \frac{5(s+2-j)(s+2+j)}{s(s+3)(s+1-j)(s+1+j)} \quad (4.102)$$

Пол-нула дијаграмот за функцијата (4.102) е прикажан на слика 4.3:



Слика 4.3. Пол-нула дијаграм за функцијата (4.102)

Хевисајдовиот парцијален развој на функцијата (4.101) ќе биде:

$$Y(s) = 5 \left[ \frac{As + B}{(s+1)^2 + 1} + \frac{C_{11}}{s} + \frac{C_{21}}{s+3} \right] = 5 \frac{R(s)}{(s+1)^2 + 1} \quad (4.103)$$

Изразот за  $R(s)$  се добива од равенка (4.103):

$$R(s) = \frac{1}{5} [(s+1)^2 + 1] \cdot Y(s) = \frac{(s+2-j)(s+2+j)}{s(s+3)}$$

Според тоа за  $s = -1 + j$  ќе биде:

$$R(-1+j) = \frac{(-1+j+2-j)(-1+j+2+j)}{(-1+j)(-1+j+3)} = -\frac{1}{10} - j\frac{7}{10}$$

од каде што следи:  $R_1 = -\frac{1}{10}; R_2 = -\frac{7}{10}$

односно според релациите (4.92) ќе биде:

$$A = -\frac{7}{10}; B = -\frac{8}{10} \quad (4.104)$$

Другите коефициенти од парцијалниот развојот ќе бидат:

$$C_{11} = sY(s) \Big|_{s=0} = \frac{5}{6}$$

$$C_{21} = (s+3)Y(s) \Big|_{s=-3} = -\frac{2}{15} \quad (4.105)$$

Со замена на добиените вредности за коефициентите (4.104) и (4.105) во равенката (4.103) се добива:

$$Y(s) = 5 \left[ -\frac{7}{10} \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{10} \frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{5}{6} \frac{1}{s} - \frac{2}{15} \frac{1}{s+3} \right] \quad (4.106)$$

Со користење на табела 4.1, одзивот на системот во временски домен  $y(t)$  се добива со инверзна Лапласова трансформација на изразот (4.99):

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{25}{6}u(t) - \frac{2}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}(7\cos t + \sin t) \quad (4.107)$$

**Задача 4.25.** Комплексниот лик на одзивот на еден систем е даден со изразот:

$$Y(s) = \frac{(s+2) \cdot e^{-s}}{s^2+4} \quad (4.108)$$

Да се определи оригиналот, т.е. одзивот на системот во временски домен  $y(t)$ .

**Решение:** Задедената функција (4.101) може да се напише во облик:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+4} e^{-s} + \frac{2}{s^2+4} e^{-s}$$

Со примена на табелата 4.1 и правилата на Лапласовата трансформација се добива:



$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + 4} e^{-s} \right] = \cos 2(t-1)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{s^2 + 4} e^{-s} \right] = \sin 2(t-1)$$

Според тоа ќе биде:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y(s)] = \cos 2(t-1) + \sin 2(t-1) \quad (4.109)$$

**Задача 4.26.** Анализирани е систем, кај кого не се познати почетните услови и на влезот не е доведена понуда. Комплексниот лик на одзивот на системот е даден со изразот:

$$Y(s) = \frac{s + z}{s^2 + 5s + 6} \quad (4.110)$$

Да се определат почетните услови на системот.

**Решение:** Од обликот на функцијата (4.110) може да се заклучи дека се работи за систем од втор ред, па според тоа треба да се определат два почетни услови, односно:  $y_0 \equiv y(0)$  и  $y_0^1 \equiv \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0}$ .

Со користење на особината 5 (теорема за почетна вредност) се добива:

$$y_0 = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s + z}{s^2 + 5s + 6} = 1 \quad (4.111)$$

$$y_0^1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L} \left[ \frac{dy}{dt} \right] \quad (4.112)$$

Според особината 3 за Лапласова трансформација од извод на функција следи:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{dy}{dt} \right] = sY(s) - y_0 = s \frac{s + z}{s^2 + 5s + 6} - 1 = \frac{s(z-5) - 6}{s^2 - 5s + 6} \quad (4.113)$$

Со замена на изразот (4.113) во равенката (4.112) се добива:

$$y_0^1 = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s(z-5) - 6}{s^2 - 5s + 6} = z - 5$$

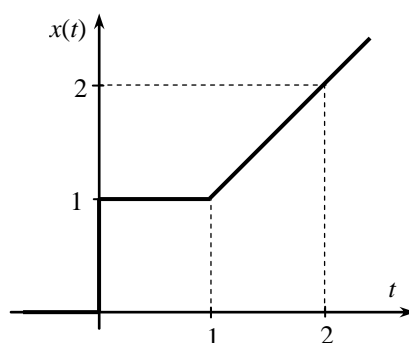
Според тоа почетните услови на системот ќе бидат:

$$y_0 = 1, \quad y_0^1 = z - 5.$$

**Задача 4.27.** Математичкиот модел на еден систем е даден со равенката:

$$\frac{dy}{dt} + y = x(t) \quad (4.114)$$

Да се определи одзивот на системот ако почетните услови се еднакви на нула и ако на влез е доведена функцијата претставена на слика 4.4:



Слика 4.4. Дијаграм на влезната функција  $x(t)$

**Решение:** За почетни услови еднакви на нула, Лапласовата трансформација на одзивот на системот ќе биде:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \cdot X(s) \quad (4.115)$$

Влезната функција  $x(t)$ , дадена на слика 4.4, има облик:

$$x(t) = u(t) + r(t-1) \quad (4.116)$$

Лапласовата трансформација на влезот ќе биде:

$$X(s) = \frac{1}{s} + e^{-s} \frac{1}{s^2} \quad (4.117)$$

Со замена на изразот (4.117) во равенката (4.115) се добива:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{s^2(s+1)} e^{-s}$$

односно, со примена на Хевисајдовиот парцијален развој, комплексниот лик на одзивот ќе се сведе на следниот облик:

$$Y(s) = \frac{C_{11}}{s} + \frac{C_{21}}{s+1} + \left( \frac{C_{31}}{s} + \frac{C_{32}}{s^2} + \frac{C_{41}}{s+1} \right) \cdot e^{-s} \quad (4.118)$$

Коефициентите  $C_{ik}$ , од Хевисајдовиот парцијален развој, во равенката (4.118) ќе бидат:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= s \cdot \frac{1}{s(s+1)} \Big|_{s=0} = 1 \\
 C_{21} &= (s+1) \cdot \frac{1}{s(s+1)} \Big|_{s=-1} = -1 \\
 \left( \begin{array}{l} n_i = 2 \\ k = 1 \end{array} \right) & C_{31} = \frac{1}{1!} \cdot \frac{d}{ds} \left[ s^2 \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \right] \Big|_{s=0} = \frac{-1}{(s+1)^2} \Big|_{s=0} = -1 \\
 \left( \begin{array}{l} n_i = 2 \\ k = 1 \end{array} \right) & C_{32} = s^2 \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \Big|_{s=0} = 1 \\
 & C_{41} = (s+1) \cdot \frac{1}{s^2(s+1)} \Big|_{s=-1} = 1
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

Со замена на вредностите на коефициентите  $C_{ik}$  (4.119) во равенката (4.118), комплексниот лик на одзивот се добива во облик:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \left( -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \right) \cdot e^{-s}$$

а со примена на табелата 4.1 и правилата на Лапласовата трансформација се добива одзивот на системот во временски домен:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = u(t) - u(t-1) + r(t-1) - (1-e)e^{-t} \tag{4.120}$$

**Задача 4.28.** Дадена е алгебарската функција:

$$F(s) = \frac{10(s^2+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{4.121}$$

Да се определи вредноста на функцијата  $F(s)$  за  $s_0 = -2 + j$

- а). аналитички
- б). графички

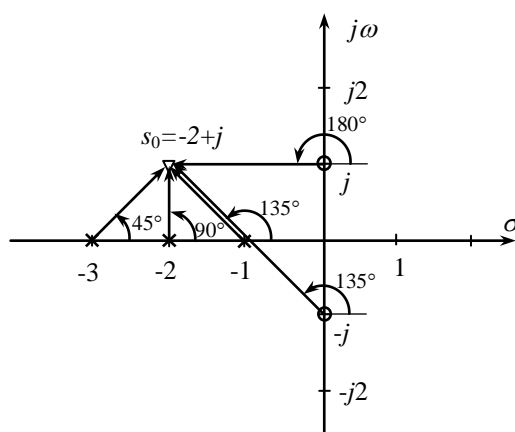
**Решение:** а). Во изразот на функцијата (4.121) едноставно се заменува  $s = s_0 = -2 + j$  и се пресметува нејзината вредност:

$$F(s_0) = \frac{10[(-2+j)^2 + 1]}{(-2+j+1)(-2+j+2)(-2+j+3)} = \frac{10(4-4j-1+1)}{(-1+j)j(1+j)}$$

$$F(s_0) = \frac{40(1-j)}{-2j} = \frac{-20(1-j)}{j} \cdot \frac{j}{j} = 20(1+j) \quad (4.122)$$

б). Се црта пол-нула дијаграмот за функцијата (4.121) и сите полови и нули се поврзуваат со вектори со точката  $s_0 = -2 + j$ :

$$F(s) = \frac{10(s+1+j)(s+1-j)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



Слика 4.5. Пол-нула дијаграм за функцијата  $F(s)$

Според дијаграмот на слика 4.5. се добива:

$$|F(s_0)| = 10 \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}} = 20\sqrt{2} \quad (4.123)$$

$$\arg F(s_0) = 180^\circ + 135^\circ - 135^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \quad (4.124)$$

Функцијата  $F(s_0)$  со изразите (4.123) и (4.124) е запишана во облик:

$$F(s_0) = |F(s_0)| e^{j \arg F(s_0)} \quad (4.125)$$

па според Ојлеровите формули (задача 3.9) се добива:

$$F(s_0) = 20\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} = 20\sqrt{2} (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ) = 20(1+j)$$

**Задача 4.29.** Проекцијата во  $s$ -домен на едначниот отскочен одзив од еден систем изнесува:

$$Y(s) = \frac{2(s^2 - 3)}{s(s^2 + 1)(s^2 - 1)} \quad (4.126)$$

Да се изврши парцијален развој на комплексниот лик на одзивот  $Y(s)$  со пресметување на резидиумите по графички пат, а потоа да се определи одзивот во временски домен  $y(t)$ .

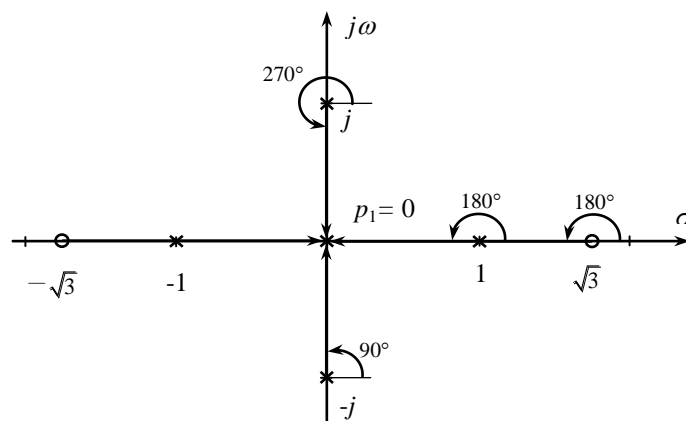
**Решение:** **НАПОМЕНА:** Под поимот единечен отскочен одзив се подразбира одзив на системот кога на влезот е доведена единечна отскочна функција, а сите почетни услови на системот се еднакви на нула.

Со примена на Хевисајдовиот парцијален развој, комплексниот лик на одзивот (4.126) ќе се сведе на следниот облик:

$$Y(s) = \frac{C_{11}}{s} + \frac{C_{21}}{s+j} + \frac{C_{31}}{s-j} + \frac{C_{41}}{s+1} + \frac{C_{51}}{s-1} \quad (4.127)$$

Коефициентите  $C_{ik}$ , од Хевисајдовиот парцијален развој во равенката (4.127), може да се определат и по графо-аналитички пат, на тој начин што се црта пол-нула дијаграмот за функцијата (4.126) и сите останати полови и нули се поврзуваат со вектори со полот за кого се пресметува коефициентот, односно остатокот:

$$Y(s) = \frac{2(s + \sqrt{3})(s - \sqrt{3})}{s(s + j)(s - j)(s + 1)(s - 1)}$$

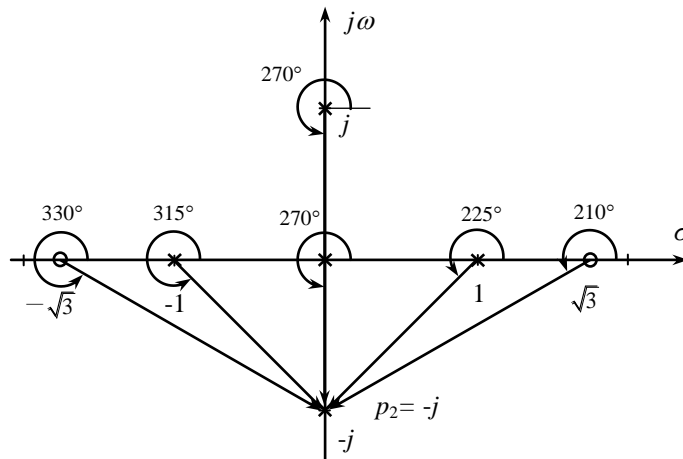


Слика 4.6. Пол-нула дијаграм за функцијата  $Y(s)$  за определување на  $C_{11}$

Според дијаграмот на слика 4.6. коефициентот  $C_{11}$  за полот  $s = p_1 = 0$  се добива:

$$C_{11} = 2 \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} \left[ 180^\circ + 0^\circ - 270^\circ - 180^\circ - 90^\circ - 0^\circ = 6 \right]_{-360^\circ}$$

односно според равенка (4.125) следи:  $C_{11} = 6 \cdot [\cos 0^\circ + j \sin 0^\circ] = 6$

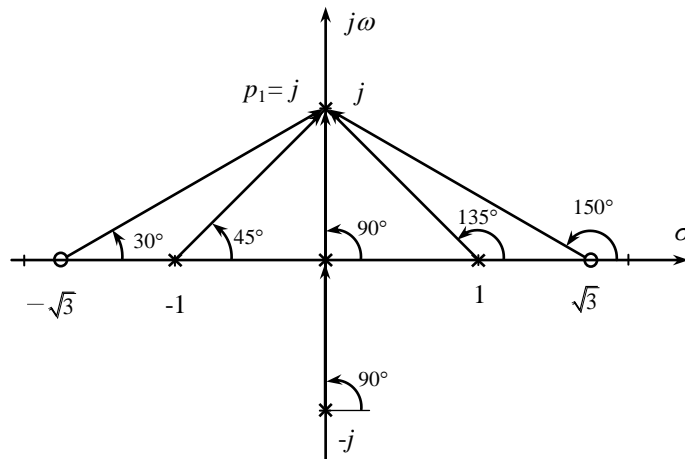


Слика 4.7. Пол-нула дијаграм за функцијата  $Y(s)$  за определување на  $C_{21}$

Според дијаграмот на слика 4.7. коефициентот  $C_{21}$  за полот  $s = p_2 = -j$  се добива:

$$C_{21} = 2 \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \left[ 330^\circ + 210^\circ - 270^\circ - 270^\circ - 225^\circ - 315^\circ = 2 \right]_{-180^\circ}$$

односно:  $C_{21} = 2 \cdot [\cos 180^\circ - j \sin 180^\circ] = -2$

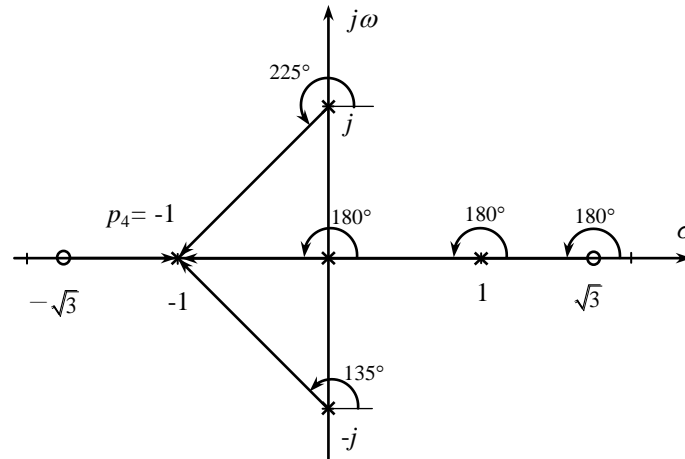


Слика 4.8. Пол-нула дијаграм за функцијата  $Y(s)$  за определување на  $C_{31}$

Според дијаграмот на слика 4.8. коефициентот  $C_{31}$  за полот  $s = p_3 = j$  се добива:

$$C_{31} = 2 \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \left[ \angle 150^\circ + 30^\circ - 135^\circ - 45^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 2 \angle -180^\circ \right]$$

односно:  $C_{31} = 2 \cdot [\cos 180^\circ - j \sin 180^\circ] = -2$

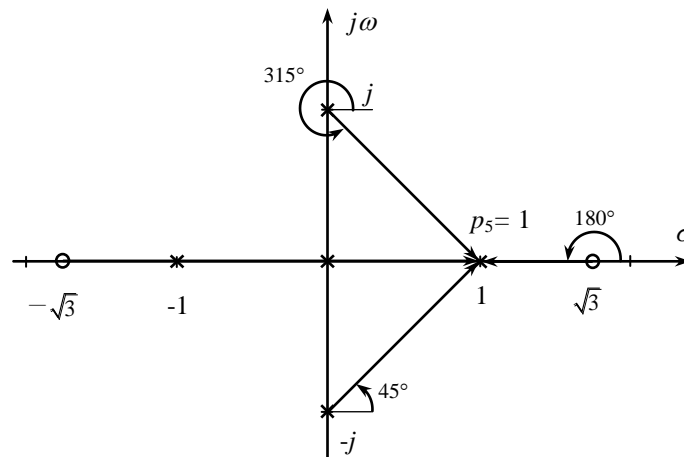


Слика 4.9. Пол-нула дијаграм за функцијата  $Y(s)$  за определување на  $C_{41}$

Според дијаграмот на слика 4.9. коефициентот  $C_{41}$  за полот  $s = p_4 = -1$  се добива:

$$C_{41} = 2 \frac{(1 + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \left[ \angle 180^\circ + 0^\circ - 180^\circ - 180^\circ - 225^\circ - 135^\circ = 1 \angle -180^\circ \right]$$

односно:  $C_{41} = 1 \cdot [\cos 180^\circ - j \sin 180^\circ] = -1$



Слика 4.10. Пол-нула дијаграм за функцијата  $Y(s)$  за определување на  $C_{51}$

Според дијаграмот на слика 4.10. коефициентот  $C_{s_1}$  за полот  $s = p_5 = 1$  се добива:

$$C_{s_1} = 2 \frac{(1 + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \left[ 180^\circ + 0^\circ - 0^\circ - 0^\circ - 315^\circ - 45^\circ = 1 \right] \left[ -180^\circ \right]$$

односно:  $C_{s_1} = 1 \cdot [\cos 180^\circ - j \sin 180^\circ] = -1$

Со замена на вредностите на коефициентите  $C_{ik}$  во равенката (4.127), комплексниот лик на одзивот се добива во облик:

$$Y(s) = \frac{6}{s} - \frac{2}{s+j} - \frac{2}{s-j} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$$

а со примена на табелата 4.1 и правилата на Лапласовата трансформација се добива одзивот на системот во временски домен:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 6u(t) - 2e^{-jt} - 2e^{jt} - e^{-t} - e^t \quad (4.128)$$

односно:  $y(t) = 6u(t) - 4\cos t - e^{-t}(1 + e^{2t}) \quad (4.129)$

**НАПОМЕНА:** Фазниот допринос од векторите кои појдуваат од нули се зема со позитивен предзнак, а фазниот допринос од векторите кои појдуваат од полови се зема со негативен предзнак.

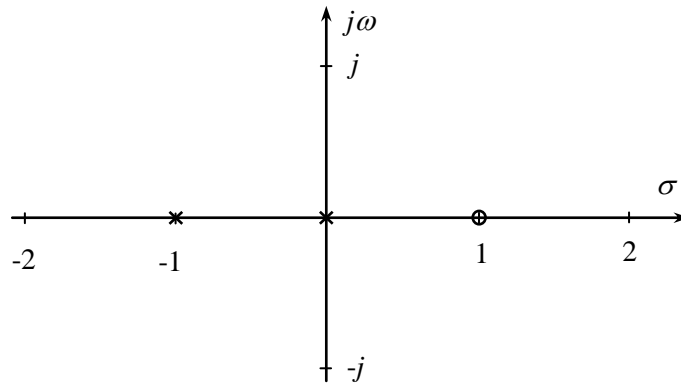
**Задача 4.30.** Комплексниот лик на одзивот на еден систем  $Y(s)$  има полови во  $s = p_1 = 0$  и  $s = p_2 = -1$  и нула во  $s = z_1 = 1$ , а граничната вредност на оригиналот е  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 5$ . Да се нацрта пол-нула дијаграмот за функцијата  $Y(s)$  и да се определат функциите  $Y(s)$  и  $y(t)$ .

**Решение:** Според зададените услови комплексниот лик на одзивот може да се напише во облик:

$$Y(s) = \frac{k(s-1)}{s(s+1)} \quad (4.130)$$

Пол-нула дијаграмот за функцијата (4.130) е прикажан на слика 4.11:





Слика 4.11. Пол-нула дијаграм за функцијата (4.130)

Од условот за граничната вредност на оригиналот се добива:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} k \frac{s(s-1)}{s(s+1)} = 5$$

односно:  $k = -5$ .

Според тоа, комплексниот лик на одзивот на системот (4.130) ќе изнесува:

$$Y(s) = -\frac{5(s-1)}{s(s+1)} \quad (4.131)$$

Одзивот на системот  $y(t)$  се добива како инверзна Лапласова трансформација на комплексниот лик  $Y(s)$ , односно:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{5(s-1)}{s(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_{11}}{s} + \frac{C_{21}}{s+1}\right] = 5u(t) - 10e^{-t} \quad (4.132)$$

каде што се:

$$C_{11} = s \cdot \frac{-5(s-1)}{s(s+1)} \Big|_{s=0} = 5$$

$$C_{21} = (s+1) \cdot \frac{-5(s-1)}{s(s+1)} \Big|_{s=-1} = -10$$

**Задачи за вежбање:**

**Задача 4.31.** Комплексниот лик на одзивот на еден систем  $Y(s)$  има полови во  $s = p_1 = -1$ ,  $s = p_2 = -2$  и  $s = p_3 = -3$  и нули во  $s = z_{1/2} = -1 \pm j$ , а граничната вредност на оригиналот е  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{3}$ .

Да се определи функцијата  $Y(s)$  и да се нацрта пол-нула дијаграмот за истата. Да се определи оригиналот  $y(t)$  на комплексниот лик  $Y(s)$  и при тоа да се користи Хевисајдовиот парцијален развој со графичкото определување на резидуумите.

**Решение:** Според зададените услови одзивот на системот ќе биде:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{5}{2}e^{-3t} \quad (4.133)$$

**Задача 4.32.** Анализирани е систем, кај кого не се познати почетните услови и на влезот не е доведена понуда. Комплексниот лик на одзивот на системот е даден со изразот:

$$Y(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 6s + 1}{s(s^3 + 3s^2 - s - 6)} \quad (4.134)$$

Да се определат почетните услови на системот:

$$y_0 \equiv y(0) = ?, \quad y_0^1 \equiv \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = ? \quad \text{и} \quad y_0^2 \equiv \left. \frac{d^2y}{dt^2} \right|_{t=0} = ?$$

и да се определи неговата крајна вредност:  $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = ?$ .

**Решение:** Почетните услови одзивот на системот ќе изнесуваат:

$$y_0 = 1, \quad y_0^1 = 2 \quad \text{и} \quad y_0^2 = 0 \quad (4.135)$$

а крајната вредност на одзивот ќе биде:  $y(\infty) = -\frac{1}{6}$

**Задача 4.33.** Даден систем е опишан со математички модел, преку диференцијална равенка од втор ред:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 4x \quad (4.136)$$

а). Со користење на Лапласовата трансформација да се определи одзивот за влезот  $x(t) = u(t-2)$ , ако почетните услови на системот се:

$$y(0^+) = 1 \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 2 \quad (4.137)$$

б). Да се определи: пригушувањето на системот  $\xi$ , непригушената природна фреквенција  $\omega_n$ , пригушената природна фреквенција  $\omega_d$ , пригушниот коефициент  $\alpha$  и временската константа  $\tau$ .

**Решение:** а). Според зададените услови одзивот на системот ќе биде:

$$y(t) = u(t-2) - e^{-2(t-2)} - 2(t-2)e^{-2(t-2)} + e^{-2t} + 4te^{-2t} \quad (4.138)$$

б). Од равенката (преносната функција) на системот:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} \quad (4.139)$$

и нејзиниот општ облик на запушување:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.140)$$

со споредување на равенката (4.139) и (4.140) лесно може да се добијат бараните големини ( $k=1$ ):

$\xi = 1$  - степен на пригушување,

$\omega_n = 2$  - природна непригушена фреквенција,

$\omega_d = 0$  - природна пригушена фреквенција,

$\alpha = \xi\omega_n = 2$  - пригушен коефициент,

$\tau = \frac{1}{\alpha} = 0,5 (s)$  - временска константа.

**Задача 4.34.** Даден систем е опишан со математички модел, преку диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 12 \frac{dy}{dt} + 8y = 10x \quad (4.141)$$

а). Со користење на Лапласовата трансформација да се определи одзивот на системот  $y(t)$  ако на влезот е доведена побудата  $x(t) = e^{-4t}$  и ако сите почетни услови на системот се нула.

б). Да се одреди сталната состојба на одзивот и преодниот одзив.

**Решение:** а). Според зададените услови одзивот на системот ќе биде:

$$y(t) = \frac{5}{2}t^2 e^{-2t} - \frac{5}{2}te^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{5}{4}e^{-4t} \quad (4.142)$$

$$\text{б). } y_{ss}(t) = 0, \quad y_{ps}(t) = \frac{5}{2}t^2 e^{-2t} - \frac{5}{2}te^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{5}{4}e^{-4t} \quad (4.143)$$

**Задача 4.35.** Даден систем е опишан со математички модел, преку диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 6\frac{d^2 y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 16y = 8x \quad (4.144)$$

Со користење на Лапласовата трансформација да се определи одзивот на системот  $y(t)$  ако на влезот е доведена побудата  $x(t) = e^{-4t}$  и ако сите почетни услови на системот се нула.

**Решение:** Според зададените услови одзивот на системот ќе биде:

$$y(t) = \frac{4t^2}{2}e^{-2t} - 2te^{-2t} + e^{-2t} - e^{-4t} \quad (4.145)$$

За вежбање на примената на Лапласовата трансформација може да послужат и сите примери од 3 глава "Линеарни системи и диференцијални равенки" во кои што треба да се определи одзивот на системот при зададени почетни услови и влез на системот.



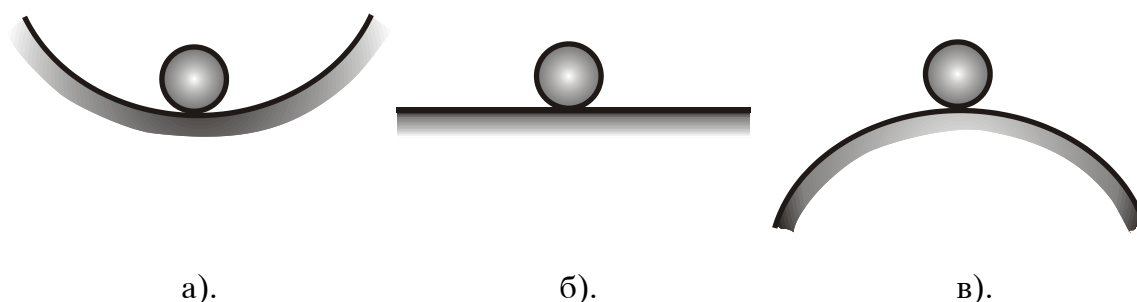
---

**ПЕТА  
ГЛАВА**

---

**5. СТАБИЛНОСТ****5.1. Дефиниции за стабилноста**

Ако под дејство на надворешни влијанија еден систем се изведе од рамнотежна состојба и ако по престанокот на дејството на тие влијанија повторно се врати (со определена точност) во истата рамнотежна состојба, тогаш за тој систем се вели дека е стабилен. Најдобра илустрација за стабилноста на системите претставува тркалањето на топче по различен облик на рамнини, како што е прикажано на слика 5.1.



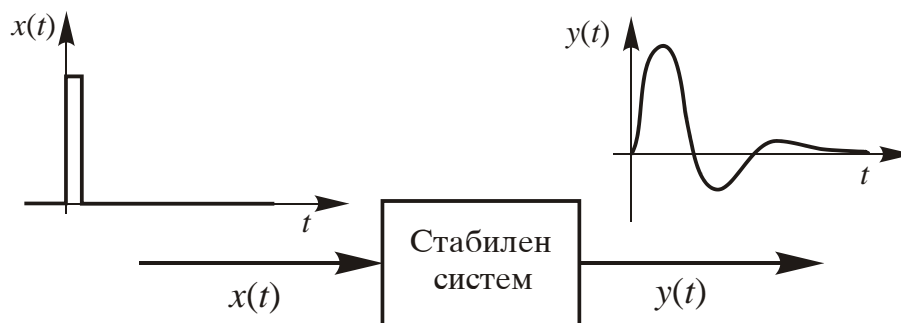
Слика 5.1. Илустрација на стабилност

Случајот под а) претставува стабилен систем, бидејќи по задвижување на топчето тоа секогаш ќе се врати и ќе застане во почетната позиција. Ситуацијата под б) илустрира гранично стабилен систем, бидејќи ако топчето се задвижи тоа по извесно време ќе застане, но, не во почетната позиција, туку во некоја друга позиција. Во понатамошните анализи на системите, гранично стабилните системи ќе бидат третирали како нестабилни системи. Во третиот случај на слика 5.1 под в) е илустриран еден нестабилен систем, бидејќи ако топчето се задвижи тоа никогаш повеќе нема да се врати во почетната позиција и нема да застане.

Стабилноста на еден систем е определена со карактеристиките на неговиот одзив во зависност од влезовите и пореметувањата. Во таа насока ќе бидат дадени две дефиниции за стабилност на системите:

1. Еден систем е стабилен доколку неговиот импулсен одзив тежи кон нула кога времето тежи кон бесконечност.

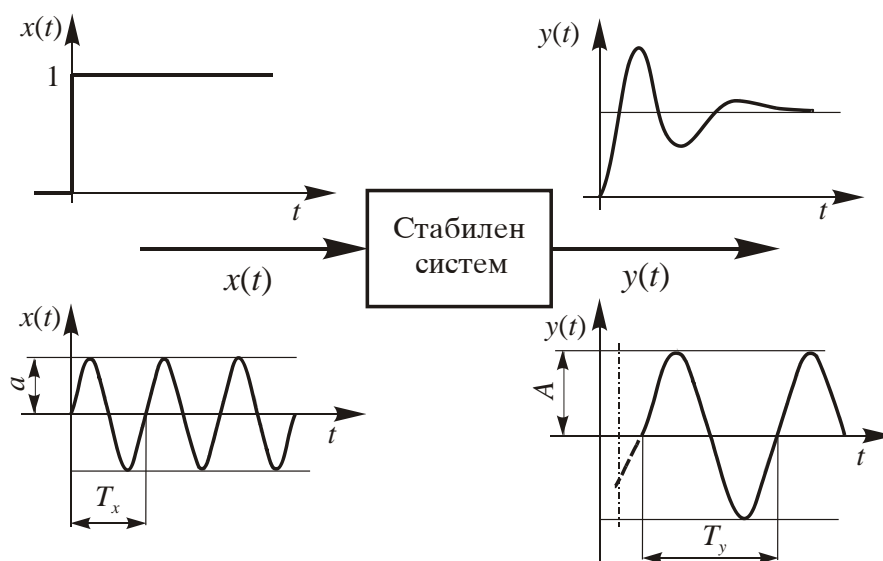
Под поимот импулсен одзив се подразбира одзивот на системот којшто е добиен кога на влезот ќе биде доведена единечна импулсна функција како побуда на системот, како што е илустрирано на слика 5.2.



Слика 5.2. Илустрација на импулсен одзив кај стабилен систем

2. Еден систем е стабилен доколку за секој ограничен влез се добива ограничен излез.

Под поимите ограничен влез и излез се подразбираат промени коишто со текот на времето се стабилизираат на некоја константна вредност, како што е илустрирано на слика 5.3. Но, исто така, под овие поими се подразбираат и промени како што се простопериодичните тригонометриски функции чијашто амплитуда е со ограничена вредност. Според тоа, ако еден стабилен систем на влезот се побуди со простопериодична синусоида, тогаш на излезот ќе се добие исто така простопериодична синусоида но со друга периода и друга амплитуда.



Слика 5.3. Илустрација на ограничен одзив кај стабилен систем

3. Потребен услов за еден систем да биде стабилен е реалните делови на корените на карактеристичната равенка на системот да бидат негативни.

Со други зборови, сите решенија на карактеристичната равенка треба да се наоѓаат лево од ординатата, или во левата половина од  $\sigma \times j\omega$  - рамнината.

Ако постојат корени (решенија) кај коишто реалниот дел е еднаков на нула, односно лежат на  $j\omega$ -оската, или корени чијшто реален дел е позитивен, тогаш за тие системи се вели дека се гранично стабилни, односно нестабилни системи.

Честопати, многу значајна карактеристика за однесувањето на системите е степенот на стабилност на системите. Под овој поим се подразбира дека ако системот е стабилен тогаш треба квалитативно да се знае колку блиску, односно далеку, тој систем се наоѓа во однос на гранично стабилната состојба



(нестабилната состојба). Од овој аспект се воведуваат два поими за стабилноста, а тие се:

- апсолутна стабилност на системите и
- релативна стабилност на системите.

Под поимот апсолутна стабилност на системите се подразбира дека со анализа на стабилноста на системот ќе се даде само одговор "ДА" или "НЕ" за тоа дали системот е стабилен.

Ако е потребно да се определи и степенот на стабилност на системот, односно да се определи релативната стабилност на системот, тогаш треба да се определат интервалите на дозволени вредности на клучните параметри на системот, во коишто истиот е стабилен, и од таму да се процени за колку е одалечен системот од гранично стабилната состојба.

**Задача 5.01.** Познати се импулсните одзиви на пет системи:

$$\begin{aligned}
 \text{а). } & y_{\delta}(t) = \sin 2t \\
 \text{б). } & y_{\delta}(t) = t^{100} e^{-t} \\
 \text{в). } & y_{\delta}(t) = e^{-2t} \\
 \text{г). } & y_{\delta}(t) = 2 \\
 \text{д). } & y_{\delta}(t) = e^{-t} \sin 3t
 \end{aligned} \tag{5.02}$$

Со примена на дефиницијата за стабилност да се определи стабилноста на секој од системите.

**Решение:** Според првата дефиниција за стабилност, системот е стабилен доколку неговиот импулсен одзив тежи кон нула кога времето се стреми кон бесконечност.

$$\begin{aligned}
 \text{а). } & \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\delta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sin 2t \neq 0 && \text{- системот е нестабилен.} \\
 \text{б). } & \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\delta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{100} e^{-t} = 0 && \text{- системот е стабилен.} \\
 \text{в). } & \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\delta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-2t} = 0 && \text{- системот е стабилен.} \\
 \text{г). } & \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\delta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \neq 0 && \text{- системот е нестабилен.} \\
 \text{д). } & \lim_{t \rightarrow \infty} y_{\delta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \sin 3t = 0 && \text{- системот е стабилен.}
 \end{aligned} \tag{5.03}$$

**Задача 5.02.** Врз основа на изразот добиен за одзивот на системот и со користење на дефинициите за стабилност да се искоментира стабилноста на системите анализирани во претходните задачи:

а). Задача 3.13; - за влез импулсна функција:  $x(t) = \delta(t)$ ,  
се добива излезот:  $y_\delta(t) = y_a(t) + y_b(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$  (5.04)

б). Задача 3.14; - за влез импулсна функција:  $x(t) = \delta(t)$ ,  
се добива излезот:  $y_\delta(t) = y_a(t) + y_b(t) = 3e^{-t}(1 - \cos t)$  (5.05)

в). Задача 3.20; - за влез отскочна функција:  $x(t) = 0,05 \cdot u(t)$ ,  
се добива излезот:  $y(t) = 0,05 \cdot u(t) + 0,0125e^{-2t} - 0,0625e^{-10t}$  (5.06)

**Решение:** Според првата дефиниција за стабилност, системот е стабилен доколку неговиот импулсен одзив тежи кон нула кога времето се стреми кон бесконечност;

а).  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_\delta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-2t} - e^{-3t}) = 0$ , (5.07)

според тоа станува збор за стабилен систем.

б).  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_\delta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [3e^{-t}(1 - \cos t)] = 0$ , (5.08)

и овој систем е стабилен.

в).  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [0,05 \cdot u(t) + 0,0125e^{-2t} - 0,0625e^{-10t}] = 0,05$  (5.09)

Кај овој систем на влезот е доведена отскочна функција, којашто е по дефиниција ограничена функција, и на излезот се добива, исто така, ограничена функција. Според втората дефиниција за стабилност на системите, овој систем не мора да биде стабилен, затоа што излезот кај стабилен систем мора да биде ограничен за секој ограничен влез. Ограничен излез за еден специфичен ограничен влез не ја гарантира стабилноста на системот.

**Задача 5.03.** Корените на карактеристичните равенки за неколку различни системи се дадени со нивните конкретни вредности. За секој од системите да се

определи дали множеството на корени на карактеристичната равенка презентира стабилен, гранично стабилен или нестабилен систем.

$$\begin{array}{lll}
 \text{а). } -1, -3 & \text{б). } -1+2j, -1-2j & \text{в). } -2, -3, 2 \\
 \text{г). } -1, +1 & \text{д). } -2+j, -2-j, 2j, -2j & \text{ѓ). } -3, -2, 0 \\
 \text{е). } -j, j, -1, 1 & \text{ж). } -2-3j, -2+3j, -2 & \text{з). } 1, -2, -3
 \end{array} \quad (5.10)$$

**Решение:** Множествата од корените под (а), (б) и (ж) претставуваат стабилни системи, бидејќи сите корени имаат негативни реални делови. Множествата од корените под (д) и (ѓ) претставуваат гранично стабилни (нестабилни) системи, бидејќи имаат корени коишто лежат на  $j\omega$ -оската, односно нивниот реален дел е еднаков на нула. Множествата од корените под (в), (г), (е) и (з) претставуваат нестабилни системи затоа што секое од нив има барем по еден корен со позитивен реален дел.

**Задача 5.04.** Математичкиот модел со кој е опишана работата на еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 7\frac{dy}{dt} - 6y = \frac{dx}{dt} - 8x \quad (5.11)$$

Со анализа на положбата на корените на карактеристичната равенка на системот да се определи стабилноста на системот.

**Решение:** Ако диференцијалната равенка (5.11) се запише со помош на линеарниот оператор за диференцирање:  $D \equiv \frac{d}{dt}$ , тогаш се добива:

$$(D^3 - 7D - 6)y = (D + 8)x \quad (5.12)$$

од каде што веднаш се определува карактеристичната равенка на системот:

$$D^3 - 7D - 6 = 0 \quad (5.13)$$

Корените на карактеристичната равенка (5.13) лесно може да се определат и таа може да се запише во облик:

$$(D+1)(D+2)(D-3) = 0 \quad (5.14)$$

односно корените се:  $D_1 = -1, D_2 = -2, D_3 = 3$ .

Според тоа дадениот систем е нестабилен, бидејќи еден корен (едно решение) на карактеристичната равенка се наоѓа во десната половина од  $\sigma \times j\omega$ - полето, односно има позитивен реален дел.

### 5.1. Routh-ов критериум за стабилноста

Оваа метода за определување на стабилноста на системите, многу често се користи за определување на апсолутната стабилност на системите.

Routh-овиот критериум за стабилноста гласи: системот е асимптотски стабилен, ако предзнаците на членовите од првата колона на Routh-овата табела (Табела 5.1) се идентични.

Routh-овиот критериум за стабилноста се базира на карактеристичната равенка на системите. Начинот на пополнување на Routh-овата табела за карактеристична равенка од  $n$ -ти ред (рав. 5.01) е даден во табела 5.1.

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5.01}$$

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	.....
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	.....
$s^{n-2}$	$C_{31} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$C_{32} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$C_{33} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	.....
$s^{n-3}$	$C_{41} = \frac{C_{31}a_{n-3} - a_{n-1}C_{32}}{C_{31}}$	$C_{42} = \frac{C_{31}a_{n-5} - a_{n-1}C_{33}}{C_{31}}$	$C_{43} = \frac{C_{31}a_{n-7} - a_{n-1}C_{34}}{C_{31}}$	.....
$s^{n-4}$	$C_{51} = \frac{C_{41}C_{32} - C_{31}C_{42}}{C_{41}}$	$C_{52} = \frac{C_{41}C_{33} - C_{31}C_{43}}{C_{41}}$	$C_{53} = \frac{C_{41}C_{34} - C_{31}C_{44}}{C_{41}}$	.....
.....	.....	.....	.....	.....
$s^0$	$a_0$			

Табела 5.1. Начин на пополнување на Routh-овата табела

**Задача 5.05.** Математичкиот модел со кој е опишана работата на еден физички систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 5 \frac{d^3 y}{dt^3} + 10 \frac{d^2 y}{dt^2} + 10 \frac{dy}{dt} + 4y = \frac{dx}{dt} + 5x \quad (5.15)$$

Со примена на Routh-овиот критериум за стабилност да се определи дали е системот стабилен или е нестабилен.

**Решение:** Диференцијалната равенка (5.15) се запишува со помош на линеарниот оператор за диференцирање:  $D \equiv \frac{d}{dt}$ , пришто се сведува во облик:

$$(D^4 + 5D^3 + 10D^2 + 10D + 4)y(t) = (D + 5)x(t) \quad (5.16)$$

Ако линеарниот оператор за диференцирање ( $D$ ) се замени со Лапасовиот оператор ( $s$ ), односно  $D \triangleq s$ , се добива преносната функција за системот во  $s$ -доменот:

$$(s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4)Y(s) = (s + 5)X(s) \quad (5.17)$$

односно:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 5}{s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4} \quad (5.18)$$

Карактеристичната равенка за овој систем ќе биде:

$$s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4 = 0 \quad (5.19)$$

Routh-овата табела за дадената карактеристична равенка (5.19) е:

	$s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4 = 0$		
$s^4$	1	10	4
$s^3$	5	10	0
$s^2$	8	4	0
$s^1$	7,5	0	
$s^0$	4		

Со оглед дека нема промена на знакот во првата колона од Routh-овата табела, сите корени на карактеристичната равенка имаат негативни реални делови и системот е стабилен.

**Задача 5.06.** Да се определи стабилноста на еден систем со помош на Routh-овиот критериум за стабилност, ако е дадена неговата карактеристична равенка:

$$s^4 + s^3 - s - 1 = 0 \quad (5.20)$$

**Решение:** Routh-овата -овата табела за дадената карактеристична равенка (5.20) ќе биде:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & & & s^4 + s^3 - s - 1 = 0 \\
 s^4 & 1 & 0 & -1 \\
 s^3 & 1 & -1 & 0 \\
 s^2 & 1 & -1 & 0 \\
 s^1 & 0^* & 0 & \\
 s^0 & -1 & & 
 \end{array}$$

Коефициентот во првата колона од редот  $s^0$  се добива кога нулата ( $0^*$ ) од првата колона од редот  $s^1$  се заменува со многу мала вредност  $\varepsilon \rightarrow 0$ , односно:

$$C_{s^1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(-1) - 0}{\varepsilon} = -1$$

Овде може да се заклучи дека коефициентот во редот  $s^0$  секогаш е еднаков на слободниот член од карактеристичната равенка за која што се составува Routh-овата табела.

Во првата колона од Routh-овата табела постои само една промена на знакот, па според тоа карактеристичната равенка (5.20) има еден корен (решение) со позитивен реален дел.

Редицата на нули во  $s^1$ -редот од Routh-овата табела покажува дека карактеристичната равенка има пар на корени коишто ја задоволуваат помошната равенка формирана на следниот начин:

$$As^2 + B = 0 \quad (5.21)$$

каде што се  $A$  и  $B$  еднакви на првиот и вториот коефициент од  $s^2$ -редот, односно:

$$s^2 - 1 = 0 \quad (5.22)$$

Корените на равенката (5.22) се:  $s_1 = 1$ ;  $s_2 = -1$  и тие истовремено претставуваат корени на карактеристичната равенка (5.20). Според тоа коренот  $s_1 = 1$  е со позитивен реален дел и го прави системот нестабилен.

**Задача 5.07.** Математичкиот модел од еден систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 8 \frac{d^3 y}{dt^3} + 24 \frac{d^2 y}{dt^2} + 32 \frac{dy}{dt} + K \cdot y = K \cdot x \quad (5.23)$$

- а). За кои вредности од  $K$  системот ќе биде стабилен?  
 б). За кои вредности од  $K$  системот ќе биде гранично стабилен и кои се во овој случај сите корени на карактеристичната равенка на системот?

**Решение:** Диференцијалната равенка (5.23) се запишува во облик:

$$(D^4 + 8D^3 + 24D^2 + 32D + K)y(t) = K \cdot x(t) \quad (5.24)$$

Со смена на линеарниот оператор за диференцирање ( $D$ ) со Лапласовиот оператор ( $s$ ), се добива преносната функција за системот во  $s$ -доменот:

$$(s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + K)Y(s) = K \cdot X(s) \quad (5.25)$$

односно: 
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + K} \quad (5.26)$$

Карактеристичната равенка за овој систем ќе биде:

$$s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + K = 0 \quad (5.27)$$

Routh-овата табела за дадената карактеристична равенка (5.27) е:

$$s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + K = 0$$

$s^4$	1	24	$K$
$s^3$	8	32	0
$s^2$	20	$K$	0
$s^1$	$\frac{20 \cdot 32 - 8 \cdot K}{20}$	0	
$s^0$	$K$		

а). Според тоа, од првата колона од Routh-овата табела се добиваат два услови коишто треба да ги исполни факторот на засилување на системот  $K$ , а тие се:

- I).  $K > 0$  и  
 II).  $80 - K > 0 \Rightarrow K < 80$ ,

односно системот ќе биде стабилен ако вредноста на факторот на засилување на системот биде во границите:

$$0 < K < 80 \quad (5.28)$$

б). Системот ќе биде гранично стабилен ако е:  $K = 80$ .

За оваа вредност на  $K$  во  $s^1$ -редот од Routh-овата табела сите коефициенти се еднакви на нула, па според тоа парот на корени од карактеристичната равенка коишто ја задоволуваат помошната равенка ќе бидат:

$$\begin{aligned} As^2 + B &= 0 \\ 20s^2 + 80 &= 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

односно:

$$s_1 = +2j \quad \text{и} \quad s_2 = -2j$$

Другите два корена од карактеристичната равенка ќе се добијат ако карактеристичниот полином се подели со полиномот од равенката (5.29), односно:

$$(s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 80) : (s^2 + 4) = s^2 + 8s + 20 \quad (5.30)$$



Со решавање на добиената квадратна равенка (5.30) се добиваат другите два корени на карактеристичната равенка (5.27):

$$s^2 + 8s + 20 = 0$$

$$s_{3/4} = -4 \pm 2j$$

**Задача 5.08.** Да се определи стабилноста на системот со помош на Routh-овиот критериум за стабилност, ако е дадена неговата карактеристична равенка:

$$2s^3 + 4s^2 + 6s + 16 = 0 \quad (5.31)$$

**Решение:** Се пополнува Routh-овата табела за дадената карактеристична равенка (5.31):

$$\begin{array}{l}
 2s^3 + 4s^2 + 6s + 16 = 0 \\
 \begin{array}{l}
 s^3 \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 6 \\ \hline \cancel{4} & \cancel{16} \quad /:4 \\ \hline \cancel{-4} & 0 \quad /:2 \\ \hline s^0 \quad 4 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Со анализа на членовите од првата колона од Routh-овата табела се заклучува дека системот е нестабилен, бидејќи има промена на предзнакот. Има две промени на предзнакот (првата промена е од "+" во "-", а втората промена од "-" во "+"), па според тоа два корена од карактеристичната равенка имаат позитивен реален дел и го прават системот нестабилен.

Овде е потенцирана уште една особина на Routh-овата табела, а таа е дека резултатите од анализата на стабилноста на системот нема да се променат, ако цел еден ред од Routh-овата табела се помножи или подели со еден ист број. При тоа, треба да се напомене дека во овој случај коефициентот во  $s^0$ -редот нема да биде идентичен со слободниот член од карактеристичната равенка.

Во конкретниот пример редот  $s^2$  е поделен со 4 пред да се пополни редот  $s^1$ . Потоа редот  $s^1$  е поделен со 2 пред да се пополни редот  $s^0$ .

**Задача 5.09.** Даден е математичкиот модел од еден физички систем со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + (4 + K) \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + (16 + 8K) y = K \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + 8x \right) \quad (5.32)$$

Да се определи во кои граници може да се менува вредноста на коефициентот (засилувањето)  $K$  за да биде системот стабилен.

**Решение:** Диференцијалната равенка (5.32) се запишува во облик:

$$\left[ D^3 + (4 + K)D^2 + 6D + (16 + 8K) \right] \cdot y(t) = K(D^2 + 8) \cdot x(t) \quad (5.33)$$

Со смена на линеарниот оператор за диференцирање ( $D$ ) со Лапласовиот оператор ( $s$ ), се добива преносната функција за системот во  $s$ -доменот:

$$\left[ s^3 + (4 + K)s^2 + 6s + (16 + 8K) \right] \cdot Y(s) = K(s^2 + 8) \cdot X(s) \quad (5.34)$$

односно:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(s^2 + 8)}{s^3 + (4 + K)s^2 + 6s + 16 + 8K} \quad (5.35)$$

Карактеристичната равенка за овој систем е:

$$s^3 + (4 + K)s^2 + 6s + 16 + 8K = 0 \quad (5.36)$$

Routh-овата табела за дадената карактеристична равенка (5.36) ќе биде:

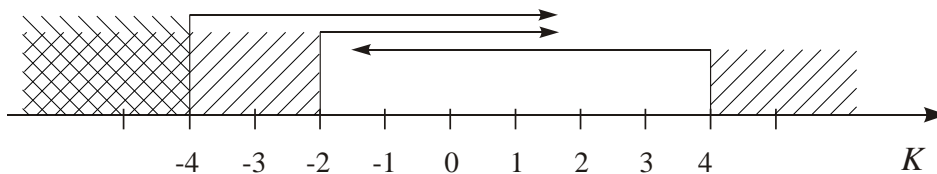
$$s^3 + (4 + K)s^2 + 6s + 16 + 8K = 0$$

$s^3$	1	6	
$s^2$	$4 + K$	$16 + 8K$	
$s^1$	$\frac{\cancel{4}(4 - K)}{4 + K}$	0	/: 2
$s^0$	$\cancel{8}(2 + K)$		/: 8

За да биде системот стабилен потребно е сите членови од првата колона од Routh-овата табела да бидат позитивни, односно да бидат исполнети условите:

$$\begin{aligned} 4 + K > 0 &\Rightarrow K > -4 \\ \frac{4 - K}{4 + K} > 0 &\Rightarrow K < 4 \text{ и } K > -4 \\ 2 + K > 0 &\Rightarrow K > -2 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Овие услови се нанесени на реалната оска за вредностите на засилувањето  $K$  и прикажани се на слика 5.4.



Слика 5.4. Дозволените вредности за засилувањето  $K$

Според тоа, системот ќе биде стабилен ако засилувањето  $K$  се менува во границите:

$$-2 < K < 4 \quad (5.38)$$

### 5.1. Hurwitz-ов критериум за стабилноста

Hurwitz-овиот критериум за стабилност е уште една метода за определување на апсолутната стабилност на системите, односно со неа се определува дали сите корени од карактеристичната равенка на системот се со негативни реални делови. Оваа метода се базира на Hurwitz-овата детерминанта на системот, којашто се формира од коефициентите на карактеристичната равенка. Hurwitz-овата детерминанта на системот е квадратна детерминанта  $\Delta_{n \times n}$  со ред еднаков на највисокот степен на карактеристичната равенка.

Hurwitz-овиот критериум за стабилност гласи: системот е асимптотски стабилен ако и само ако Hurwitz-овата детерминанта  $\Delta_{n \times n} > 0$  и сите поддетерминанти  $\Delta_i > 0$  за  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ .

Начинот на пополнување на Hurwitz-овата детерминанта за карактеристична равенка од  $n$ -ти ред е даден со равенката 5.39:

$$\Delta_{n \times n} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}_{n \times n} \quad (5.39)$$

Поддетерминантите на системот се формираат на следниот начин:

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}_{2 \times 2} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} \quad (5.40)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}_{3 \times 3} = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} + a_n a_{n-1}a_{n-5} - a_{n-1}^2 a_{n-4} - a_n a_{n-3}^2$$

и така се до  $\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$

**Задача 5.10.** Да се определи стабилноста на системот со помош на Hurwitz-овиот критериум за стабилност, ако е дадена неговата карактеристична равенка:

$$s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0 \quad (5.41)$$

**Решение:** Се пополнува Hurwitz-овата детерминанта за дадената карактеристична равенка (5.41) :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 24 - 16 = 8 \quad (5.42)$$

Поддетерминантите за дадениот систем ќе бидат:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = 6 - 4 = 2 \quad \text{и} \quad \Delta_1 = |2|_{1 \times 1} = 2 \quad (5.43)$$

Бидејќи сите детерминанти имаат позитивни вредности, системот е стабилен.

**Задача 5.11.** Даден е математичкиот модел од еден физички систем со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + (K+1) \frac{dy}{dt} + 2Ky = K \left( \frac{dx}{dt} + 2x \right) \quad (5.44)$$

Да се определи во кои граници може да се менува вредноста на коефициентот (засилувањето)  $K$  за да биде системот стабилен.

**Решение:** Диференцијалната равенка (5.32) се запишува во облик:

$$\left[ D^3 + D^2 + (K+1)D + 2K \right] \cdot y(t) = K(D+2) \cdot x(t) \quad (5.45)$$

Со смена на линеарниот оператор за диференцирање ( $D$ ) со Лапласовиот оператор ( $s$ ), се добива преносната функција за системот во  $s$ -доменот:

$$\left[ s^3 + s^2 + (K+1)s + 2K \right] \cdot Y(s) = K(s+2) \cdot X(s) \quad (5.46)$$

односно: 
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K(s+2)}{s^3 + s^2 + (K+1)s + 2K} \quad (5.47)$$

Карактеристичната равенка за овој систем е:

$$s^3 + s^2 + (K+1)s + 2K = 0 \quad (5.48)$$

Се пополнува Hurwitz-овата детерминанта за дадената карактеристична равенка (5.48):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2K & 0 \\ 1 & K+1 & 0 \\ 0 & 1 & 2K \end{vmatrix}_{3 \times 3} = 2K(K+1) - (2K)^2 = 2K(1-K) \quad (5.49)$$

Поддетерминантите за дадениот систем ќе бидат:

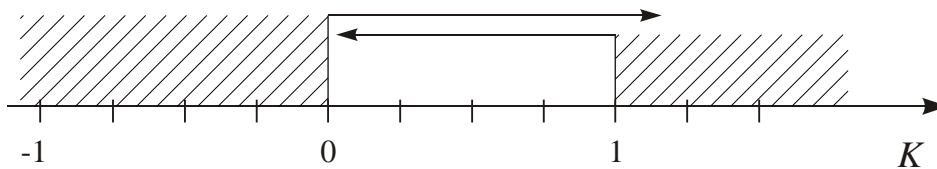
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2K \\ 1 & K+1 \end{vmatrix}_{2 \times 2} = (K+1) - 2K = 1 - K \quad \text{и} \quad \Delta_1 = |1|_{1 \times 1} = 1 \quad (5.50)$$

За да биде системот стабилен потребно е сите детерминанти да бидат позитивни, односно да бидат исполнети условите:

Од изразот (5.49) следи:  $2K(1-K) > 0 \Rightarrow K > 0 \quad \text{и} \quad K < 1$

а од изразите (5.50) се добива:  $1 - K > 0 \Rightarrow K < 1$

Овие услови се нанесени на реалната оска за вредностите на засилувањето  $K$  и прикажани се на слика 5.5.



Слика 5.5. Дозволенџ вредности за засилувањето  $K$

Според тоа, системот ќе биде стабилен ако засилувањето  $K$  се менува во границите:

$$0 < K < 1 \quad (5.51)$$

### Задачи за вежбање:

**Задача 5.12.** Математички модел од еден систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 8 \frac{dy^3}{dt^3} + 24 \frac{d^2 y}{dt^2} + 32 \frac{dy}{dt} + Ky = Kx \quad (5.52)$$

- а). За кои вредности од  $K$  системот ќе биде стабилен ?
- б). За кои вредности од  $K$  системот е гранично стабилен и кои се во овој случај сите полови од системот ?

**Решение:** а).  $0 < K < 80$

б).  $K = 80, s_{1/2} = \pm 2j, s_{3/4} = -4 \pm 2j$

**Задача 5.13.** Математичкиот модел од еден систем е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 2 \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = K \cdot x \quad (5.23)$$

Да се определи дали системот опишан со дадената диференцијална равенка е стабилен.

**Решение:** Routh-овата табела за карактеристичната равенка на системот е:

$$s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 4s + 3 = 0$$

$s^4$	1	2	3
$s^3$	2	4	0
$s^2$	$0 \equiv \varepsilon$	3	0
$s^1$	$4 - \frac{6}{\varepsilon}$	0	
$s^0$	3		

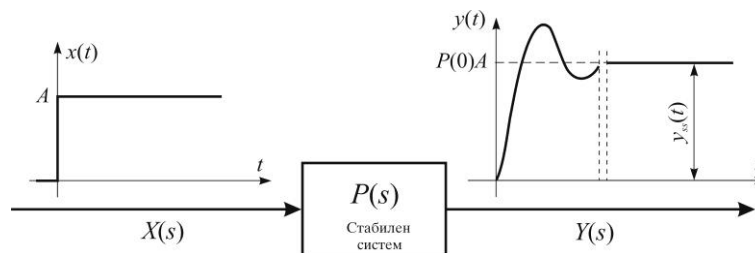
каде што  $\varepsilon \rightarrow 0$  многу мал број.

И за многу мали позитивни вредности и за многу мали негативни вредности за  $\varepsilon \rightarrow 0^\pm$  ќе се појават две промени на знакот во првата колона од Routh-овата табела, односно карактеристичната равенка на системот секогаш ќе има два корена со позитивен реален дел, па според тоа системот е нестабилен.

---

## ШЕСТА ГЛАВА

---



## 6. ПРЕНОСНИ ФУНКЦИИ

### 6.1. Дефиниција и особини на преносните функции

Преносната функција  $P(s)$  од некој физички систем претставува делот од равенката за трансформираниот одзив  $Y(s)$  со којшто се множи трансформираниот влез  $X(s)$ , односно:

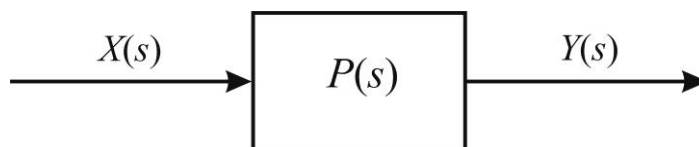
$$Y(s) = P(s) \cdot X(s) \quad (6.01)$$

Според тоа, преносната функција може да се запише во облик:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (6.02)$$

Ако физичкиот систем се претстави како "црна кутија", тогаш преносната функција ќе претставува математичка презентација во  $s$ -домен на дадениот систем, како што е тоа претставено на слика 6.1.





Слика 6.1. Преносна функција

Доколку сите почетни услови на системот се еднакви на нула, односно

$$\left. \frac{d^k y}{dt^k} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{за} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

тогаш одзивот на системот може да се добие со помош на преносната функција како инверзна Лапласова трансформација на производот:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[P(s) \cdot X(s)] \quad (6.03)$$

Преносната функција претставува рационална функција и може да се запише во повеќе облици:

1. Количник на полиноми од променливата  $s$ , односно:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k \cdot \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (6.04)$$

каде што мора да биде исполнето:  $n \geq m$ .

2. Количник на производите на разликите на променливата  $s$  со решенијата на полиномите, односно:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (6.05)$$

каде што се:  $k$  - засилување на системот,

$z_j$  - корени на полиномот во броителот, односно нули на системот,

$p_i$  - корени на полиномот во именителот, односно полови на системот.

3. Количник на полиноми чишто слободни членови се еднакви на еден, односно полиномите се поделени со слободниот член:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k_T \cdot \frac{1 + T_{b,1}s + T_{b,2}^2s^2 + \dots + T_{b,m}^m s^m}{1 + T_{a,1}s + T_{a,2}^2s^2 + \dots + T_{a,n}^n s^n} \quad (6.06)$$

каде што се:

$$T_{b,1}, T_{b,2} = \sqrt{T_{b,2}^2}, \dots, T_{b,m} = \sqrt[m]{T_{b,m}^m}, T_{a,1}, \dots, T_{a,n} = \sqrt[n]{T_{a,n}^n} - \text{временски константи.}$$

Преносната функција на еден систем ги има следните особини:

1. Преносната функција на еден физички систем е Лапласова трансформација од неговиот импулсен одзив.
2. Преносната функција на системот може да се определи од диференцијалната равенка на системот, со нејзина Лапласова трансформација и со отфрлање на сите членови коишто потекнуваат од почетните услови. Со други зборови, преносната функција може да се добие директно од диференцијалната равенка на системот, ако линеарниот оператор за диференцирање -  $D$  се замени со Лапласовиот оператор -  $s$ .

Диференцијалната равенка на еден систем во општ облик ќе биде:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j x}{dt^j} \quad m \leq n \quad (6.07)$$

Равенката (6.07) со помош на линеарниот оператор за диференцирање -  $D$  ќе има облик:

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^j x(t) \quad (6.08)$$

Според тоа, со замена линеарниот оператор за диференцирање -  $D$  со Лапласовиот оператор -  $s$  се добива:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j X(s)$$

односно:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (6.09)$$

3. Обратно, диференцијалната равенка на системот може да се определи од преносната функција, ако Лапласовиот оператор -  $s$  се замени со линеарниот оператор за диференцирање -  $D$ .
4. Стабилноста на еден линеарен систем се определува од карактеристичната равенка на системот. Карактеристичната равенка се добива ако именителот на преносната функција се изедначи со нула. Системот е стабилен доколку сите корени на карактеристичната равенка се со негативни реални делови.
5. Корените на именителот на преносната функција се половите на системот, а корените на броеителот се нулите на системот. Ако се определени половите и нулите на системот, според равенка (6.05), останува да се определи уште константата -  $k$  за да се добие преносната функција на системот. Константата -  $k$  на системот уште се нарекува засилувачки фактор на системот.

Половите и нулите на системот може да се претстават и графички со пол-нула мапата во  $s$  - полето, односно  $\sigma \times j\omega$  - рамнината, и притоа е усвоено половите да се означуваат со "×", а нулите со "○".

## 6.2. Преносни функции на компензатори на управувачките системи

Во управувачките системи се користат повеќе типови на компензатори. Најупотребувани се следните три типа на компензатори:

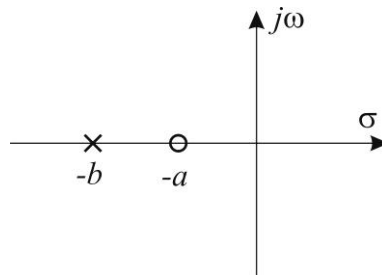
### 1. Забрзувачки компензатор

Општиот облик на преносната функција на еден забрзувачки компензатор е;

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+a}{s+b} \quad (6.10)$$

Овој компензатор има нула во  $s = -a$ , и пол во  $s = -b$ .

Притоа, кај забрзувачкиот компензатор важи  $|a| < |b|$ , односно нулата е поблиску до центарот на  $s$ -полето, како што може да се види од пол-нула мапата дадена на слика 6.2.



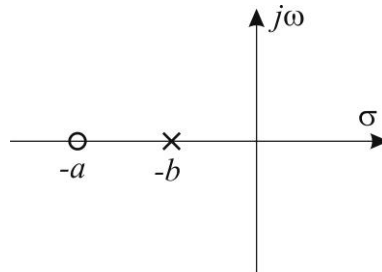
Слика 6.2. Пол-нула мапа на забрзувачки компензатор

## 2. Успорувачки компензатор

Преносната функција на еден успорувачки компензатор е:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+a}{s+b} \quad (6.11)$$

И, овој компензатор има нула во  $s = -a$ , и пол во  $s = -b$ , но притоа важи  $|a| > |b|$ , односно полот е поблиску до центарот на  $s$ -полето. Пол-нула мапата на еден успорувачки компензатор е дадена на слика 6.3.



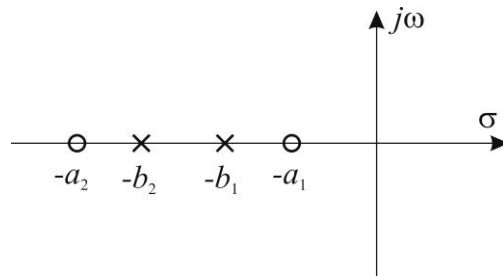
Слика 6.3. Пол-нула мапа на успорувачки компензатор

## 3. Забрзувачко-успорувачки компензатор

Општиот облик на преносната функција на еден забрзувачко-успорувачки компензатор е;

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s+a_1)(s+a_2)}{(s+b_1)(s+b_2)} \quad (6.12)$$

Овој компензатор има две нули во  $s = -a_1$  и  $s = -a_2$ , и два пола во  $s = -b_1$  и  $s = -b_2$ , и притоа важи  $|a_1| < |b_1|$  и  $|a_2| > |b_2|$ . Пол-нула мапата на еден забрзувачко-успорувачки компензатор е дадена на слика 6.4.



Слика 6.4. Пол-нула мапа на забрзувачко-успорувачки компензатор

### 6.3. Временски и фрекфентен одзив на системи

Одзивот на системот за даден влез може да се определи директно од преносната функција, ако сите почетни услови на системот се еднакви на нула, од равенката:

$$Y(s) = P(s) \cdot X(s) \quad (6.13)$$

односно 
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[P(s) \cdot X(s)] \quad (6.14)$$

Ако на влезот се доведе отскочна функција со амплитуда  $A$ , или таканаречен еднонасочен влез, односно:

$$x(t) = A \cdot u(t) \quad (6.15)$$

или 
$$X(s) = \frac{A}{s}$$

Лапласовата трансформација на излезот за почетни услови еднакви на нула ќе

биде: 
$$Y(s) = P(s) \cdot \frac{A}{s} \quad (6.16)$$

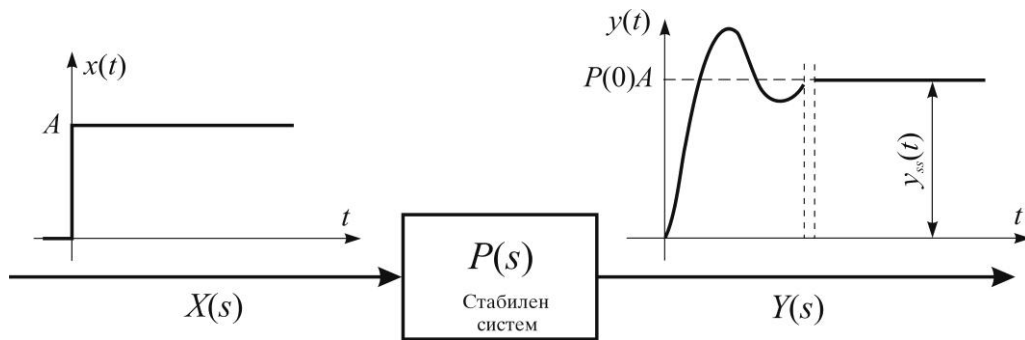
Доколку системот е стабилен, сталната состојба на неговиот излез ќе биде отскочна функција со амплитуда  $A \cdot P(0)$ , односно:

$$y_{ss}(t) = A \cdot P(0) \cdot u(t) \quad (6.17)$$

Каде што е:  $P(0)$  - еднонасочно засилување на системот, односно

$$P(0) = P(s)|_{s=0}$$

Овој случај е графички прикажан на слика 6.5.



Слика 6.5. Стална состојба на излезот на стабилен систем за влез отскочна функција

Стална состојба на излезот -  $y_{ss}(t)$ , претставува вредност на излезната големина по определено време кога завршува преодниот режим, односно кога се губи преодната компонента на излезот и притоа важи:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{ps}(t) = 0$$

Ако на влезот на еден стабилен систем се доведе простопериодична функција, на пример:

$$x(t) = A \cdot \sin \omega t \quad (6.18)$$

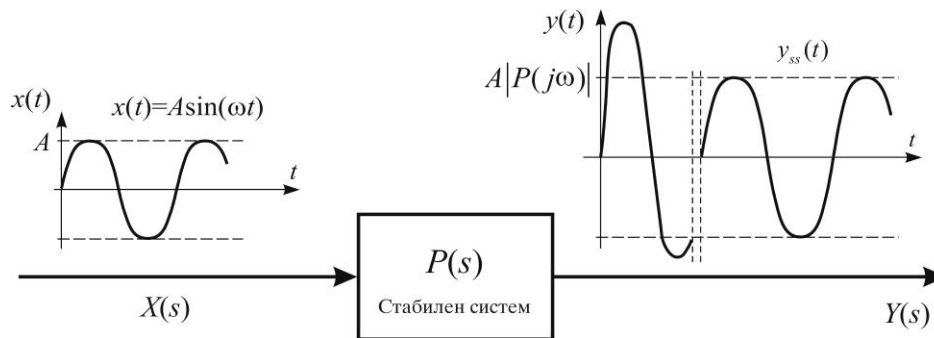
сталната состојба на излезот ќе биде определена со изразот:

$$y_{ss}(t) = A \cdot |P(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \Phi) \quad (6.19)$$

односно сталната состојба на излезот -  $y_{ss}(t)$  е исто така простопериодична функција со амплитуда  $A \cdot |P(j\omega)|$  и променет влезен фазен агол за вредност  $\Phi = \arg P(j\omega)$ .

Според тоа:  $|P(j\omega)|$  е засилување на системот за синусоидален влез со фреквенција  $\omega$ , а  $\Phi = \arg P(j\omega)$  е вредноста на фазното поместување на влезниот агол за дадена фреквенција  $\omega$ .

Ова графички е претставено на слика 6.6.



Слика 6.6. Стална состојба на излезот на стабилен систем за влез прстопериодична функција

Сталната состојба на излезот од еден стабилен системот има ист облик како влезот и може да се добие ако амплитудата на влезот се помножи со  $|P(j\omega)|$ , а влезниот фазен агол се помести за вредност  $\Phi = \arg P(j\omega)$ .

Комплексната вредност на преносната функција -  $P(j\omega)$  се добива од преносната функција  $P(s)$ , кога Лапасовиот оператор  $s$  ќе се замени со  $j\omega$ , односно:

$$s = j\omega$$

**Задача 6.1.** Да се определи преносната функција на еден систем опишан со следната диференцијална равенка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 5y = \frac{dx}{dt} + x \quad (6.20)$$

**Решение:** Со Лапасова трансформација на математичкиот модел на системот (6.20) и со отфрлање на членовите од почетните услови на системот се добива:

$$s^2 Y(s) + 4sY(s) + 5Y(s) = sX(s) + X(s) \quad (6.21)$$

Равенката (6.21) може да се прикаже во облик:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+5} X(s) \quad (6.22)$$

Според тоа преносната функција за овој систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s^2+4s+5} \quad (6.23)$$

**Задача 6.2.** Да се определи преносната функција на упростен модел на едно возило (задача 2.2), ако излезна големина е вертикалното поместување на возилото -  $y(t)$ , а влезна големина е профилот на патот -  $x(t)$ .

За дадените параметри на возилото во задача 2.2, математичкиот модел е определен со равенката (2.11):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 20y = 12\frac{dx}{dt} + 20x \quad (6.24)$$

**Решение:** Со Лапласова трансформација на математичкиот модел на системот (6.24) и со отфрлање на членовите од почетните услови на системот се добива:

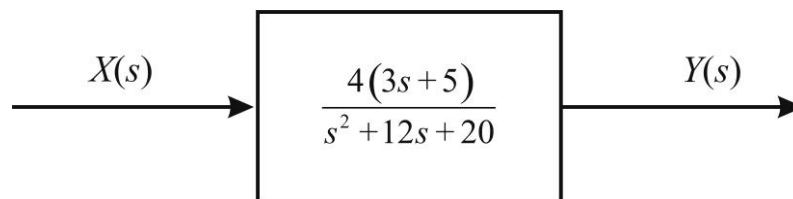
$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 20Y(s) = 12sX(s) + 20X(s)$$

односно: 
$$Y(s) = \frac{4(3s+5)}{s^2+12s+20} \cdot X(s) \quad (6.25)$$

Преносната функција за упростен модел на едно возило ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4(3s+5)}{s^2+12s+20} \quad (6.26)$$

Блок-дијаграмот за овој систем е претставен на слика 6.7.



Слика 6.7. Блок-дијаграм за упростен модел на едно возило

**Задача 6.3.** Да се определи преносната функција на сеизмограф со којшто се мери радијалното поместување на тлото при земјотрес (задача 2.3) и да се претстави блок-дијаграмот за овој систем, ако:

а). влезна големина е радијалното поместување на тлото -  $x(t)$ ,

б). влезна големина е забрзувањето на подлогата -  $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,

а излезна големина е релативната позиција -  $y(t)$  (според слика 2.7).



**Решение:**

а). Според условите зададени во задача 2.3 сеизмографот е опишан со математичкиот модел (2.18):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (6.27)$$

Каде што се: 
$$a_1 = \frac{B}{M}; \quad a_0 = \frac{K}{M}$$

Со Лапласова трансформација на математичкиот модел на системот (6.27) и со отфрлање на членовите од почетните услови на системот се добива:

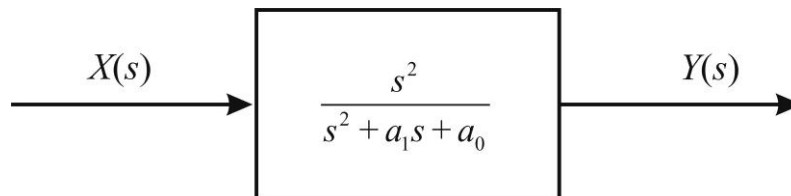
$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = s^2 X(s)$$

односно: 
$$Y(s) = \frac{s^2}{s^2 + a_1 s + a_0} \cdot X(s) \quad (6.28)$$

Преносната функција на сеизмографот ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (6.29)$$

Блок-дијаграмот за сеизмограф, кога влез е радијалното поместување на тлото -  $x(t)$ , а излез е релативната позиција -  $y(t)$  е прикажан на слика 6.8.



Слика 6.8. Блок-дијаграм на сеизмограф

б). Според изведениот математички модел даден со равенка (6.27), ако влезна големина е забрзувањето на подлогата -  $a(t)$ , односно ако сеизмографот се користи како акселерометар (мерач на забрзување), а излезна големина е релативната -  $y(t)$ , се добива изразот:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = a(t) \quad (6.30)$$

Со Лапласова трансформација на математичкиот модел даден со равенка (6.30) и со отфрлање на членовите од почетните услови на системот се добива:

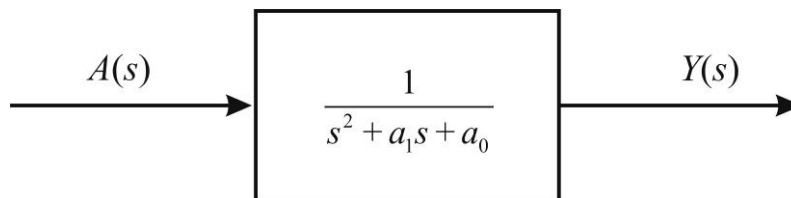
$$s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) = A(s)$$

односно: 
$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} \cdot A(s) \quad (6.31)$$

Преносната функција на дадениот систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (6.32)$$

Блок-дијаграмот за дадениот физички систем (мерач на забрзување), кога влез е забрзувањето на подлогата -  $a(t)$ , а излез е релативната позиција -  $y(t)$  е прикажан на слика 6.9.



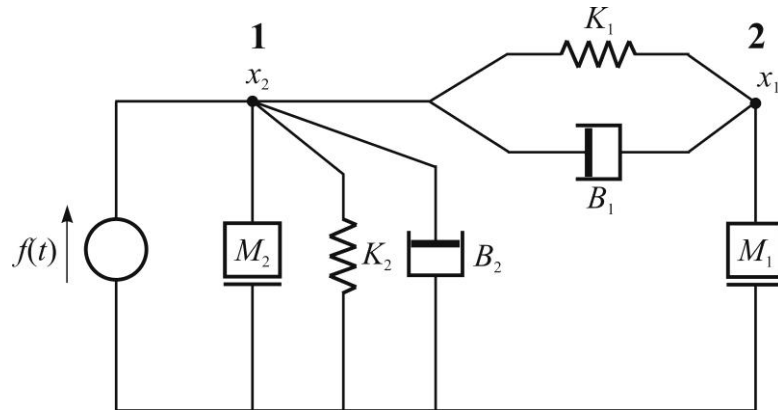
Слика 6.9. Блок-дијаграм на мерач на забрзување

**Задача 6.4.** Да се определи преносната функција на механичкиот систем прикажан на слика 2.9 (Задача 2.4), ако надворешната побуда на системот, односно силата -  $f(t)$  дејствува на кутијата со маса  $M_2$  и ако:

а). Влезна големина е поместувањето  $x(t) \equiv x_2(t)$  на кутијата со маса  $M_2$ , а излезна големина е поместувањето на масата  $M_1$ , односно  $y(t) \equiv x_1(t)$ .

б). Влез за дадениот систем е силата  $f(t)$ ,  $x(t) \equiv f(t)$ , а излезна големина е поместувањето на масата  $M_1$ , односно  $y(t) \equiv x_1(t)$ .

**Решение:** Врз основа на слика 2.9 и условите дадени во задачата се црта еквивалентната механичка шема за системот и таа е прикажана на слика 6.10.



Слика 6.10. Еквивалентна механичка шема за физичкиот систем

Математичкиот модел со којшто се опишува дадениот систем ќе биде презентирани со системот од диференцијални равенки:

$$\text{Јазол 1: } [M_2 D^2 + (B_1 + B_2)D + (K_1 + K_2)]x_2 - (B_1 D + K_1)x_1 = f(t) \quad (6.33.a)$$

$$\text{Јазол 2: } (M_1 D^2 + B_1 D + K_1)x_1 - (B_1 D + K_1)x_2 = 0 \quad (6.33.б)$$

Од системот на диференцијални равенки (6.33) се добива бараниот облик на математичкиот модел на механичкиот систем.

а). Ако равенката (6.33.б) се подели со  $M_1$  се добива:

$$(D^2 + a_1 D + a_0)x_1 = (b_1 D + b_0)x_2 \quad (6.34)$$

$$\text{односно: } \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_0 x_1 = b_1 \frac{dx_2}{dt} + b_0 x_2 \quad (6.35)$$

$$\text{каде што се: } a_1 = \frac{B_1}{M_1}, \quad a_0 = \frac{K_1}{M_1},$$

$$b_1 \equiv a_1 = \frac{B_1}{M_1}, \quad b_0 \equiv a_0 = \frac{K_1}{M_1},$$

коэффициенти на дадениот математички модел на системот (6.35).

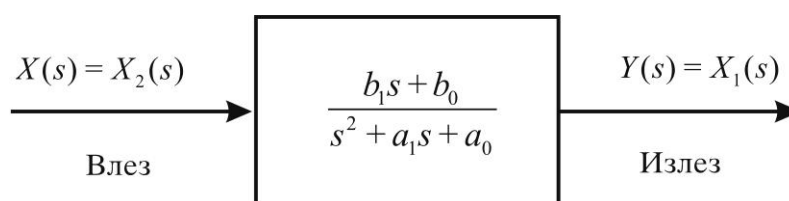
Со Лапласова трансформација на математичкиот модел на системот (6.35) и со отфрлање на членовите од почетните услови на системот се добива:

$$s^2 X_1(s) + a_1 s X_1(s) + a_0 X_1(s) = b_1 s X_2 + b_0 X_2 \quad (6.36)$$

Преносната функција на системот, според условите дадени во задачата, ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \equiv \frac{X_1(s)}{X_2(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (6.37)$$

Механичкиот систем, претставен преку блок-дијаграм, е прикажан на слика 6.11.



Слика 6.11. Блок-дијаграм на механичкиот систем

б). Од диференцијалната равенка (6.33.б) следи:

$$x_2 = \frac{M_1D^2 + B_1D + K_1}{B_1D + K_1} x_1 \quad (6.38)$$

Со замена на равенка (6.38) во равенката (6.33.а) и со нејзино средување се добива:

$$\begin{aligned} & [M_1M_2D^4 + (M_1B_1 + M_1B_2 + M_2B_1)D^3 + (M_1K_1 + M_1K_2 + M_2K_1 + B_1B_2)D^2 + \\ & + (B_1K_2 + B_2K_1)D + K_1K_2] x_1 = (B_1D + K_1) f \end{aligned} \quad (6.39)$$

Ако равенката (6.39) се подели со коефициентот  $M_1M_2$  се добива конечниот облик на бараниот математички модел:

$$(D^4 + a_3D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0) x_1 = (b_1D + b_0) f \quad (6.40)$$

односно:

$$\frac{d^4x_1}{dt^4} + a_3 \frac{d^3x_1}{dt^3} + a_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} + a_1 \frac{dx_1}{dt} + a_0x_1 = b_1 \frac{df}{dt} + b_0f \quad (6.41)$$

Каде што се:

$$a_3 = \frac{M_1B_1 + M_1B_2 + M_2B_1}{M_1M_2}$$

$$a_2 = \frac{M_1K_1 + M_1K_2 + M_2K_1 + B_1B_2}{M_1M_2}$$

$$a_1 = \frac{B_1 K_2 + B_2 K_1}{M_1 M_2} \quad (6.42)$$

$$a_0 = \frac{K_1 K_2}{M_1 M_2}$$

$$b_1 = \frac{B_1}{M_1 M_2}; \quad b_0 = \frac{K_1}{M_1 M_2}$$

коэффициенти за дадениот математички модел.

Очигледна е идентичноста на коефициентите (6.42) со коефициентите (2.24) добиени во задача 2.4.

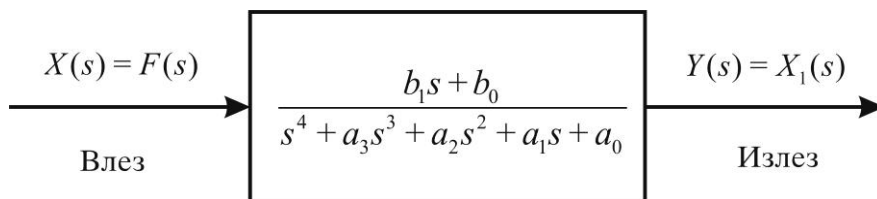
Со Лапласова трансформација на математичкиот модел на системот (6.41) и со отфрлање на членовите од почетните услови на системот се добива:

$$s^4 X_1(s) + a_3 s^3 X_1(s) + a_2 s^2 X_1(s) + a_1 s X_1(s) + a_0 X_1(s) = b_1 s F(s) + b_0 F(s) \quad (6.43)$$

Преносната функција на системот, според условите дадени во задачата, ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \equiv \frac{F(s)}{X_1(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (6.44)$$

Механичкиот систем, претставен преку блок-дијаграм, е прикажан на слика 6.12.



Слика 6.12. Блок-дијаграм на механичкиот систем

**Задача 6.5.** Да се определи преносната функција на еден двостепен редуктор изведен со цилиндрични запченици со прави запци, прикажан на слика 2.28 (Задача 2.12), ако влез е промената на погонскиот вртежен момент -  $T(t)$ , а излез е аголната позиција на излезното вратило од редукторот -  $\theta_3(t)$ .

**Решение:** Според условите во задачата 2.12, математичкиот модел на редукторот, ако влез е промената на погонскиот вртежен момент -  $T(t)$ , а излез е аголната позиција на излезното вратило од редукторот -  $\theta_3(t)$ , е даден со равенката (2.57):

$$J_{EKV} \frac{d^2\theta_3}{dt^2} + B_{EKV} \frac{d\theta_3}{dt} = T(t) \quad (6.45)$$

Со Лапласова трансформација на математичкиот модел на системот (6.45) и со отфрлање на членовите од почетните услови на системот се добива:

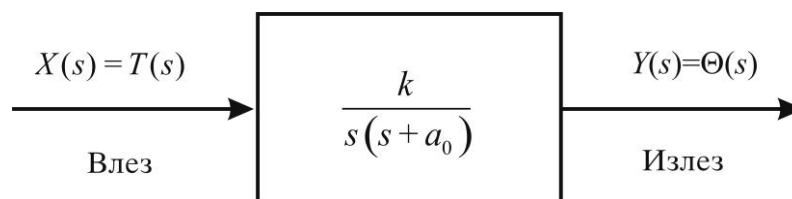
$$J_{EKV} s^2 \Theta_3(s) + B_{EKV} s \Theta_3(s) = T(s) \quad (6.46)$$

Со делење на равенката (6.46) со  $J_{EKV}$  и со нејзино средување се добива преносната функција на системот:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\Theta_3(s)}{T(s)} = \frac{k}{s(s+a_0)} \quad (6.47)$$

Каде што се:  $k = \frac{1}{J_{EKV}}$ ,  $a_0 = \frac{B_{EKV}}{J_{EKV}}$

Блок-дијаграмот за дадениот двостепен редуктор е прикажан на слика 6.13.



Слика 6.13. Блок-дијаграм на двостепен редуктор

**Задача 6.6.** Да се определи преносната функција на ротационо-транслациониот механички систем, прикажан на слика 2.31 (Задача 2.13) и да се нацрта неговиот блок-дијаграм, ако влез е промената на погонскиот вртежен момент -  $T_r(t)$ , а излез е линеарното поместување на масата  $M$  -  $y(t)$ .

**Решение:** Со примена на релациите дадени со равенките (2.59) и (2.60) и со средовање на системот од диференцијални равенки (2.61) се добива математичкиот модел на ротационо-транслациониот механички систем прикажан на слика 2.31, и тој ќе биде:

$$\left[ \frac{JM}{rK_3} D^4 + \frac{M(B_{T,1} + B_{T,2}) + JB_3}{rK_3} D^3 + \frac{JK_3 + (B_{T,1} + B_{T,2})B_3 + r^2MK_3}{rK_3} D^2 + \frac{(B_{T,1} + B_{T,2})K_3 + r^2B_3K_3}{rK_3} D \right] \cdot y(t) = T_T(t) \quad (6.48)$$

Со делење на равенката (6.48) со коефициентот пред членот со највисок извод на излезната големина -  $\frac{JM}{rK_3}$ , се добива конечниот облик на диференцијалната равенка, која што претставува математички модел на системот:

$$(D^4 + a_3D^3 + a_2D^2 + a_1D) \cdot y(t) = k \cdot T_T(t) \quad (6.49)$$

односно: 
$$\frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} = k \cdot T_T(t) \quad (6.50)$$

Каде што се: 
$$a_3 = \frac{M(B_{T,1} + B_{T,2}) + JB_3}{JM}$$

$$a_2 = \frac{JK_3 + (B_{T,1} + B_{T,2})B_3 + r^2MK_3}{JM}$$

$$a_1 = \frac{(B_{T,1} + B_{T,2})K_3 + r^2B_3K_3}{JM}$$

коефициенти на математичкиот модел на системот (6.50).

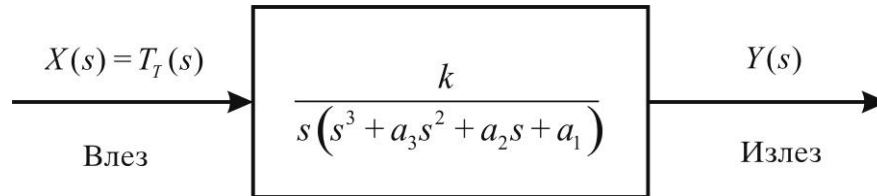
Со Лапласова трансформација на математичкиот модел на системот (6.50) и со отфрлање на членовите од почетните услови на системот се добива:

$$s^4 Y(s) + a_3 s^3 Y(s) + a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) = k \cdot T_T(s) \quad (6.51)$$

Според тоа, преносната функција на системот ќе биде:

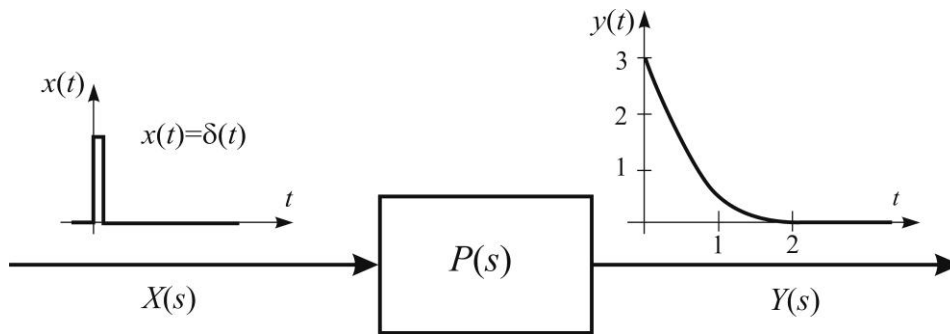
$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \equiv \frac{Y(s)}{T_T(s)} = \frac{k}{s(s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1)} \quad (6.52)$$

Механичкиот систем, претставен преку блок-дијаграм, е прикажан на слика 6.14.



Слика 6.14. Блок-дијаграм на ротационо-транслациониот систем

**Задача 6.7.** На влезот од еден физички систем, чија што преносна функција е непозната, е доведена единечна импулсна функција:  $x(t) = \delta(t)$ . Во почетниот момент системот се наоѓал во мирување, односно сите почетни услови на системот се еднакви на нула. Промената на излезната големина на системот е измерена (слика 6.15) и може да се апроксимира со експоненцијалната временска функција:  $y(t) = 2 \cdot e^{-2t} + e^{-4t}$ .



Слика 6.15. Идентификација на преносна функција на физички систем

Да се определи преносната функција на овој физички систем.

**Решение:** Лапласовата трансформација на влезот е:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (6.53)$$

Преносната функција на системот ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \equiv Y(s) = \mathcal{L}[2e^{-2t} + e^{-4t}] = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+4}$$



$$P(s) = \frac{3s+10}{(s+2)(s+4)} = \frac{3s+10}{s^2+6s+8} \quad (6.54)$$

*Напомена:* Од овие причини единечната импулсна функција уште се нарекува "бел шум", бидејќи таа често пати се користи за идентификација на системите, односно со нејзна помош се определува преносната функција на даден физички систем.

**Задача 6.8.** Единечниот импулсен одзив на еден физички систем е пригушен синусоидален сигнал:  $y_\delta(t) = e^{-3t} \sin 2t$ .

Да се определи преносната функција -  $P(s)$  на системот и диференцијалната равенка, која што претставува математички модел на дадениот физички систем.

**Решение:** Под поимот "единечен импулсен одзив" се подразбира одзив на системот кога на влезот е доведена импулсна функција -  $\delta(t)$  и кога сите почетни услови на системот се еднакви на нула.

Според тоа, преносната функција на системот е Лапласовата трансформација на неговиот единечен импулсен одзив (види задача 6.7).

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \equiv Y_\delta(s) = \mathcal{L}[y_\delta(t)] = \mathcal{L}[e^{-3t} \sin 2t]$$

$$P(s) = \frac{2}{(s+3)^2 + 2^2} = \frac{2}{s^2 + 6s + 13} \quad (6.55)$$

Од равенката (6.55) се добива:

$$(s^2 + 6s + 13) \cdot Y(s) = 2 \cdot X(s) \quad (6.56)$$

Според особината 3 за преносните функции многу едноставно се добива диференцијалната равенка на системот, односно неговиот математички модел:

$$(D^2 + 6D + 13) \cdot y(t) = 2 \cdot x(t)$$

односно: 
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 13y = 2x(t) \quad (6.57)$$

**Задача 6.9.** Даден е единичниот отскочен одзив на еден линеарен и стабилен систем:

$$y_u(t) = \frac{8}{3} - 6e^{-t} + 4e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} \quad (6.58)$$

Да се определи преносната функција -  $P(s)$  на системот.

**Решение:** Под поимот "единичен отскочен одзив" се подразбира одзив на системот кога на влезот е доведена отскочна функција -  $u(t)$  и кога сите почетни услови на системот се еднакви на нула.

Со оглед на фактот дека импулсната функција претставува извод на отскочната функција, односно:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}[u(t)] \quad (6.59)$$

тогаш, за линеарен и стабилен систем, и единичниот импулсен одзив ќе добие како извод на единичниот отскочен одзив:

$$y_\delta(t) = \frac{d}{dt}[y_u(t)] = \frac{d}{dt}\left(\frac{8}{3} - 6e^{-t} + 4e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right)$$

Според тоа, се добива:  $y_\delta(t) = 6e^{-t} - 8e^{-2t} + 2e^{-3t}$  (6.60)

Преносната функција на системот ќе се добие како Лапласова трансформација на единичниот импулсен одзив (6.60).

$$P(s) = \mathcal{L}[y_\delta(t)] = \mathcal{L}[6e^{-t} - 8e^{-2t} + 2e^{-3t}] = \frac{6}{s+1} - \frac{8}{s+2} + \frac{2}{s+3} \quad (6.61)$$

Од изразот (6.61) се добива;

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (6.62)$$

Преносната функција може да се добие и на друг начин, ако се најде Лапласова трансформација на единичниот отскочен одзив:

$$Y_u(s) = \mathcal{L}[y_u(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{8}{3} - 6e^{-t} + 4e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t}\right] = \frac{8}{3s} - \frac{6}{s+1} + \frac{4}{s+2} - \frac{2}{3(s+3)} \quad (6.63)$$

односно: 
$$Y_u(s) = \frac{4(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (6.64)$$

Извод во  $s$ -доменот, според дефиниција, е:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y_0$$

Бидејќи почетните услови на системот се еднакви на нула, тогаш Лапласовата трансформација на импулсниот одзив, односно преносната функција на системот, ќе биде:

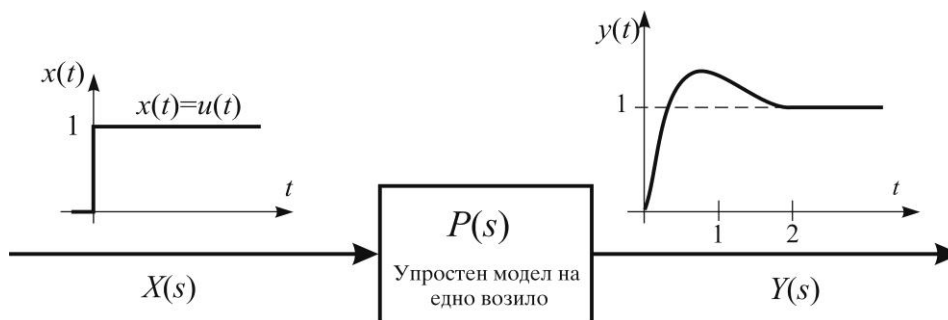
$$P(s) \equiv Y_\delta(s) = sY_u(s) = \frac{4(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (6.65)$$

**Задача 6.10.** На влезот од еден физички систем (упростен модел на едно возило - задача 2.2), чија што преносна функција е непозната, е доведена единечна отскочна функција:  $x(t) = u(t)$ . Во почетниот момент сите почетни услови на системот се еднакви на нула.

Излезната големина (вертикалното поместување на возилото) е прецизно измерена и промената на нејзината големина може да се апроксимира со функцијата (слика 6.16):

$$y(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{5}{4}e^{-10t} \quad (6.66)$$

Да се идентификува преносната функција на овој физички систем.



Слика 6.16. Идентификација на преносна функција на упростен модел на едно возило

**Решение:** Единечниот импулсен одзив на дадениот физички систем ќе се добие како извод на единечниот отскочен одзив, односно:

$$y_\delta(t) = \frac{d}{dt}[y_u(t)] = \frac{d}{dt}\left(1 + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{5}{4}e^{-10t}\right)$$

од каде што се добива: 
$$y_\delta(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{25}{2}e^{-10t} \quad (6.67)$$

Преносната функција на упростениот модел на едно возило ќе се добие како Лапласова трансформација на единечниот импулсен одзив (равенка 6.67):

$$P(s) = \mathcal{L}[y_\delta(t)] = \mathcal{L}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{25}{2}e^{-10t}\right] = -\frac{1}{2(s+2)} + \frac{25}{2(s+10)} \quad (6.68)$$

Од изразот (6.68) се добива:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{24s + 40}{2(s^2 + 12s + 20)} = \frac{4(3s + 5)}{s^2 + 12s + 20} \quad (6.69)$$

На овој начин е извршена експериментална идентификација на преносната функција на упростен модел на едно возило.

**Задача 6.11.** Да се определи дали физичкиот систем од претходната задача, претставен со преносната функција (6.69) е стабилен или нестабилен систем.

**Решение:** Карактеристичната равенка на системот се добива ако полиномот во именителот на преносната функција се изедначи со нула, односно:

$$s^2 + 12s + 20 = 0 \quad (6.70)$$

Карактеристичната равенка може да биде испитана со примена на некој од критериумите за стабилност дадени во глава 5.

Routh-овата табела за овој систем ќе биде:

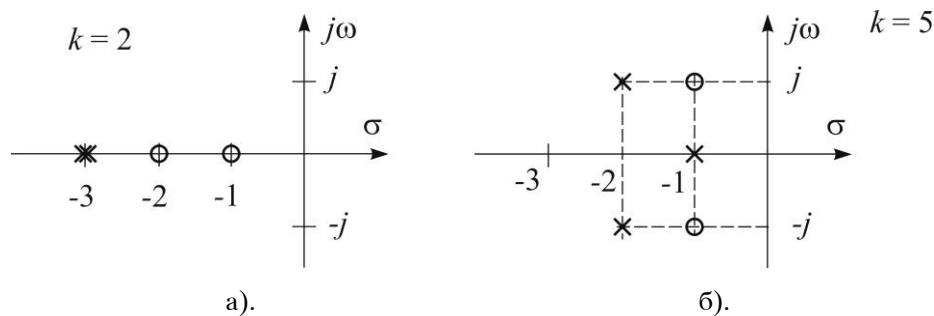
$$\begin{array}{c}
 s^2 + 12s + 20 = 0 \\
 \begin{array}{c|cc}
 s^2 & 1 & 20 \\
 s^1 & 12 & 0 \\
 s^0 & 20 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Системот е стабилен, бидејќи нема промена на знакот во првата колона на Routh-овата табела.

**Задача 6.12.** Да се определи преносната функција на еден систем којшто има:

а). Засилувачки фактор 2 и пол-нула мапа во  $s$  - полето, односно  $\sigma \times j\omega$  - рамнината, прикажана на слика 6.17.а.

б). Засилувачки фактор 5 и пол-нула мапа во  $\sigma \times j\omega$  - рамнината прикажана на слика 6.17.б.



Слика 6.17. Пол-нула мапи на преносни функции

**Решение:** а). Преносната функција има нули во: -1, -2 и полови во: 0, -3, -3. Според тоа, преносната функција е:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2(s+1)(s+2)}{s(s+3)^2} \quad (6.71)$$

б). Преносната функција има нули во:  $-1 \pm j$  и полови во: -1,  $-2 \pm j$ , па според тоа, преносната функција е:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5(s+1+j)(s+1-j)}{(s+1)(s+2+j)(s+2-j)} = \frac{5(s^2+2s+2)}{(s+1)(s^2+4s+5)} \quad (6.72)$$

**Задача 6.13.** Единечниот импулсен одзив на еден систем е:

$$y_{\delta}(t) = e^{-t} (1 - \sin t). \quad (6.73)$$

Да се определи преносната функција -  $P(s)$  на системот и диференцијалната равенка со којашто е опишан системот.

**Решение:** Преносната функција на системот се добива како Лапласова трансформација на неговиот единечен импулсен одзив (6.73):

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \equiv Y_\delta(s) = \mathcal{L}[y_\delta(t)] = \mathcal{L}[e^{-t}(1 - \sin t)]$$

$$P(s) = \mathcal{L}[e^{-t}] - \mathcal{L}[e^{-t} \sin t]$$

$$P(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)} \quad (6.74)$$

Од преносната функција (6.74) се добива:

$$(s^3 + 3s^2 + 4s + 2)Y(s) = (s^2 + s + 1)X(s) \quad (6.75)$$

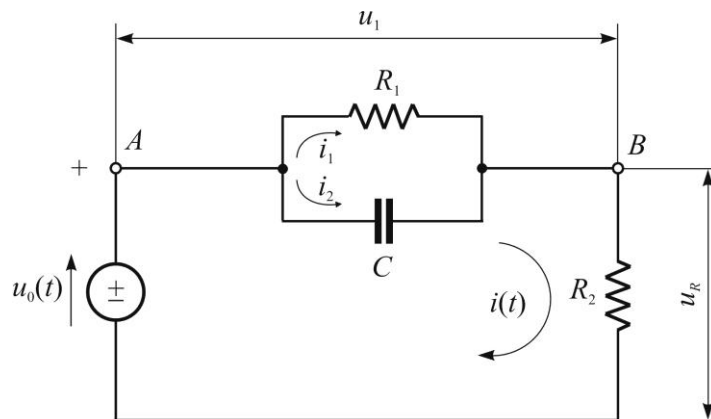
Со замена на Лапласовиот оператор -  $s$  со линеарниот оператор на диференцирање -  $D$ , директно се добива диференцијалната равенка (математичкиот модел) на системот:

$$(D^3 + 3D^2 + 4D + 2)y(t) = (D^2 + D + 1)x(t)$$

односно: 
$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x \quad (6.76)$$

**Задача 6.14.** На слика 6.18 е прикажана една  $R$ - $C$  електрична мрежа (задача 2.16). Да се определи преносната функција за овој систем ако се усвои дека влез е напонот  $u_0(t)$ , а излез е напонот на краевите од  $R_2$  -  $u_R(t)$ .

Да се определи кој тип на компензатор претставува овој електричен систем.



Слика 6.18.  $R$ - $C$  електрична мрежа на еден компензатор

**Решение:** Под претпоставка дека електричното коло не е оптоварено, според основните закони во електротехниката (Омовиот закон и Кирхофовите закони) се добива:

$$u_R(t) = R_2 \cdot i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{u_R(t)}{R_2} \quad (6.77)$$

Според II-Кирхофов закон следи:

$$u_0(t) = u_1(t) + u_R(t) \Rightarrow u_1(t) = u_0(t) - u_R(t) \quad (6.78)$$

Според I-Кирхофов закон за контурата  $AB$  се добива:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{u_1(t)}{R_1} + C \frac{du_1}{dt} \quad (6.79)$$

Со замена на равенките (6.77) и (6.78) во равенката (6.79) се добива:

$$\frac{1}{R_1} [u_0(t) - u_R(t)] + C \frac{d}{dt} [u_0(t) - u_R(t)] = \frac{u_R(t)}{R_2}$$

односно: 
$$C \frac{du_0}{dt} + \frac{u_0(t)}{R_1} = C \frac{du_R}{dt} + \frac{u_R(t)}{R_1} + \frac{u_R(t)}{R_2} \quad (6.80)$$

Со Лапласова трансформација на математичкиот модел (6.80) се добива:

$$\left( Cs + \frac{1}{R_1} \right) \cdot U_0(s) = \left( Cs + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot U_R(s) \quad (6.81)$$

Од равенката (6.81) се добива преносната функција на електричниот систем:

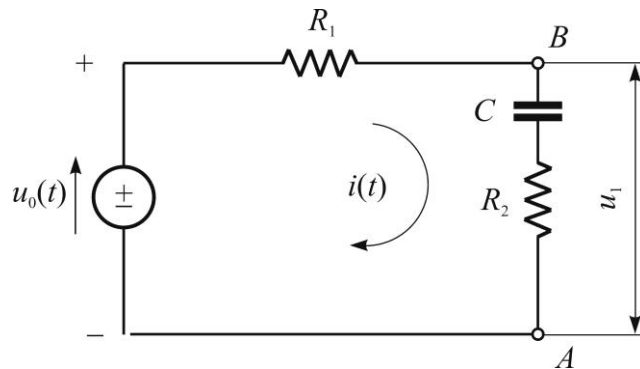
$$P(s) = \frac{U_R(s)}{U_0(s)} = \frac{Cs + \frac{1}{R_1}}{Cs + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{s+a}{s+b} \quad (6.82)$$

Каде што се: 
$$a = \frac{1}{CR_1}; \quad b = \frac{1}{CR_1} + \frac{1}{CR_2}$$

Очигледно е дека е:  $|b| > |a|$ , односно преносната функција (6.82) е преносна функција на еден забрзувач.

**Задача 6.15.** На слика 6.19 е прикажана една  $R$ - $C$  електрична мрежа. Да се определи преносната функција на овој систем ако влез е напонот  $u_0(t)$ , а излез е напонот  $u_1(t)$ .

Да се определи кој тип на компензатор претставува овој електричен систем.



Слика 6.19.  $R$ - $C$  електрична мрежа на еден компензатор

**Решение:** Според II-Кирхофов закон за даденото електрично коло на слика 6.19 се добива равенката:

$$u_0(t) = R_1 \cdot i(t) + R_2 \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (6.83)$$

Излезниот напон  $u_1(t)$  се пресметува од изразот:

$$u_1(t) = R_2 \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (6.84)$$

Со Лапласова трансформација на равенките (6.83) и (6.84) се добива:

$$U_0(s) = \left( R_1 + R_2 + \frac{1}{C \cdot s} \right) \cdot I(s) \quad (6.85)$$

$$U_1(s) = \left( R_2 + \frac{1}{C \cdot s} \right) \cdot I(s) \quad (6.86)$$

Ако Лапласовата трансформација на струјата -  $I(s)$  се изрази од равенката (6.85) и тој израз се замени во равенката (6.86) се добива преносната функција на дадената електрична мрежа:

$$P(s) = \frac{U_1(s)}{U_0(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C \cdot s}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{C \cdot s}} \quad (6.87)$$



Со средовање на равенката (6.87) се добива:

$$P(s) = \frac{U_1(s)}{U_0(s)} = k \frac{s+a}{s+b} \quad (6.88)$$

Каде што се:  $a = \frac{1}{R_2 C}$ ;  $b = \frac{1}{(R_1 + R_2) C}$ ;  $k = \frac{b}{a} = \frac{R_2 C}{(R_1 + R_2) C}$ .

Очигледно е дека е:  $|a| > |b|$ , односно преносната функција (6.88) претставува преносна функција на еден успорувачки компензатор.

**Задача 6.16.** За електричната  $R$ - $C$  мрежа, дадена во задача 2.17, да се определи преносната функција на овој систем, ако влез за системот е напонот  $u(t)$ , а излез за системот е напонот  $u_2(t)$ .

Да се определи кој тип на компензатор претставува овој електричен систем.

**Решение:** Според I-Кирхофов закон за контурата  $AB$  се добива равенката:

$$i(t) = \frac{1}{R_1} \cdot [u(t) - u_2(t)] + C_1 \cdot \frac{d}{dt} [u(t) - u_2(t)] \quad (6.89)$$

Излезот на системот, односно напонот  $u_2(t)$  се определува од изразот:

$$u_2(t) = R_2 \cdot i(t) + \frac{1}{C_2} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (6.90)$$

Со Лапласова трансформација на равенките (6.89) и (6.90), при почетни услови еднакви на нула, се добива:

$$I(s) = \left( \frac{1}{R_1} + C_1 \cdot s \right) \cdot U(s) - \left( \frac{1}{R_1} + C_1 \cdot s \right) \cdot U_2(s) \quad (6.91)$$

$$U_2(s) = \left( R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot s} \right) \cdot I(s) \quad (6.92)$$

Со елиминација на  $I(s)$  од равенките (6.91) и (6.92) се добива релацијата:

$$\frac{U_2(s)}{\left( R_2 + \frac{1}{C_2 \cdot s} \right)} + \left( \frac{1}{R_1} + C_1 \cdot s \right) \cdot U_2(s) = \left( \frac{1}{R_1} + C_1 \cdot s \right) \cdot U(s) \quad (6.93)$$

Со средовање на равенката (6.93) се добива преносната функција за дадената електрична мрежа:

$$P(s) = \frac{U_2(s)}{U(s)} = \frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \cdot \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (6.94)$$

Преносната функција (6.94) може да се напише во општ облик:

$$P(s) = \frac{U_2(s)}{U(s)} = \frac{(s + a_1) \cdot (s + a_2)}{(s + b_1) \cdot (s + b_2)} \quad (6.95)$$

Каде што се:  $a_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$ ;  $a_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$ ;  $b_1 \cdot b_2 = a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}$ ;  $b_1 + b_2 = a_1 + a_2 + \frac{1}{R_2 C_1}$ .

Преносната функција (6.95) претставува преносна функција на еден забрзувачко-успорувачки компензатор.

**Задача 6.17.** Да се определи сталната состојба на излезот:  $y_{ss}(t) = ?$ , за секој од системите:

$$\text{а). } P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s+1} \quad (6.96)$$

$$\text{б). } P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{8}{(s+1) \cdot (s+2)} \quad (6.97)$$

$$\text{в). } P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2 \cdot (s+4)}{(s+1) \cdot (s+2)} \quad (6.98)$$

ако на влезот е доведена функцијата:  $x(t) = 5 \cdot u(t)$

**Решение:** За линеарен и стабилен систем и за влез отскочна функција, сталната состојба на неговиот излез ќе биде константна вредност со амплитуда  $A \cdot P(0)$ , односно:

$$y_{ss}(t) = A \cdot P(0)$$

За конкретниот пример, амплитудата на отскочната функција на влезот е:

$$A = 5$$

Според тоа, за да се определи сталната состојба на излезот доволно е да се определи еднонасоченото засилување  $P(0)$  за секој од системите.

а). Очигледно е дека системот претставен со преносната функција (6.96) е стабилен систем, па, според тоа, еднонасоченото засилување ќе биде:

$$P(0) = P(s)|_{s=0} = \frac{2}{s+1}|_{s=0} = 2 \quad (6.99)$$

Сталната состојба на излезот ќе биде:

$$y_{ss}(t) = A \cdot P(0) = 5 \cdot 2 = 10 \quad (6.100)$$

б). Системот претставен со преносната функција (6.97) е стабилен, бидејќи неговата карактеристична равенка има корени со негативен реален дел: -1, -2. Според тоа, еднонасоченото засилување ќе биде:

$$P(0) = P(s)|_{s=0} = \frac{8}{(s+1) \cdot (s+2)}|_{s=0} = 4 \quad (6.101)$$

Сталната состојба на излезот ќе биде:

$$y_{ss}(t) = A \cdot P(0) = 5 \cdot 4 = 20 \quad (6.102)$$

б). Карактеристична равенка на овој систем (6.98) е идентична со карактеристична равенка на системот претставен со преносната функција (6.97), па, според тоа, и овој систем е стабилен.

Еднонасоченото засилување ќе биде:

$$P(0) = P(s)|_{s=0} = \frac{2 \cdot (s+4)}{(s+1) \cdot (s+2)}|_{s=0} = 4 \quad (6.103)$$

Сталната состојба на излезот ќе биде:

$$y_{ss}(t) = A \cdot P(0) = 5 \cdot 4 = 20 \quad (6.104)$$

**Задача 6.18.** Да се определи сталната состојба на излезот:  $y_{ss}(t) = ?$ , за системот претставен со преносната функција:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{(s+2) \cdot (s+2\sqrt{3})}, \quad (6.105)$$

ако на влезот е доведена функцијата:

$$x(t) = 4 \cdot \sin 2t \quad (6.106)$$

**Решение:** Карактеристична равенка на овој систем (6.105) има корени со негативен реален дел и тие се:  $-2$ ,  $-2\sqrt{3}$ , па, според тоа, се работи за стабилен систем.

Сталната состојба на излезот е дадена со изразот (6.19):

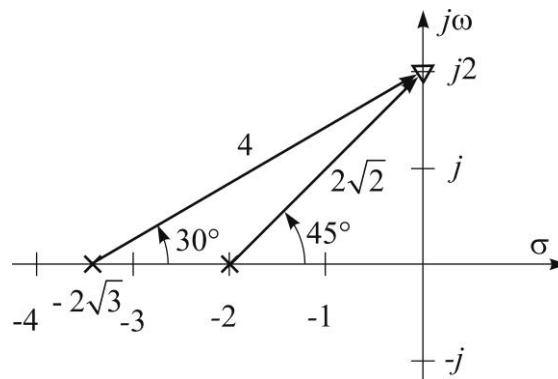
$$y_{ss}(t) = A \cdot |P(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \Phi) \quad (6.107)$$

Од функцијата, која што е доведена на влезот, директно се определува:

$$A = 4 \text{ и } \omega = 2 \text{ rad/s}$$

Засилувањето на системот  $|P(j\omega)|$  и вредноста на фазното поместување навлезниот агол  $\Phi = \arg P(j\omega)$  наједноставно може да се определат со графоаналитичка метода.

За таа цел се црта пол-нула дијаграмот за преносната функција (6.105) и сите полови и нули, векторски се поврзуваат со актуелната фреквенција, односно точката на имагинарната оска  $j\omega = j2$ , како што е прикажано на слика 6.20.



Слика 6.20. Пол-нула дијаграм на преносната функција

Според скицата дадена на слика 6.20 лесно може да се определи засилувањето на системот:

$$|P(j\omega)| = \frac{A}{2\sqrt{2} \cdot A} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (6.108)$$

и фазното засилување на влезниот агол:

$$\Phi = \arg P(j2) = -45^\circ - 30^\circ = -75^\circ$$

односно изразено во  $[rad]$  ќе биде:

$$\Phi = \arg P(j2) = -\frac{75^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = -\frac{5 \cdot \pi}{12} \text{ rad} \quad (6.109)$$

*Напомена:* Вредноста на фазниот допринос на секој од векторите е негативна, поради тоа што векторите поаѓаат од пол. Ако векторот поаѓа од нула тогаш фазниот допринос, мерен од позитивниот правец на реалната оска, се зема со позитивна вредност.

Ако се заменат добиените вредности за засилувањето на системот (6.108) и фазното поместување на влезниот агол (6.109) во равенката (6.107) се добива сталната состојба на одзивот на системот:

$$y_{ss}(t) = \cancel{A} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{A}} \cdot \sin\left(2t - \frac{5 \cdot \pi}{12}\right)$$

$$y_{ss}(t) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(2t - \frac{5 \cdot \pi}{12}\right) \quad (6.110)$$

**Задачи за вежбање:**

**Задача 6.19.** Даден е математичкиот модел на еден физички систем:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 2 \frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 5x \quad (6.111)$$

каде што е:  $x(t)$  - влез, а  $y(t)$  - излез.

- Да се определи преносната функција на системот.
- Дали дадениот математички модел (6.111) презентира стабилен систем?
- Да се нацрта пол-нула мапата на преносната функција.

**Решение:** а). Преносната функција на дадениот физички систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 2}. \quad (6.112)$$

б). Стабилноста на системот ќе се испита според Routh-овиот критериум:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 2 = 0$$

$s^4$	1	3	2
$s^3$	2	2	0
$s^2$	2	2	0
$s^1$	0	0	
$s^0$	2		

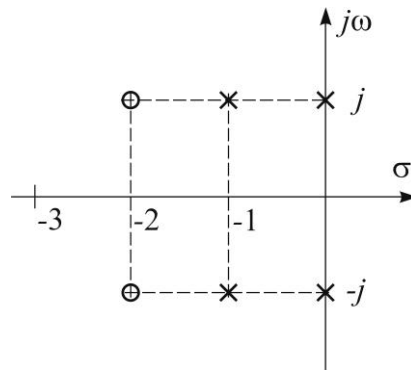
Бидејќи постои нула во првата колона од Routh-овата табела, системот ќе биде гранично стабилен односно нестабилен.

в) Пол-нула мапата на преносната функција (6.112) е дадена на слика 6.21.

**Напомена:** Два корена од карактеристичната равенка се добиваат според особините на Routh-овата табела (глава 5) од равенката:

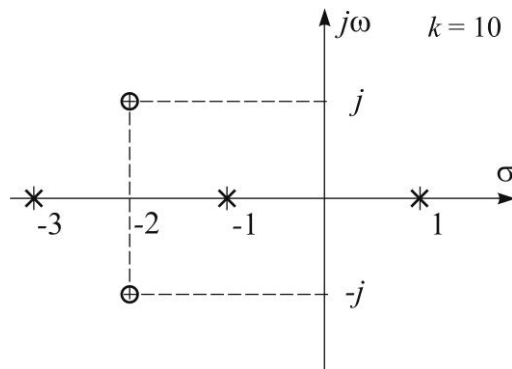
$$As^2 + B = 0$$

$$2s^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j$$



Слика 6.21. Пол-нула мапа на преносната функција

**Задача 6.20.** Дадена е пол-нула мапата на преносната функција на еден систем на автоматско управување (слика 6.22):



Слика 6.22. Пол-нула мапа на преносна функција

- Да се определи преносната функција на системот.
- Да се определи вредноста на полот во  $-a$ , така да се добие стабилен систем.
- Да се напише диференцијалната равенка која што го опишува дадениот систем на автоматско управување.

**Решение:** а). Преносната функција на системот, чии што пол-нула дијаграм е даден на слика 6.22 ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10 \cdot (s^2 + 4s + 5)}{s^3 + (5+a)s^2 - (6-5a)s - 6a}. \quad (6.113)$$

- Системот е нестабилен за сите вредности на  $a$ , бидејќи карактеристичната равенка на системот има еден пол во десната половина од  $s$ -полето.

в). Диференцијалната равенка, која што претставува математички модел на дадениот систем, ќе биде:

$$D^3 y(t) + (5+a)D^2 y(t) - (6-5a)Dy(t) - 6ay(t) = 10 \cdot (D^2 + 4D + 5)x(t)$$

односно: 
$$\frac{d^3 y}{dt^3} + (5+a)\frac{d^2 y}{dt^2} - (6-5a)\frac{dy}{dt} - 6ay = 10 \left( \frac{d^2 x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x \right) \quad (6.114)$$

**Задача 6.21.** Да се определи преносната функција на еден физички систем, ако на излезот е измерен единечниот импулсен одзив:

$$y_s(t) = e^{-t} (3 - \sin 2t). \quad (6.115)$$

**Решение:** Преносната функција на дадениот физички систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s^2 + 4s + 13}{(s+1)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{3s^2 + 4s + 13}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}. \quad (6.116)$$

**Задача 6.22.** Даден е единечниот импулсен одзив на еден физички систем и тој изнесува:

$$y_s(t) = \frac{1}{6} (e^{-t} - 3e^{-2t} + 3e^{-3t} - e^{-4t}) \quad (6.117)$$

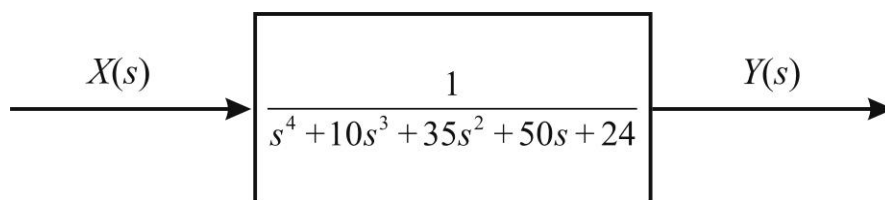
а). Да се определи преносната функција на системот.

б). Да се нацрта блок-дијаграмот на системот.

**Решение:** а). Преносната функција на дадениот физички систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{1}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}. \quad (6.118)$$

б). Блок-дијаграмот на системот е претставен на слика 6.23.



Слика 6.23. Блок-дијаграм за дадениот физички систем



**Задача 6.23.** Даден е единечниот импулсен одзив на еден физички систем и тој изнесува:

$$y_{\delta}(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - te^{-2t} + 2e^{-t} \sin 3t \quad (6.119)$$

- а). Да се определи преносната функција на системот.  
 б). Да се определи дали овој систем е стабилен.

**Решение:** а). Преносната функција на дадениот физички систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^3 + 13s^2 + 32s + 2}{s^4 + 4s^3 + 16s^2 + 24s + 20}. \quad (6.120)$$

б). Стабилноста на системот ќе се испита според Routh-овиот критериум. Карактеристичната равенка за дадениот систем (6.120) ќе биде:

$$s^4 + 4s^3 + 16s^2 + 24s + 20 = 0 \quad (6.121)$$

Бидејќи нема промена на предзнаците на членовите од првата колона на Routh-овата табела (сите членови се позитивни), дадената преносна функција (6.120) ќе презентира стабилен систем.

**Задача 6.24.** Да се определи преносната функција на еден физички систем, ако на излезот е измерен единечниот отскочен одзив:

$$y_u(t) = 2 - 4e^{-2t} - e^{-t} \sin t. \quad (6.122)$$

**Решение:** Преносната функција на дадениот физички систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{9s^2 + 20s + 20}{(s+2)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{9s^2 + 20s + 20}{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}. \quad (6.123)$$

**Задача 6.25.** Даден е единечниот нагибен одзив:

$$y_r(t) = \frac{1}{8}(-7 + 6t + 16e^{-t} - 6e^{-2t} - 2te^{-2t}) \quad (6.124)$$

- а). Да се определи единечниот импулсен одзив.  
 б). Да се определи преносната функција на системот.

**Решение:** а). Единечниот импулсен одзив ќе биде:

$$y_{\delta}(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} - te^{-2t} \quad (6.125)$$

б). Преносната функција на дадениот физички систем е:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-3s-1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{-(3s+1)}{s^3+5s^2+8s+4}. \quad (6.126)$$

**Задача 6.26.** Синусоидален влез  $x(t) = 2 \cdot \sin 2t$  е доведен на системот претставен со преносната функција:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4(s-1)}{s^2+7s-2}, \quad (6.127)$$

Да се определи сталната состојба на излезот:  $y_{ss}(t) = ?$

**Решение:** За овој систем (6.127) не може да се определи стална состојба на излезот, бидејќи се работи за нестабилен систем.

**Задача 6.27.** Синусоидален влез  $x(t) = 10 \cdot \sin 4t$  е доведен на системот претставен со преносната функција:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16(s+4\sqrt{3})}{\left(s+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)(s+4)}, \quad (6.128)$$

Да се определи сталната состојба на излезот:  $y_{ss}(t) = ?$

**Решение:** Сталната состојба на излезот ќе биде:

$$y_{ss}(t) = 20\sqrt{6} \cdot \sin\left(4t - \frac{5 \cdot \pi}{12}\right) \quad (6.129)$$

**Задача 6.28.** Дадена е преносната функција на еден систем на автоматско управување:

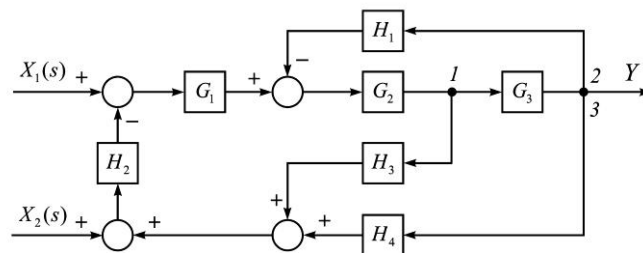
$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5(s+\sqrt{3})}{(s+1)(s+3)}, \quad (6.130)$$

Да се определи сталната состојба на излезот:  $y_{ss}(t) = ?$  ако на влезот е доведена простопериодична функција  $x(t) = 4 \cdot \sin \omega t$ , каде што е:  $\omega = \sqrt{3} \text{ rad / s}$ .

**Решение:** Сталната состојба на излезот ќе биде:

$$y_{ss}(t) = 5\sqrt{2} \cdot \sin\left(\sqrt{3} \cdot t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.131)$$

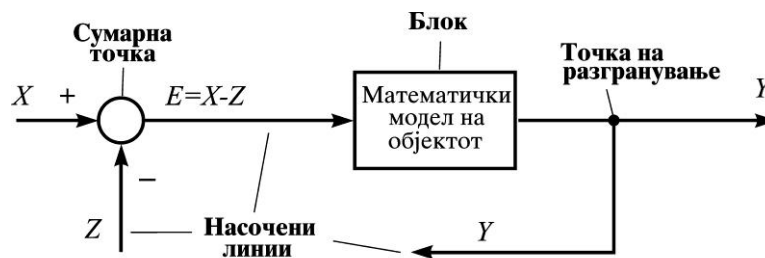
# СЕДМА ГЛАВА



## 7. АЛГЕБРА НА БЛОК ДИЈАГРАМИТЕ

### 7.1. Преглед на основните елементи

Во најопшт случај, еден блок дијаграм е сочинет од четири врсти на елементи: блокови, собирачи, точки на разгранување и насочени линии со кои што се претставува протокот на сигнали во дадена насока, како што може да се види на слика 7.1.



Слика 7.1. Основни елементи во еден блок дијаграм

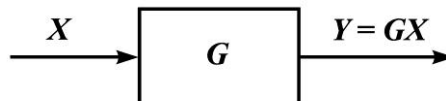
Основната цел која што се поставува во оваа глава е како да се определи преносната функција на еден сложен блок дијаграм, или како може истиот да се трансформира во основен каскаден облик на управувачки систем со повратна врска (слика 7.3).

За таа цел ќе бидат анализирани три приоди, односно методи:

1. Метода со пратење на текот на сигналите.
2. Метода со трансформација на блок дијаграмите.
3. Графови за текот на сигналите.

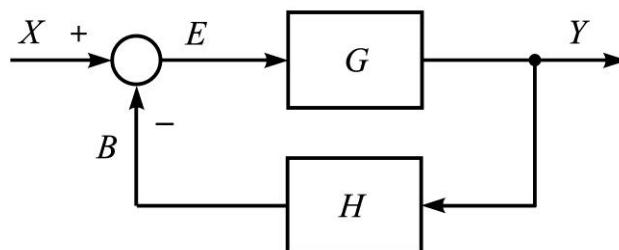
## 7.2. Метода со пратење на текот на сигналите

Ова е наједноставната метода за упростување на сложените блок дијаграми, односно за определување на нивната преносна функција, но таа, исто така, се применува за релативно поедноставни блок дијаграми. При тоа, се применува само елементарното правило дека сигналот на излез од блокот -  $Y$  е еднаков на производот на преносната функција на блокот -  $G$  и влезната големина -  $X$ , како што е прикажано на слика 7.2.



Слика 7.2. Излезен сигнал на еден блок

**Задача 7.1.** Да се определи преносната функција на каноничен облик на управувачки систем со повратна врска.



Слика 7.3. Каноничен облик на управувачки систем со повратна врска

**Решение:** Според ознаките на сигналите на слика 7.3 на каноничен облик на управувачки систем со повратна врска следува:

$$B = H \cdot Y \quad (7.1)$$

$$E = X - Y \quad (7.2)$$

$$Y = G \cdot E \quad (7.3)$$

Со замена на изразите (7.1) и (7.2) во изразот (7.3) се добива:

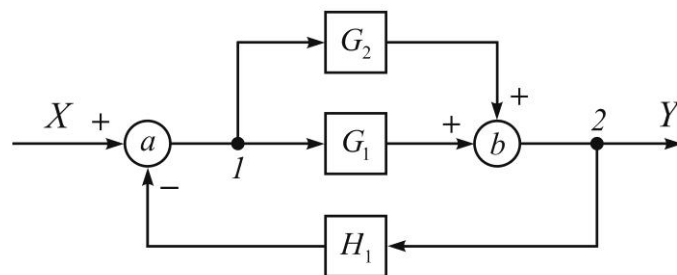
$$Y = G \cdot (X - B) = G \cdot (X - H \cdot Y)$$

односно:  $(1 + G \cdot H) \cdot Y = G \cdot X \quad (7.4)$

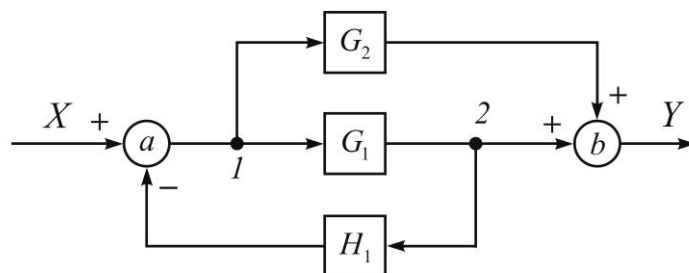
Според тоа, преносната функција -  $P$  на каноничен облик на управувачки систем со повратна врска ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{G}{1 + G \cdot H} \quad (7.5)$$

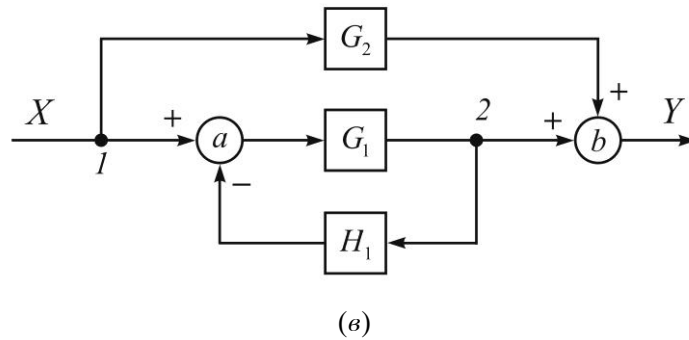
**Задача 7.2.** За управувачките системи, дадени со нивните блок дијаграми, претставени на слика 7.4 (а, б, в) да се определат преносните функции на секој од системите поединечно.



(а)

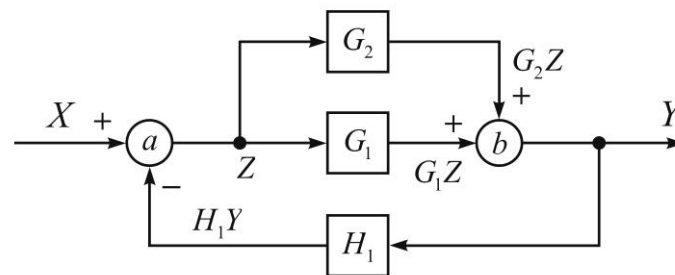


(б)



Слика 7.4. Блок дијаграми на управувачки системи

**Решение:** (a). На блок дијаграмот на управувачкиот систем даден на слика 7.4.a. се обележуваат сигналите, како што е прикажано на слика 7.5.



Слика 7.5. Сигнали на блок дијаграмот на управувачкиот систем (7.4.a)

**Напомена:** Во блок дијаграмите се воведуваат дополнителни ознаки за некои сигнали ( $Z$ ) за да може полесно да се определи текот на сигналите. Треба да се воведат што е можно помалку дополнителни ознаки на сигналите, бидејќи истите треба да се елиминираат од добиените равенки, по принципот на симултани алгебарски равенки.

Според ознаките на сигналите дадени на слика 7.5 следува:

$$Z = X - H_1 \cdot Y \quad (7.6)$$

$$Y = G_1 \cdot Z + G_2 \cdot Z \quad (7.7)$$

Со замена на равенката (7.6) во равенката (7.7) се добива:

$$Y = (G_1 + G_2) \cdot (X - H_1 \cdot Y) \quad (7.8)$$

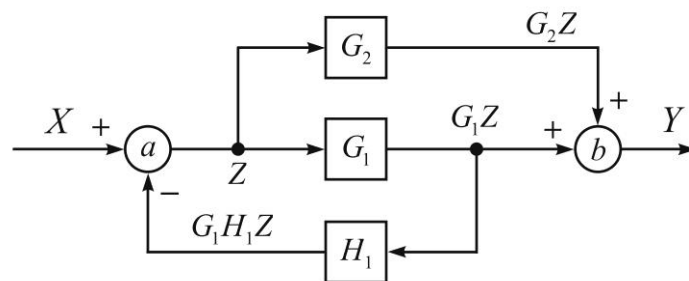
Од равенката (7.8) може да се определи преносната функција на овој управувачки систем како што следи:

$$[1 + (G_1 + G_2) \cdot H_1] \cdot Y = (G_1 + G_2) \cdot X$$

односно:

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 + G_2}{1 + (G_1 + G_2) \cdot H_1} \quad (7.9)$$

**(б).** На блок дијаграмот претставен на слика 7.4.б. се обележуваат сигналите, како што е прикажано на слика 7.6.



Слика 7.6. Сигнали на блок дијаграмот на управувачкиот систем (7.4.б)

Според ознаките на сигналите дадени на слика 7.6 се добиваат следните равенки:

$$Z = X - G_1 \cdot H_1 \cdot Z \quad (7.10)$$

$$Y = G_1 \cdot Z + G_2 \cdot Z \quad (7.11)$$

Со средување на равенката (7.10) и со замена на добиениот израз во равенката (7.11) се добива:

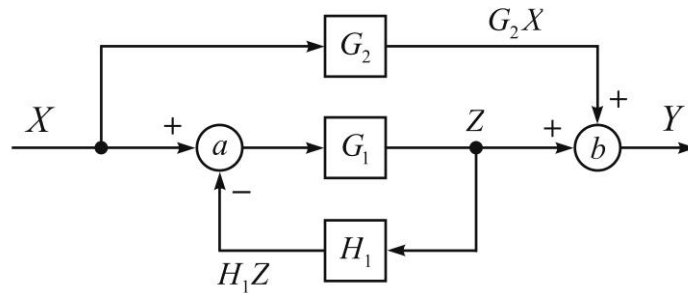
$$Y = (G_1 + G_2) \cdot \frac{X}{1 + G_1 \cdot H_1}$$

од каде лесно се определува преносната функција на системот:

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 \cdot H_1} \quad (7.12)$$

**(в).** Аналогно на претходните примери, на блок дијаграмот претставен на слика 7.4.в. се обележуваат соодветните сигнали, како што е прикажано на слика 7.7.





Слика 7.7. Сигнали на блок дијаграмот на управувачкиот систем (7.4.6)

Според ознаките на слика 7.7 се добиваат следните равенки:

$$Z = (X - H_1 \cdot Z) \cdot G_1 \quad (7.13)$$

$$Y = G_2 \cdot Z + Z \quad (7.14)$$

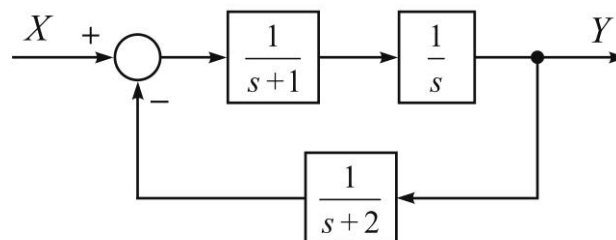
Со определување на сигналот  $Z$  од равенката (7.13) и со замена на добиениот израз во равенката (7.14) се добива:

$$Y = G_2 \cdot X + \frac{G_1 \cdot X}{1 + G_1 \cdot H_1}$$

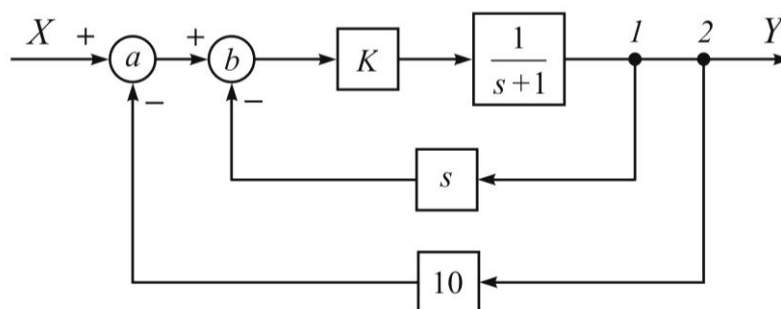
од каде лесно се определува преносната функција на системот:

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 + G_2 + G_1 \cdot G_2 \cdot H_1}{1 + G_1 \cdot H_1} \quad (7.15)$$

**Задача 7.2.** За управувачките системи претставени со нивните блок дијаграми на слика 7.8 (а, б) да се определат нивните карактеристични равенки.



(a)

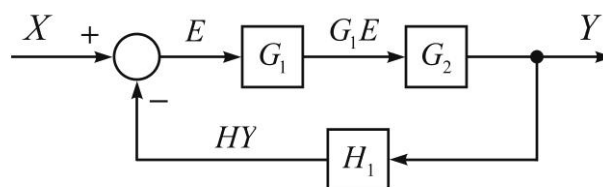


(б)

Слика 7.8. Блок дијаграми на управувачки системи

**Решение:** Во конкретните примери е карактеристично тоа што блок дијаграмите се претставени со конкретна вредност на преносните функции во  $s$ -домен за секој блок поединечно. Според тоа, потребно е најпрво да се определат нивните преносни функции од коишто потоа лесно може да се определат преносните функции.

(а). На блок дијаграмот на управувачкиот систем даден на слика 7.8.а. се обележуваат соодветните сигнали, како што е тоа прикажано на слика 7.9.



Слика 7.9. Сигнали на блок дијаграмот на управувачкиот систем (7.8.а)

Според ознаките на сигналите дадени на слика 7.9 се добиваат следните равенки:

$$E = X - H \cdot Y \quad (7.16)$$

$$Y = G_1 \cdot G_2 \cdot E \quad (7.17)$$

Со замена на равенката (7.16) во равенката (7.17) се добива:

$$(1 + G_1 \cdot G_2 \cdot H) \cdot Y = G_1 \cdot G_2 \cdot X$$

односно: 
$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2 \cdot H} \quad (7.18)$$

Во добиената преносна функција (7.18) во општ облик се заменуваат преносните функции за секој од блоковите поединечно, при што се добива;

$$\frac{Y}{X}(s) = \frac{\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+2}}$$

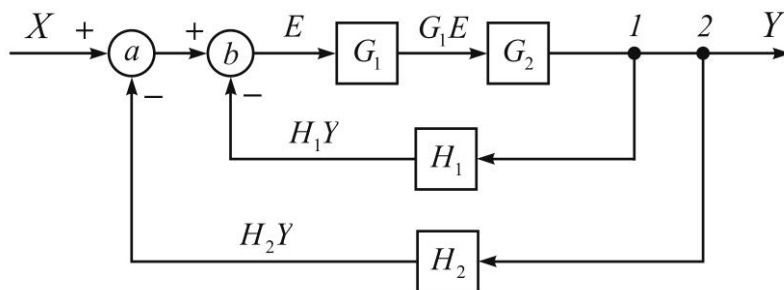
Од каде што лесно може да се определи преносната функција на системот во  $s$ -домен:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{s+2}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \quad (7.19)$$

Според тоа, карактеристичната равенка за системот претставен со блок дијаграмот на слика 7.8.a ќе биде:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0 \quad (7.20)$$

**(б).** На блок дијаграмот на управувачкиот систем даден на слика 7.8.б. се обележуваат соодветните сигнали (слика 7.10):



Слика 7.10. Сигнали на блок дијаграмот на управувачкиот систем (7.8.б)

Според ознаките на сигналите дадени на слика 7.10 се добива:

$$E = (X - H_2 \cdot Y) - H_1 \cdot Y \quad (7.21)$$

$$Y = G_1 \cdot G_2 \cdot E \quad (7.22)$$

Со замена на равенката (7.21) во равенката (7.22) и со нејзино средување се добива:

$$(1 + G_1 \cdot G_2 \cdot H_1 + G_1 \cdot G_2 \cdot H_2) \cdot Y = G_1 \cdot G_2 \cdot X$$

односно;

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1 \cdot G_2 \cdot H_1 + G_1 \cdot G_2 \cdot H_2} \quad (7.23)$$

Во добиениот општ облик на преносната функција (7.23) се заменуваат преносните функции за секој од блоковите поединечно, при што се добива;

$$\frac{Y}{X}(s) = \frac{K \cdot \frac{1}{s+1}}{1 + K \cdot \frac{1}{s+1} \cdot s + 10 \cdot K \cdot \frac{1}{s+1}}$$

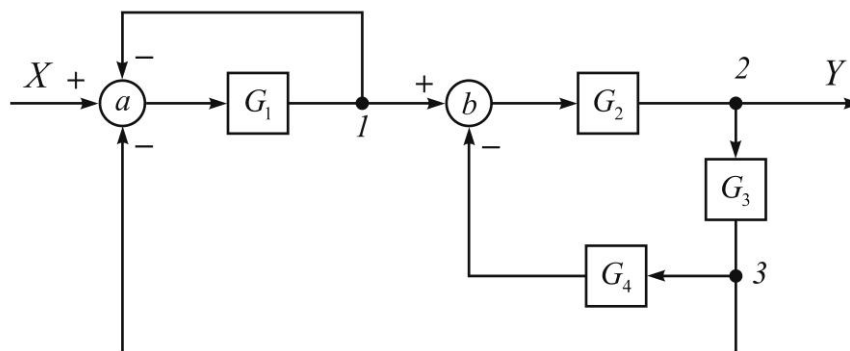
Од каде што лесно може да се определи конечниот облик на преносната функција на целиот систем во  $s$  - домен:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{K}{(K+1) \cdot s + (10K+1)} \quad (7.24)$$

Карактеристичната равенка за овој систем ќе биде:

$$(K+1) \cdot s + (10K+1) = 0 \quad (7.25)$$

**Задача 7.4.** Да се определи преносната функција за управувачкиот систем даден со неговиот блок дијаграм (слика 7.11).



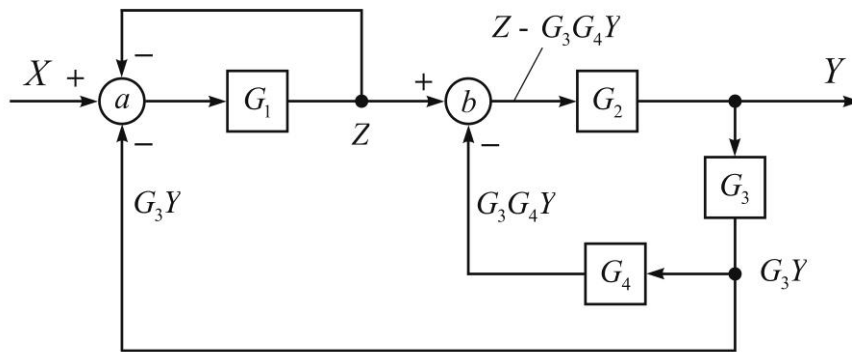
Слика 7.11. Блок дијаграм на управувачки систем

**Решение:** На блок дијаграмот на управувачкиот систем, даден на слика 7.11, се впишува текот на сигналите, како што е тоа прикажано на слика 7.12.

Според ознаките на сигналите дадени на слика 7.9 се добиваат следните равенки:

$$Z = (X - Z - G_3 \cdot Y) \cdot G_1 \quad (7.26)$$

$$Y = (Z - G_3 \cdot G_4 \cdot Y) \cdot G_2 \quad (7.27)$$



Слика 7.12. Тек на сигналите во блок дијаграм на управувачки систем

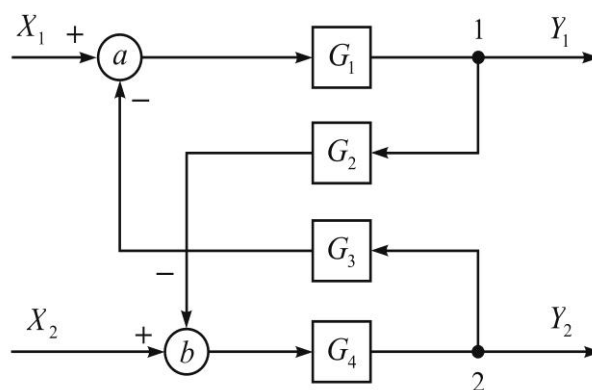
Со средување на равенката (7.26) по променливата  $Z$  и со замена на добиениот израз во равенката (7.27) се добива:

$$\left(1 + \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{1 + G_1} + G_2 \cdot G_3 \cdot G_4\right) \cdot Y = \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + G_1} \cdot X$$

од каде што лесно се определува преносната функција на управувачкиот систем:

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 + G_1 G_2 G_3 + G_2 G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4} \quad (7.28)$$

**Задача 7.5.** Следниот блок дијаграм (слика 7.13) е пример на линеарен управувачки систем со два влеза и два излеза.



Слика 7.13. Блок дијаграм на управувачки систем со два влеза и два излеза

Да се определат излезите  $Y_1$  и  $Y_2$  за овој управувачки систем при истовремено дејство на двата влеза на системот  $X_1$  и  $X_2$ .

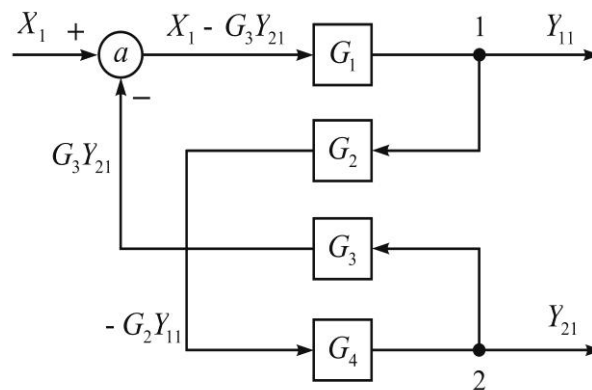
**Решение:** Бидејќи се работи за линеарен управувачки систем, може да се примени принципот на суперпозиција, односно прво да се определат излезите  $Y_{11}$  и  $Y_{21}$  кога е активен само влезот  $X_1$  ( $X_1 \neq 0$ ,  $X_2 = 0$ ), а потоа ќе се определат излезите  $Y_{12}$  и  $Y_{22}$  кога е активен само влезот  $X_2$  ( $X_1 = 0$ ,  $X_2 \neq 0$ ).

Вкупните одзиви на системот  $Y_1$  и  $Y_2$ , кога се активни и двата влеза  $X_1$  и  $X_2$ , ќе се добијат како линеарна комбинација на претходно добиените поединечни одзиви, односно:

$$Y_1 = Y_{11} + Y_{12} \quad (7.29)$$

$$Y_2 = Y_{21} + Y_{22} \quad (7.30)$$

Според тоа, прво ќе се впише текот на сигналите во дадениот блок дијаграм кога е активен само влезот  $X_1$  ( $X_1 \neq 0$ ,  $X_2 = 0$ ). Во овој случај влезот  $X_2$  едноставно се изоставува, како што е тоа прикажано на слика 7.14.



Слика 7.14. Тек на сигналите во блок дијаграмот кога е активен само влезот  $X_1$

Според ознаките на сигналите дадени на слика 7.14 може да се напишат следните равенки:

$$Y_{11} = (X_1 - G_3 \cdot Y_{21}) \cdot G_1 \quad (7.31)$$

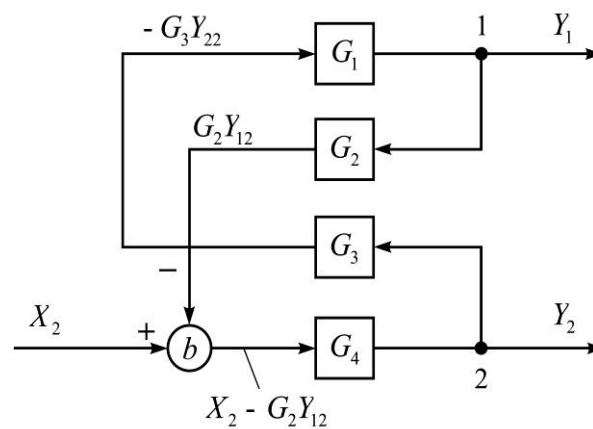
$$Y_{21} = -G_2 \cdot G_4 \cdot Y_{11} \quad (7.32)$$

Добиените равенки претставуваат систем од две равенки со две непознати, од каде што лесно може да се определат двата парцијални излеза, односно:

$$Y_{11} = \frac{G_1}{1 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4} \cdot X_1 \quad (7.33)$$

$$Y_{21} = \frac{-G_1 \cdot G_2 \cdot G_4}{1 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4} \cdot X_1 \quad (7.34)$$

Сега, истиот блок дијаграм на управувачкиот систем ќе се впише текот на сигналите во дадениот кога е активен само влезот  $X_2$  ( $X_1 = 0$ ,  $X_2 \neq 0$ ), како што е тоа прикажано на слика 7.15.



Слика 7.15. Тек на сигналите во блок дијаграмот кога е активен само влезот  $X_2$

Според ознаките на сигналите дадени на слика 7.15 се добиваат следните равенки:

$$Y_{12} = -G_1 \cdot G_3 \cdot Y_{22} \quad (7.35)$$

$$Y_{22} = (X_2 - G_2 \cdot Y_{12}) \cdot G_4 \quad (7.36)$$

Од системот равенки (7.35) и (7.36) лесно може да се определат двата парцијални излеза, односно:

$$Y_{12} = \frac{-G_1 \cdot G_3 \cdot G_4}{1 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4} \cdot X_2 \quad (7.37)$$

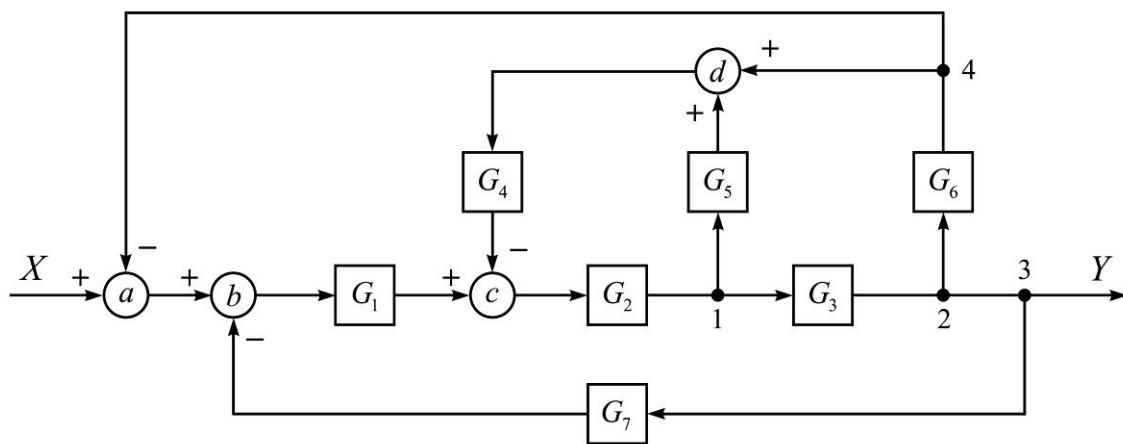
$$Y_{22} = \frac{G_4}{1 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4} \cdot X_2 \quad (7.38)$$

Вкупните одзиви на управувачкиот систем  $Y_1$  и  $Y_2$  ќе се добијат според равенките (7.29) и (7.30), ако во нив се заменат изразите за парцијалните излези добиени претходно, како што следи:

$$Y_1 = Y_{11} + Y_{12} = \frac{G_1 \cdot X_1 - G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot X_2}{1 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4} \quad (7.39)$$

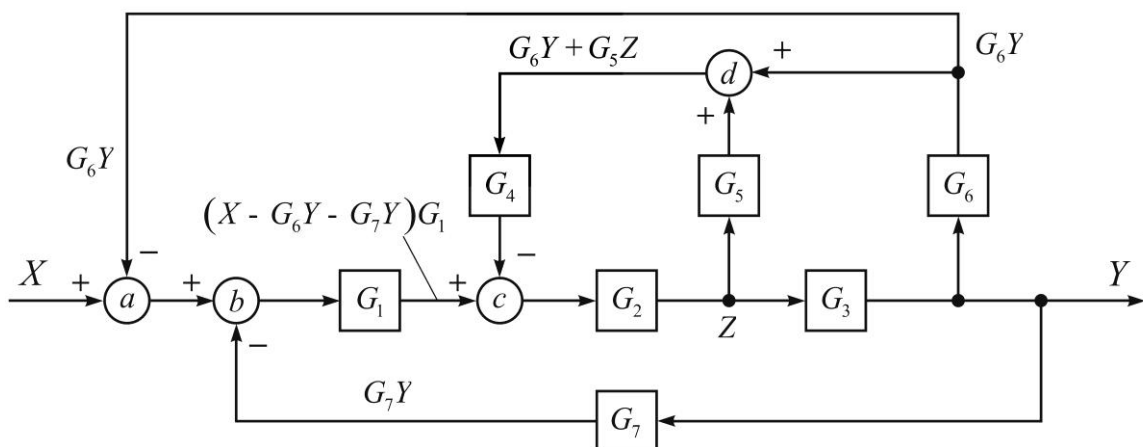
$$Y_2 = Y_{21} + Y_{22} = \frac{G_4 \cdot X_2 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 \cdot X_1}{1 - G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4} \quad (7.40)$$

**Задача 7.6.** Да се определи преносната функција за управувачкиот систем даден со неговиот блок дијаграм (слика 7.16).



Слика 7.16. Блок дијаграм на управувачки систем

**Решение:** На блок дијаграмот на управувачкиот систем, даден на слика 7.16, се впишува текот на сигналите, како што е тоа прикажано на слика 7.17.



Слика 7.17. Тек на сигналите во блок дијаграм на управувачки систем



Според слика 7.17 се пишуваат равенките:

$$Z = [(X - G_6 Y - G_7 \cdot Y) \cdot G_1 - (G_6 Y + G_5 \cdot Z) \cdot G_4] \cdot G_2 \quad (7.41)$$

$$Y = G_3 \cdot Z \quad (7.42)$$

Со средовање на равенката (7.41) и со замена во равенката (7.42) се добива:

$$(1 + G_2 G_4 G_5) Y = G_1 G_2 G_3 X - G_1 G_2 G_3 G_6 Y - G_1 G_2 G_3 G_7 Y - G_2 G_3 G_4 G_6 Y$$

Според тоа, преносната функција за дадениот управувачки систем ќе биде:

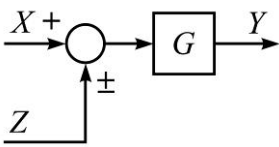
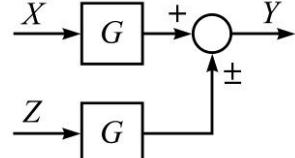
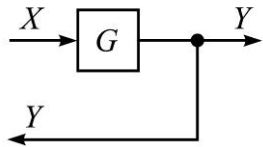
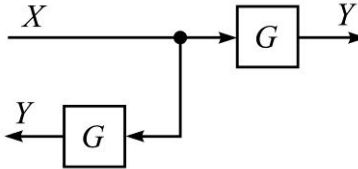
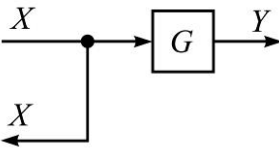
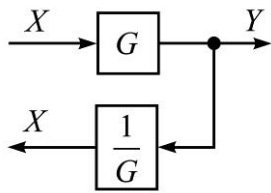
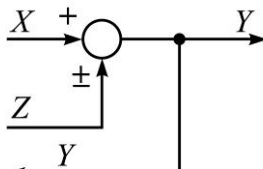
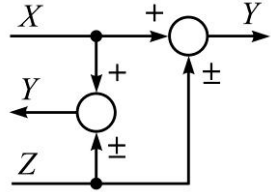
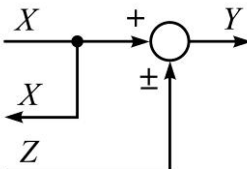
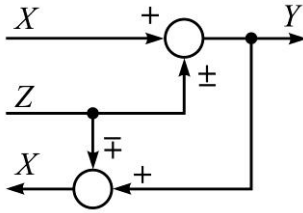
$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_7 + G_2 G_3 G_4 G_6} \quad (7.43)$$

### 7.3. Метода со трансформација на блок дијаграмите

Блок дијаграмите од сложените управувачки системи можат да бидат упростени до каноничен облик на блок дијаграм со редоследна примена на елементарни трансформации на сложенитот блок дијаграм. Теоремите за елементарните трансформации на блок дијаграмите се презентирани во табела 7.1 и истите нема потреба да бидат изведувани. Буквата  $G$  се користи за претставување на произволна преносна функција на некој блок, а буквата  $H$  се користи за претставување на произволна преносна функција на блок во повратна омча. Буквите  $X, Y, Z, W$  означуваат сигнали во  $s$ -домен.

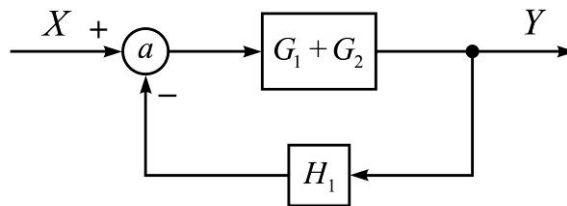
Табела 7.1. Теореме за трансформација на блок дијаграмите

Трансформација		Равенка	Блок дијаграм	Еквивалентен блок дијаграм
1	Здружување на блокови во каскада	$Y = G_1 G_2 X$		
2	Здружување на блокови во паралелна врска	$Y = (G_1 \pm G_2) X$		
3	Поместување на блок од паралелна гранка	$Y = G_2 \left( \frac{G_1 \pm 1}{G_2} \right) X$ $Y = (G_1 \pm G_2) X$		
4	Елиминација на повратна врска	$Y = \frac{G}{1 \pm GH} X$ $Y = G(X \mp HY)$		
5	Поместување на блок од повратна врска	$Y = GH \left( \frac{X}{H} \mp Y \right)$ $Y = \frac{G}{1 \pm GH} X$		
6a	Реаранжирање на собирачи	$Y = X \pm W \pm Z$		
6б	Реаранжирање на собирачи	$Y = X \pm W \pm Z$		
7	Поместување на собирач пред блок	$Y = GX \pm Z$		

	Трансформација	Равенка	Блок дијаграм	Еквивалентен блок дијаграм
8	Поместување на собирач позади блок	$Y = G(X \pm Z)$		
9	Поместување на точка на разгранување пред блок	$Y = GX$		
10	Поместување на точка на разгранување позади блок	$Y = GX$		
11	Поместување на точка на разгранување пред собирач	$Y = X \pm Z$		
12	Поместување на точка на разгранување позади собирач	$Y = X \pm Z$		

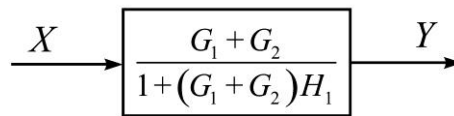
**Задача 7.7.** Со примена на теоремите за трансформација на блок дијаграмите (табела 7.1) да се определат преносните функции за секој од управувачките системи прикажани на слика 7.4 (задача 7.2).

**Решение:** (а). Со примена на трансформацијата 2 се добива:



Слика 7.18. Блок дијаграм - трансформација 2

Со примена на трансформацијата 2 се добива:

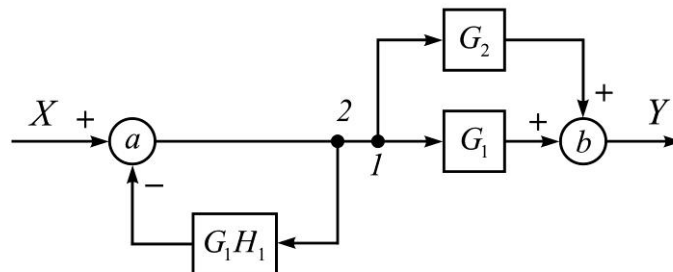


Слика 7.19. Блок дијаграм - трансформација 4

Според тоа, преносната функција на дадениот управувачки систем ќе биде:

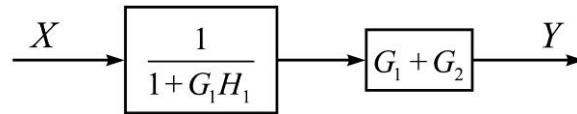
$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 + G_2}{1 + (G_1 + G_2) \cdot H_1} \quad (7.44)$$

(б). Со примена на трансформацијата 9 се добива:



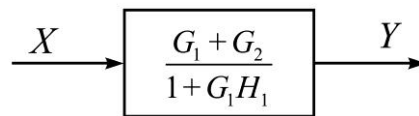
Слика 7.20. Блок дијаграм - трансформација 9

Со примена на трансформациите 2 и 4 се добива:



Слика 7.21. Блок дијаграм - трансформации 2 и 4

Со примена на трансформацијата 1, конечно се добива:

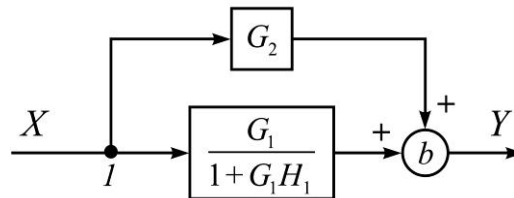


Слика 7.22. Блок дијаграм - трансформација 1

Преносната функција на дадениот управувачки систем, со блок дијаграм претставен на слика 7.4.б, ќе биде:

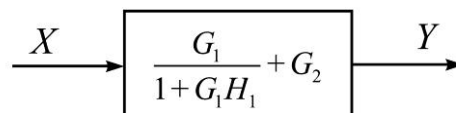
$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 \cdot H_1} \quad (7.45)$$

(в). Со примена на трансформацијата 4 се добива:



Слика 7.23. Блок дијаграм - трансформација 4

Со примена на трансформацијата 2 се добива:



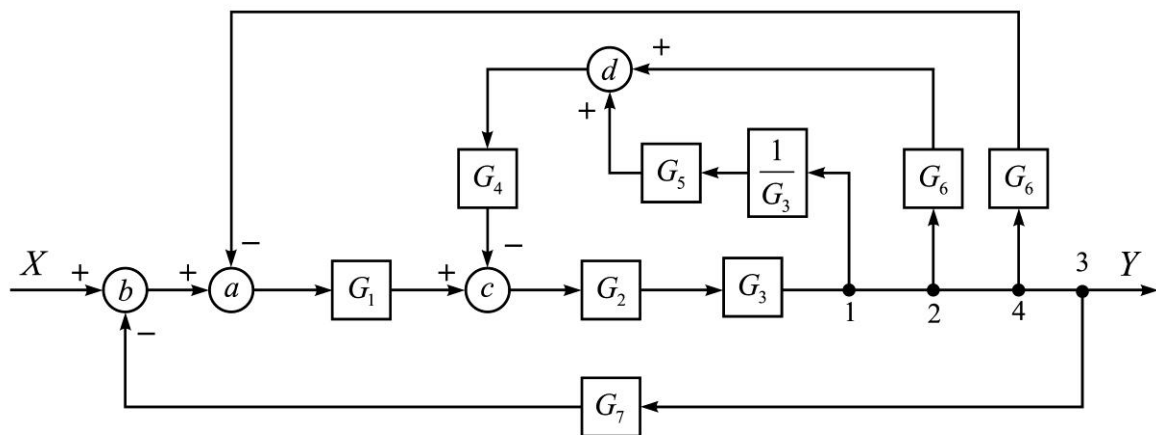
Слика 7.24. Блок дијаграм - трансформација 2

Со средување на изразот во блокот на слика 7.24 се добива преносната функција на управувачкиот систем даден со блок дијаграмот на слика 7.4.в:

$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 + G_2 + G_1 \cdot G_2 \cdot H_1}{1 + G_1 \cdot H_1} \quad (7.46)$$

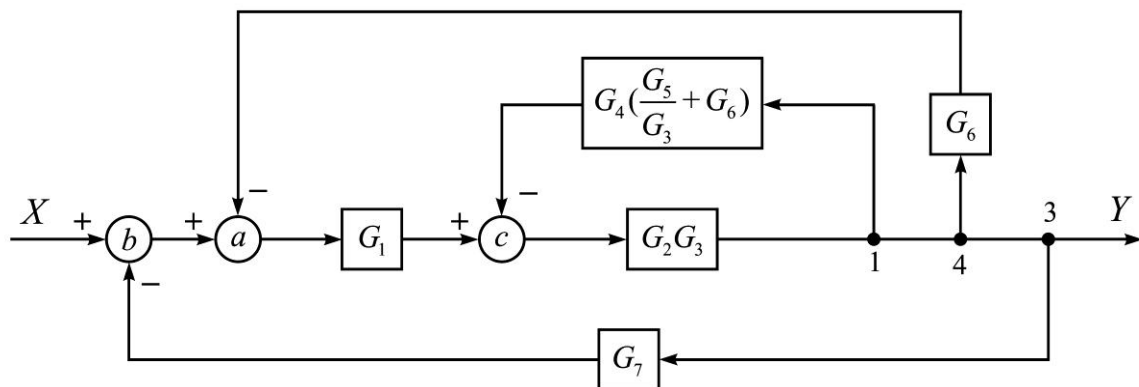
**Задача 7.8.** Да се определи преносната функција на управувачкиот систем даден преку неговиот блок дијаграм на слика 7.16 (задача 7.6), користејќи ги теоремите за трансформација на блок дијаграмите (табела 7.1).

**Решение:** Со примена на трансформациите 6, 9 и 10, се добива:



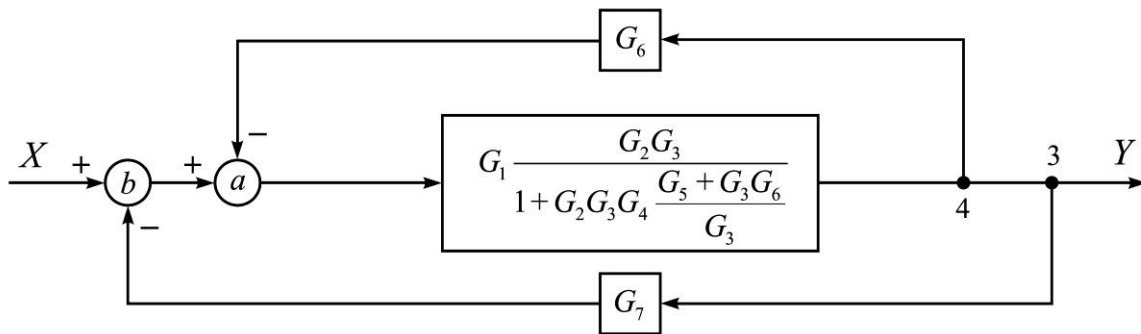
Слика 7.25. Блок дијаграм - трансформации 6, 9 и 10

Со примена на трансформациите 1 и 2 од табела 7.1, се добива:



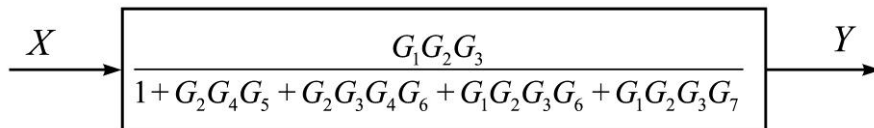
Слика 7.26. Блок дијаграм - трансформации 1 и 2

Со елиминација на локалната повратна омча  $c - 1$  ( трансформација 4), а потоа со здружување на блоковите со примена на трансформацијата 1, се добива:



Слика 7.27. Блок дијаграм - трансформации 1 и 4

Со елиминација на повратните врски (трансформација 4), редоследно: повратна врска  $a - 4$ , а потоа повратната врска  $b - 3$ , се добива:



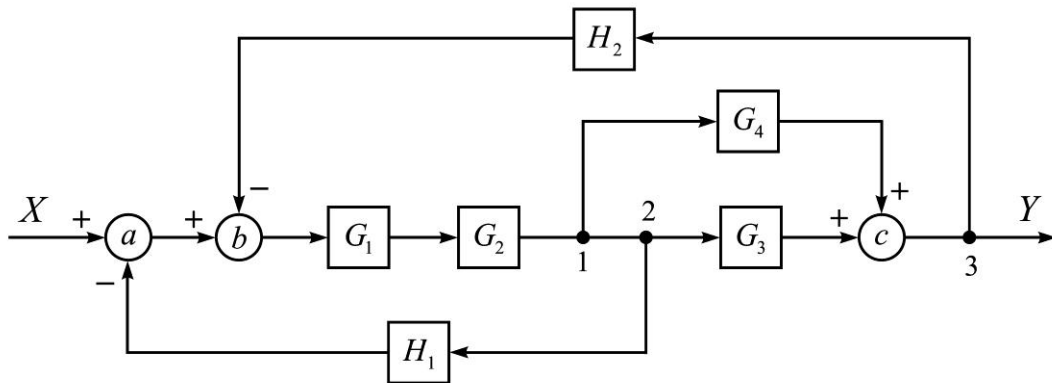
Слика 7.28. Блок дијаграм - трансформации 4

Според тоа, преносната функција на дадениот управувачкиот систем даден со блок дијаграмот на слика 7.16, ќе биде:

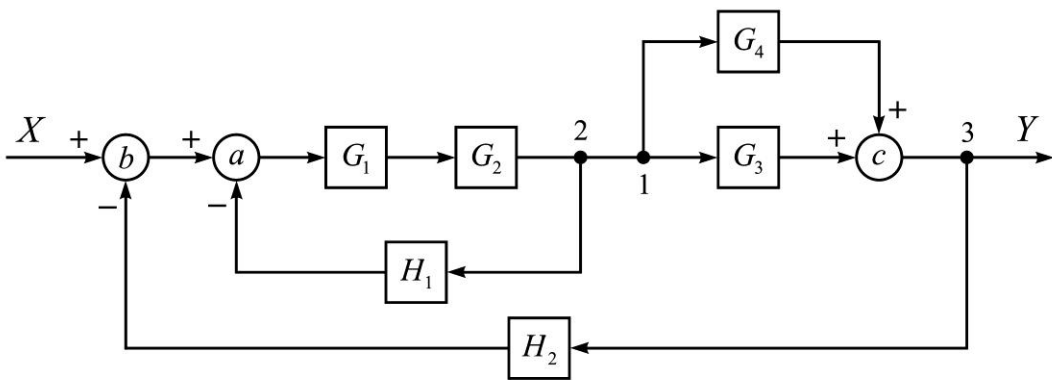
$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_4 G_5 + G_2 G_3 G_4 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_6 + G_1 G_2 G_3 G_7} \quad (7.47)$$

**Задача 7.9.** Еден управувачки систем е даден преку неговиот сложен блок дијаграм на (слика 7.29). Да се упрости блок дијаграмот на системот до каноничен облик.

**Решение:** Најпрво, за да може да се изведат некои елементарни трансформации врз овој блок дијаграм, истиот треба да се доведе во посоодветна форма, односно со примена само на трансформацијата 4 (замена на позицијата на собирачите  $a$  и  $b$ ) и со замена на местата на точките на разгранување 1 и 2, блок дијаграмот се доведува до форма како што е прикажано на слика 7.30.

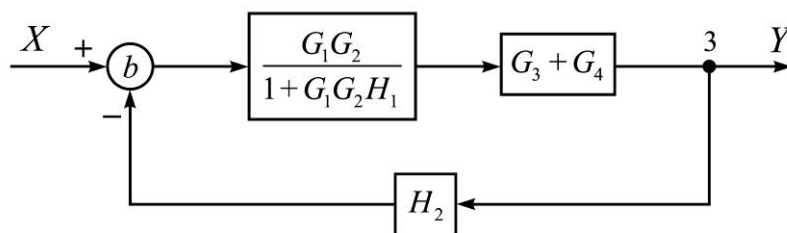


Слика 7.29. Блок дијаграм на управувачки систем



Слика 7.30. Блок дијаграм - трансформација 4

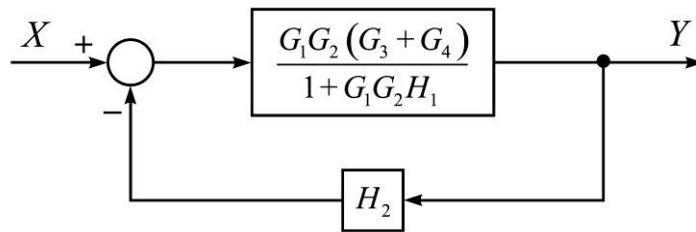
Со примена на трансформациите 1, 2 и 4, се добива:



Слика 7.31. Блок дијаграм - трансформации 1, 2 и 4

Со примена само на трансформацијата 1, од табела 7.1, за здружување на редна врска на блокови, се добива конечниот каноничен облик на управувачкиот систем, како што дадено на слика 7.32.

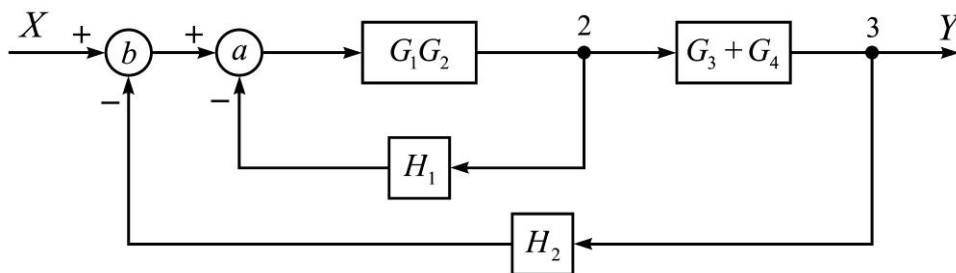




Слика 7.32. Каноничен облик на блок дијаграм

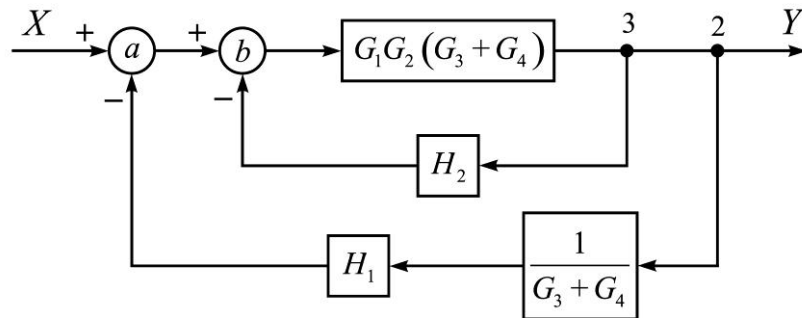
**Задача 7.10.** Да се упрости блок дијаграмот на управувачкиот систем даден преку неговиот сложен блок дијаграм на слика 7.29. (задача 7.9) до каноничен облик, но притоа, во повратната врска да биде изолиран блокот  $H_1$ .

**Решение:** Врз трансформираниот облик на блок дијаграмот даден на слика 7.30 ќе се применат само трансформациите 1 и 2, при што се добива:



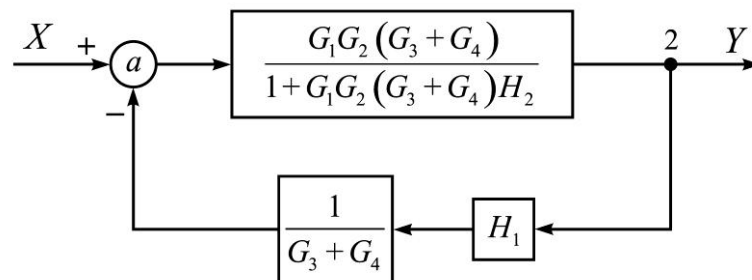
Слика 7.33. Блок дијаграм - трансформации 1 и 2

За да може да се добие бараниот каноничен облик на блок дијаграмот, потребно е собирачите  $a$  и  $b$  и, истовремено, точките на разгранување 2 и 3, да си ги заменат местата. За таа цел, најпрво се применува на трансформацијата 10, односно се поместува точката на разгранување 2 преку блокот  $(G_3 + G_4)$ , а потоа е можно споменатото реаранжирање на собирачите и точките на разгранување, при што се добива:



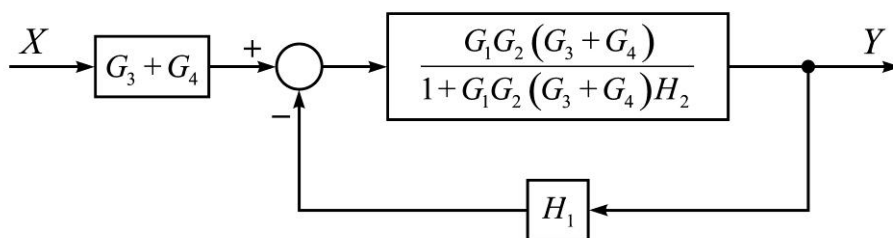
Слика 7.34. Блок дијаграм - трансформација 10 и реаранжирање

Со примена на трансформацијата 4 се добива:

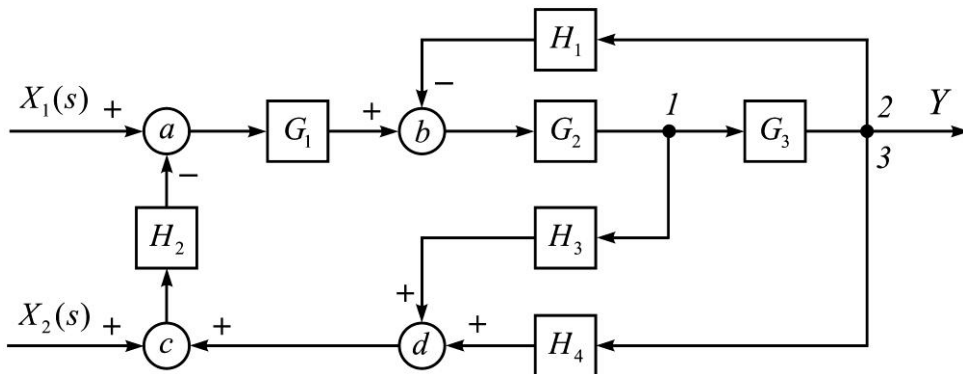


Слика 7.35. Блок дијаграм - трансформација 4

Конечно, со префрлување на блокот од повратната врска преку суматорот, односно со примена на трансформацијата 5, се добива бараниот каноничен облик на блок дијаграмот на дадениот управувачки систем:

Слика 7.36. Каноничен облик на блок дијаграм на системот со изолиран блок  $H_1$  во повратната врска

**Задача 7.11.** Линеарен управувачки систем со два влеза  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  е даден преку неговиот сложен блок дијаграм на (слика 7.37). Да се определи равенката на излезот на системот  $Y(s)$ , кога истовремено ќе бидат активни и двата влеза во системот.

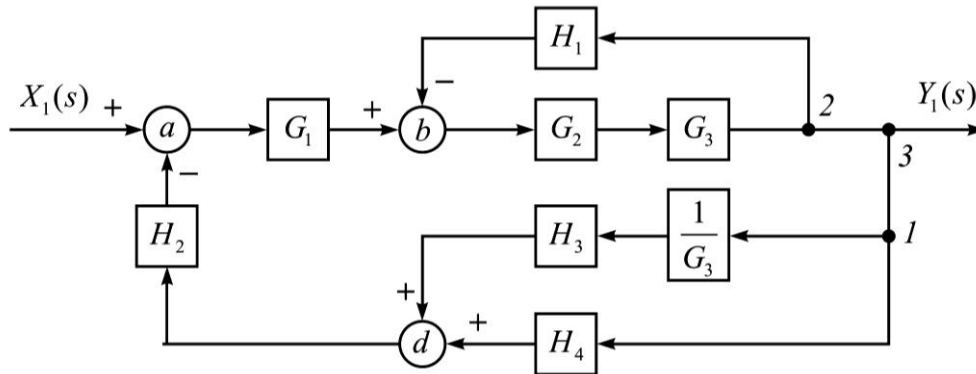


Слика 7.37. Блок дијаграм на управувачки систем со два влеза

**Решение:** Управувачкиот систем е линеарен, па според тоа, може да се примени принципот на суперпозиција, односно прво да се определи излезот  $Y_1(s)$ , кога е активен само влезот  $X_1(s)$  ( $X_1(s) \neq 0$ ;  $X_2(s) = 0$ ), а потоа се определува излезот  $Y_2(s)$ , кога е активен само влезот  $X_2(s)$  ( $X_1(s) = 0$ ;  $X_2(s) \neq 0$ ). Вкупниот одзив (излез) на системот, кога се активни истовремено и двата влеза  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  ќе преставува линеарна комбинација од претходно добиените поединечни одзиви, односно тој ќе се добие како нивни збир:

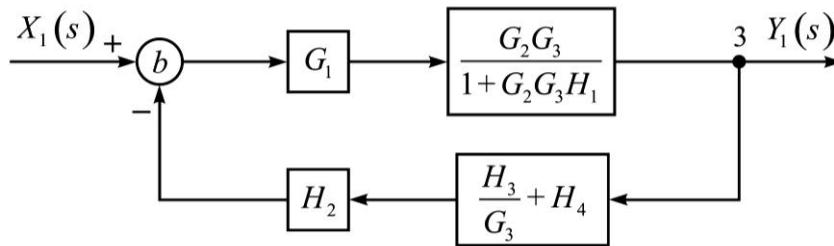
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \quad (7.48)$$

Согласно даденото објаснување, прво се анализира системот кога е активен само влезот  $X_1(s)$ , односно влезот  $X_2(s)$  комплетно се брише од блок дијаграмот и истовремено се применува трансформацијата 10. Со преуредување на точките на разгранување 1, 2 и 3, за да се добие најсоодветна форма за понатамошно трансформирање на блок дијаграмот, се добива:



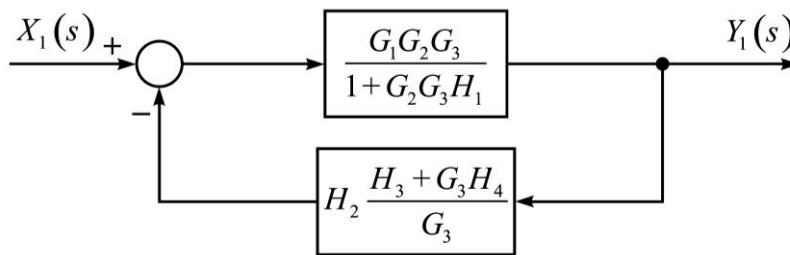
Слика 7.38. Блок дијаграм на управувачки систем кога е активен само влезот  $X_1$

Со примена на трансформациите 1, 2 и 4, што е јасно приметливо на добиениот облик на блок дијаграмот на слика 7.38, се добива:



Слика 7.39. Блок дијаграм - трансформации 1, 2 и 4

Со примена на трансформацијата 1 се добива каноничниот облик на блок дијаграмот за дадениот управувачки систем (слика 7.40):

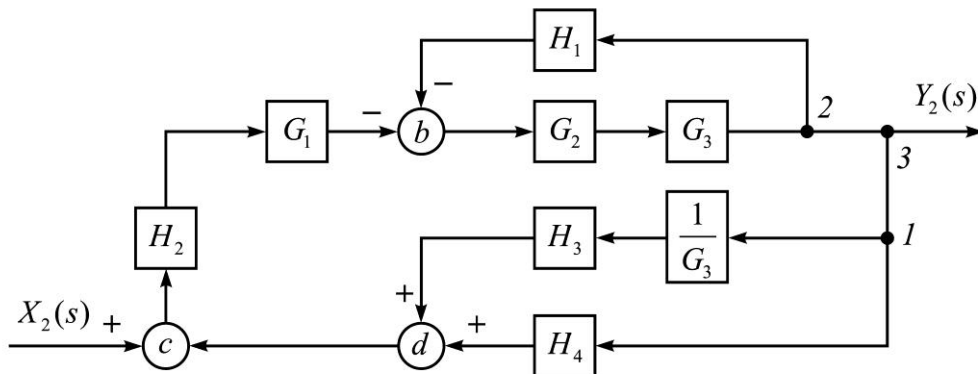


Слика 7.40. Каноничен облик на блок дијаграмот за влез  $X_1$

Од каноничниот облик на блок дијаграмот на управувачкиот систем, прикажан на слика 7.40, со примена на трансформацијата 4 и со дополнително средување на равенката, директно се добива преносната функција на системот  $P_1(s)$  во зависност само од влезот  $X_1(s)$ :

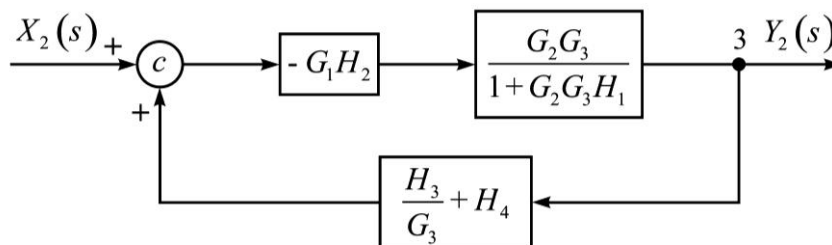
$$P_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2G_3H_1 + G_1G_2H_2H_3 + G_1G_2G_3H_2H_4} \quad (7.49)$$

Следи определување на преносната функција на системот кога е активен само влезот  $X_2(s)$  ( $X_1(s)=0$ ;  $X_2(s) \neq 0$ ). Влезот  $X_1(s)$  комплетно се брише од блок дијаграмот, кој што, исто така, се трансформира во состојба, како што беше презентирано на слика 7.38, при што се добива:



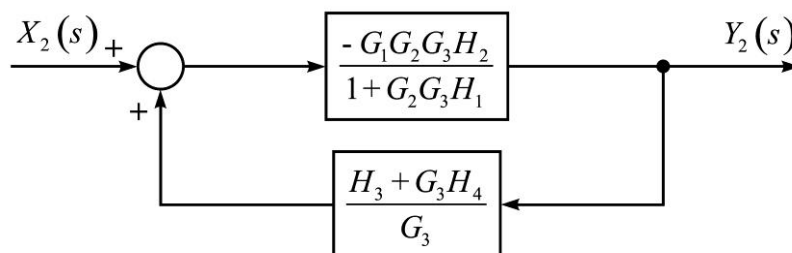
Слика 7.41. Блок дијаграм на управувачки систем кога е активен само влезот  $X_2$

Со примена на трансформациите 1, 2 и 4 се добива:



Слика 7.42. Блок дијаграм - трансформации 1, 2 и 4

Со примена на трансформацијата 1 се добива каноничниот облик на блок дијаграмот (слика 7.43) за дадениот управувачки систем за влез  $X_2(s)$ :



Слика 7.43. Каноничен облик на блок дијаграмот за влез  $X_2$

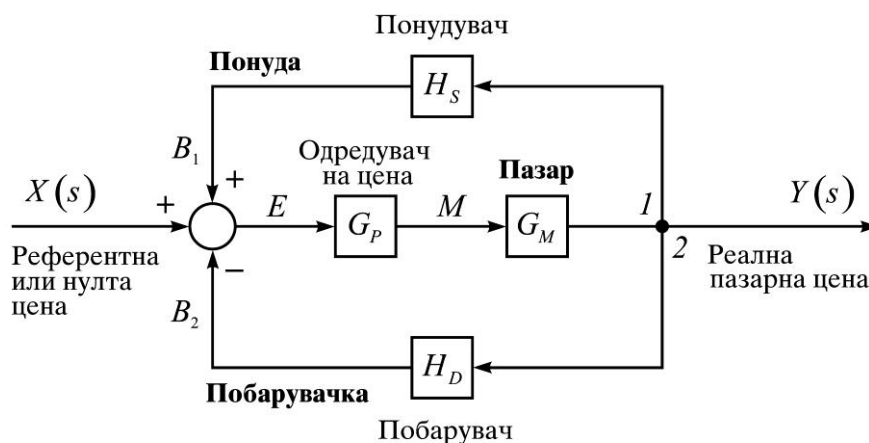
Од законичниот облик на блок дијаграмот на управувачкиот систем, едноставно се добива преносната функција на системот  $P_2(s)$  кога е активен само влезот  $X_2(s)$ , односно:

$$P_2(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = \frac{-G_1G_2G_3H_2}{1 + G_2G_3H_1 + G_1G_2H_2H_3 + G_1G_2G_3H_2H_4} \quad (7.50)$$

Излезот  $Y_1(s)$ , кога е активен само влезот  $X_1(s)$  се определува од равенката (7.49), а излезот  $Y_2(s)$ , кога е активен само влезот  $X_2(s)$ , се добива од равенката (7.50). Според тоа вкупниот одзив на системот, кога се активни симултано и двата влеза  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$ , според равенката (7.48), ќе биде:

$$Y(s) = \frac{G_1G_2G_3(X_1 - H_2X_2)}{1 + G_2G_3H_1 + G_1G_2H_2H_3 + G_1G_2G_3H_2H_4} \quad (7.51)$$

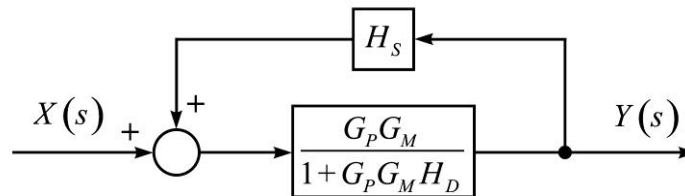
**Задача 7.12.** Да се определи преносната функција на економски систем за одржување на стабилна цена на производ на слободен пазар, ако истиот е претставен со својата линеарна апроксимација со блок дијаграмот даден на слика 7.44.



Слика 7.44. Блок дијаграм на економски закон на понуда и побарувачка

**Решение:** Во секој од блоковите од блок дијаграмот даден на слика 7.44 е внесена математичката презентација на соодветната активност во  $s$ -доменот

(Лапласовата трансформација). Со примена на трансформациите 1 и 6 и со раздвојување на точките на разгранување 1 и 2, а потоа со примена на трансформацијата 4 се добива:

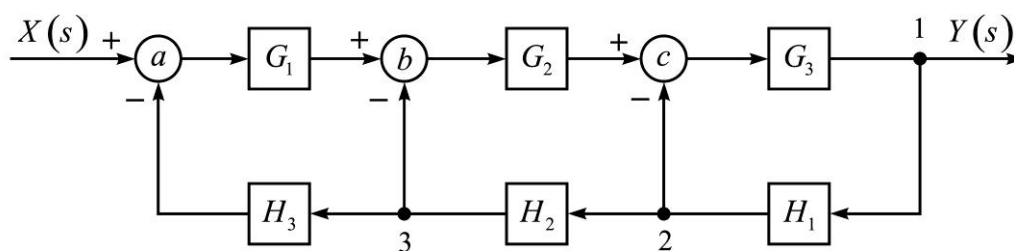


Слика 7.45. Блок дијаграм - трансформации 1, 6 и 4

Со повторна примена на трансформацијата 4 директно се добива преносната функција на линеаризираниот модел на економски систем за понуда и побарувачка и одржување на стабилна цена на производ, односно:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_P G_M}{1 + G_P G_M H_D - G_P G_M H_S} \quad (7.52)$$

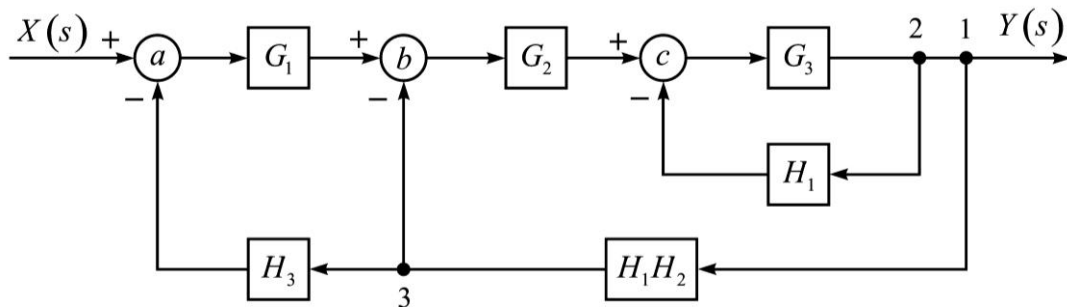
**Задача 7.13.** Да се определи преносната функција на управувачкиот систем даден со неговиот сложен блок дијаграм на слика 7.46.



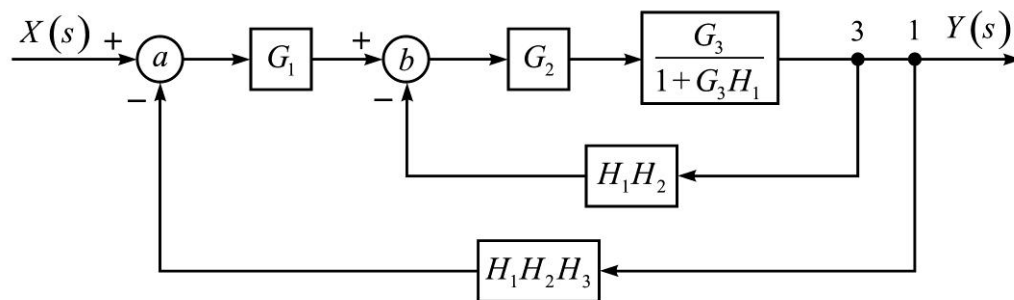
Слика 7.46. Блок дијаграм на управувачки систем

**Решение:** Со примена на елементарните трансформации дадени во табела 7.1, постепено се упрости сложен блок дијаграм до неговиот каноничен облик.

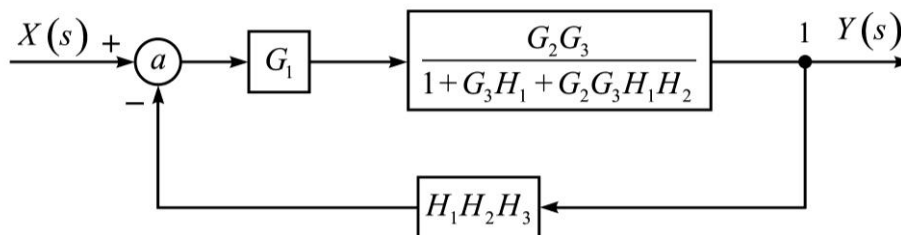
Со примена на трансформацијата 9 (јазол 2 пред  $H_1$ ) и со реаранжирање на јазлите 1 и 2 се добива:

Слика 7.47. Блок дијаграм - трансформација 9 (јазол 2 пред  $H_1$ )

Со примена на трансформација 4 и трансформација 9 (јазол 3 пред  $H_1H_2$ ) и со реаранжирање на јазлите 1 и 3 се добива:

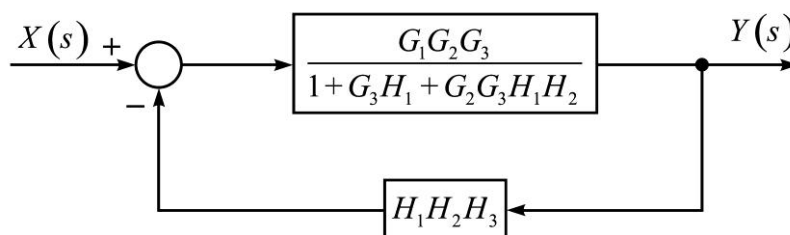
Слика 7.48. Блок дијаграм - трансформација 4 и 9 (јазол 3 пред  $H_1H_2$ )

Со примена на трансформациите 1 и 4 се добива:



Слика 7.49. Блок дијаграм - трансформации 1 и 4

Со примена на трансформацијата 1 се добива каноничниот облик на блок дијаграмот:



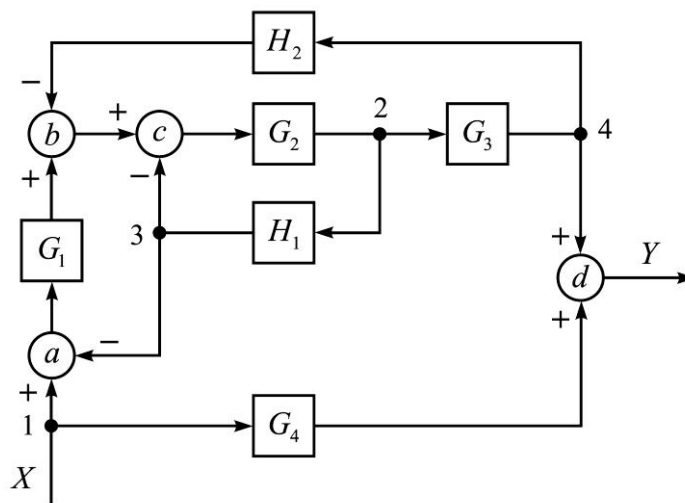
Слика 7.50. Каноничен облик на блок дијаграмот



Од законичниот облик на блок дијаграмот на управувачкиот систем (слика 7.50), едноставно се добива преносната функција на системот, односно:

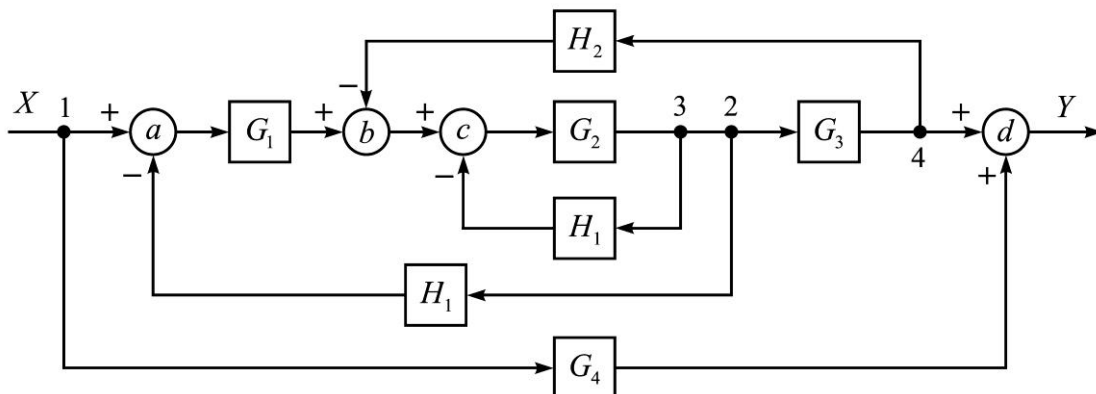
$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_3 H_1 + G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 H_3} \quad (7.53)$$

**Задача 7.14.** Да се определи преносната функција на управувачкиот систем даден со неговиот сложен блок дијаграм на слика 7.51.



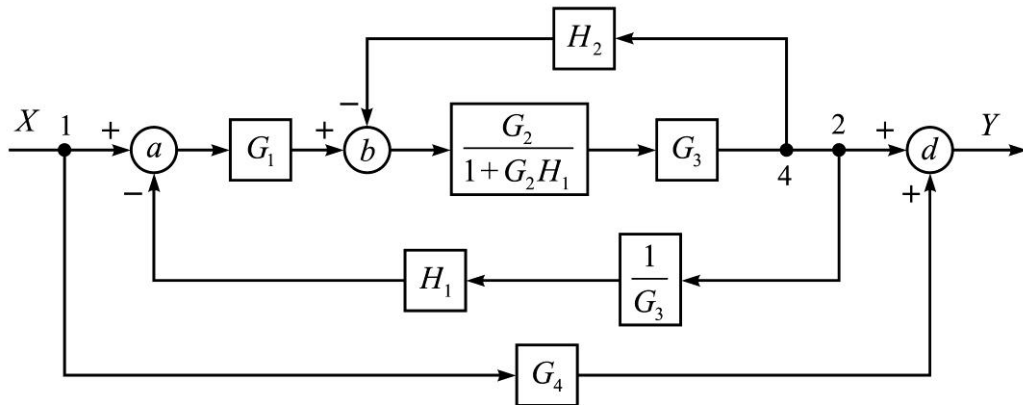
Слика 7.51. Блок дијаграм на управувачки систем

**Решение:** Со примена на трансформацијата 9 (јазол 3 пред  $H_1$ ) и со реаранжирање на јазлите 2 и 3 се добива:



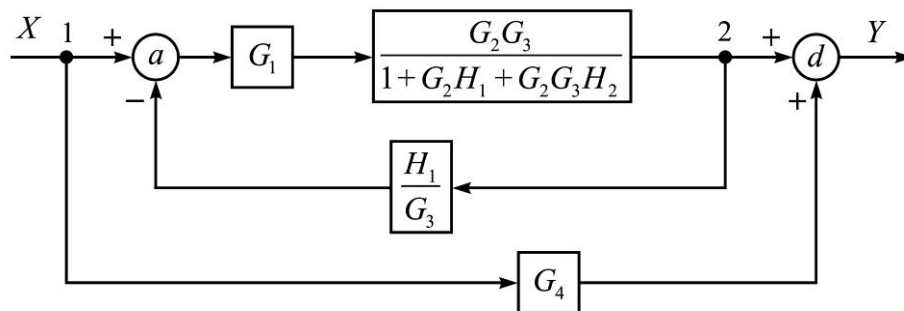
Слика 7.52. Блок дијаграм - трансформација 9 (јазол 3 пред  $H_1$ )

Со примена на трансформација 4 и трансформација 10 (јазол 2 зад блок  $G_3$ ) и со реаранжирање на јазлите 2 и 4 се добива:



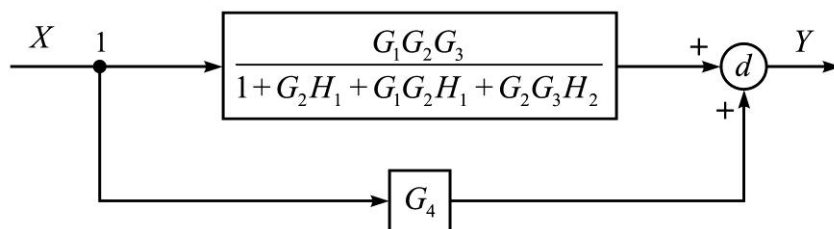
Слика 7.53. Блок дијаграм - трансформација 4 и 10 (јазол 2 зад блок  $G_3$ )

Со примена на трансформациите 1 и 4 се добива:



Слика 7.54. Блок дијаграм - трансформации 1 и 4

Со примена на трансформациите 1 и 4 се добива:



Слика 7.55. Блок дијаграм - трансформации 1 и 4

Конечно со примена на трансформацијата 2 се добива:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2} + G_4 \quad (7.54)$$

Според тоа, преносната функција на системот ќе биде:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_4 + G_2 G_4 H_1 + G_1 G_2 G_4 H_1 + G_2 G_3 G_4 H_2}{1 + G_2 H_1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2} \quad (7.55)$$

## 7.4. Графови за текот на сигналите

Најмногу употребуван начин на графичко презентирање на управувачките системи е со помош на блок дијаграмите, но постои и друг начин, а тоа е преку графови за тек на сигналите.

Граф за тек на сигналите е графичко претставување на системот од равенки со коишто е опишан системот. Тој по графички пат ја презентира трансмисијата на сигналите низ системот, како што тоа го чини и блок дијаграмот.

### 7.4.1. Основи на графовите за тек на сигналите

Ако се анализира едноставната равенка:

$$Y_i = A_i \cdot X_i \quad (7.56)$$

Во најопшт случај, променливите  $X_i$  и  $Y_i$  може да бидат функции од времето, комплексни променливи или од друга големина. од аспект на графовите за тек на сигналите  $A_i$  е математички оператор кој што го пресликува сигналот  $X_i$  во сигналот  $Y_i$  и е наречен - трансмисиона функција.

Графот за тек на сигналите за равенката (7.56) ќе биде:



Слика 7.56. Граф за тек на сигналите

Ова е најпрост облик на граф за тек на сигналите. Треба да се забележи дека променливите  $X_i$  и  $Y_i$  (слика 7.56) се претставени со точка, наречена јазол, а трансмисионата функција  $A_i$  е претставена со насочена линија, наречена гранка. Гранките се секогаш еднонасочени.

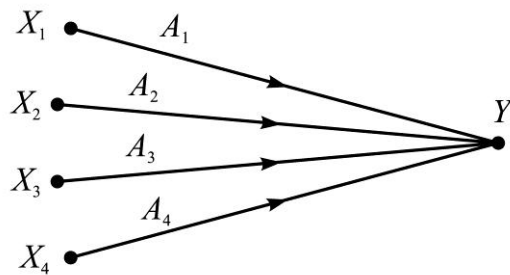
Во продолжение ќе бидат дадени основните правила од алгебрата на графовите за тек на сигналите.

### 1. Правило за собирање

Вредноста на променливата означена со еден јазол е еднаква на збирот од сите сигнали кои влегуваат во тој јазол. Со други зборови, равенката:

$$Y = \sum_{i=1}^4 A_i \cdot X_i \quad (7.57)$$

може да се претстави со графот даден на слика 7.57.

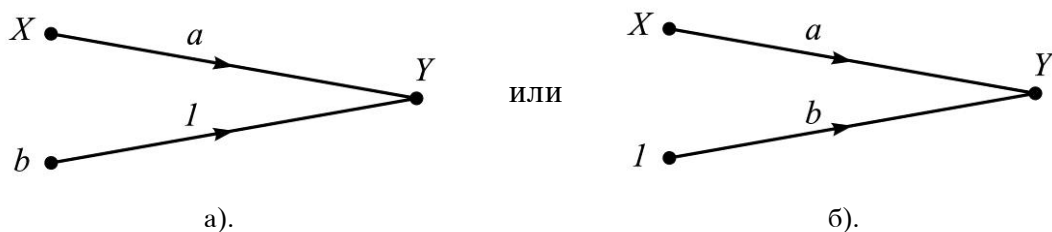


Слика 7.57. Граф за собирање на сигнали

*Пример 7.1.* Графот за тек на сигналите за равенката на права во Декартовиот координатен систем:

$$Y = a \cdot X + b \quad (7.58)$$

е прикажан на слика 7.58.



Слика 7.58. Граф за тек на сигнали за равенка на права

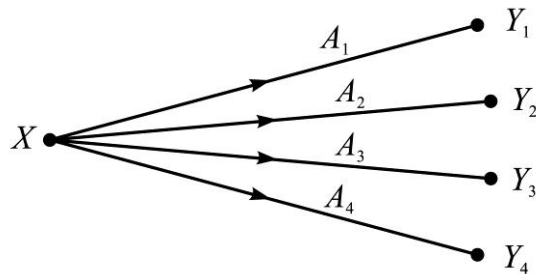
Овде треба да се напомене дека  $b$  е пресекот на правата со  $Y$ -оската и претставува константа и може да биде претставена како јазол (слика 7.58.а) или како трансмисиона функција (слика 7.58.б).

## 2. Правило за трансмисија

Вредноста на променливата означена со еден јазол се трансмитира на секоја гранка која што го напушта тој јазол. Со други зборови, системот равенки:

$$Y_i = A_i \cdot X; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (7.59)$$

може да се претстави со графот даден на слика 7.59.

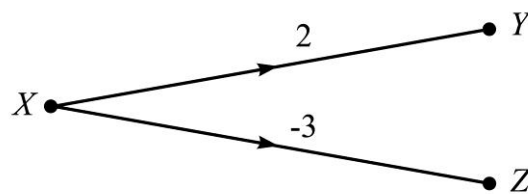


Слика 7.59. Граф за трансмисија на сигнали

*Пример 7.2.* Графот за тек на сигналите за системот равенки:

$$\begin{aligned} Y &= 2 \cdot X \\ Z &= -3 \cdot X \end{aligned} \quad (7.60)$$

е прикажан на слика 7.60.



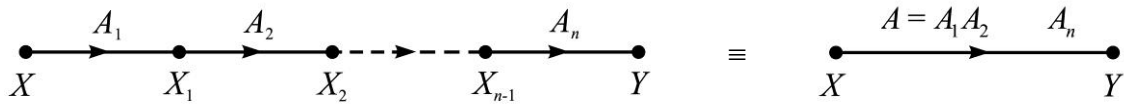
Слика 7.60. Граф за тек на сигнали

## 3. Правило за множење

Сериски поврзани  $n$ -гранки со трансмисиони функции  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , може да бидат заменети со една гранка, која што ќе има трансмисиона функција еднаква на производот на сите поединечни трансмисиони функции, односно:

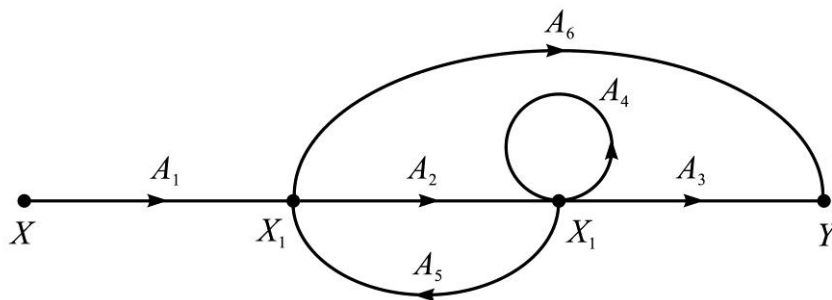
$$Y = A \cdot X = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot X \quad (7.61)$$

или графички претставено преку граф за тек на сигналите е дадено на слика 7.61.



Слика 7.61. Сериска врска на графови за тек на сигнали

Термините кои што се во вообичаена употреба во теоријата на графовите за тек на сигналите ќе бидат објаснети на еден произволно даден граф за тек на сигналите претставен на слика 7.62.



Слика 7.62. Граф за тек на сигнали

*Патека* е континуиран, еднонасочен редослед на гранки по чија должина ниту еден јазол не е минат повеќе од еднаш. На пример:

$$\text{Патека 1: } X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow Y$$

$$\text{Патека 2: } X \rightarrow X_1 \rightarrow Y$$

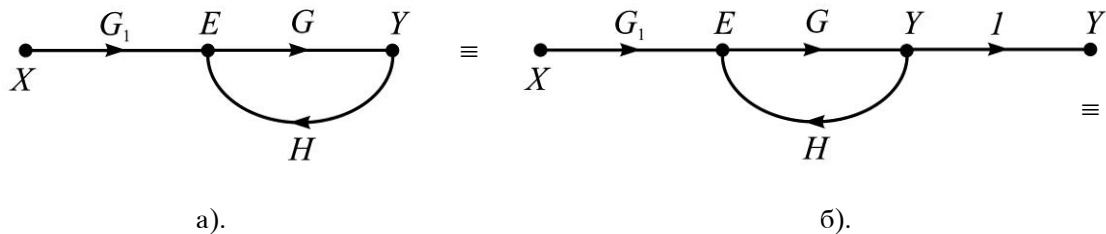
$$\text{Патека 3: } X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$$

*Влезен јазол* или *извор* е јазол кој има само гранки кои што го напуштаат. На пример,  $X$  е влезен јазол.

*Излезен јазол* или *донор* е јазол кој има само гранки кои што на него пристигнуваат. На пример,  $Y$  е излезен јазол.

Често пати, некоја променлива во даден систем е функција од излезната променлива. На пример, каноничен облик на систем со повратна врска (слика 7.63.а). Во овој случај во излезниот јазол има гранка која што пристигнува и

гранка која што го напушта. За да се надмине овој проблем се воведува дополнителен "вештачки" јазол (слика 7.63.б).



Слика 7.63. Воведување на "вештачки" јазол

*Директна патека* е патека од влезниот кон излезниот јазол. На пример:

$$\text{Директна патека 1: } X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow Y$$

$$\text{Директна патека 2: } X \rightarrow X_1 \rightarrow Y$$

*Повратна патека* или *повратна омча* е патека која поаѓа и завршува во ист јазол. На пример:  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$

*Сојсџивена омча* е повратна омча само од една гранка. На пример:  $X_2 \rightarrow X_2$  со трансмисиона функција  $A_4$ .

*Засилување на гранка* е трансмисиона функција на таа гранка кога трансмисионата функција е оператор на множење. Во сите понатамошни примери трансмисионата функција ќе биде константа или преносна функција, па понатаму исклучиво ќе се користи поимот засилување на гранка.

*Засилување на патека* е производот на засилувањата на гранките од кои се состои дадената патека. На пример:

$$\text{Засилување на директна патека 1: } A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$$

$$\text{Засилување на директна патека 2: } A_1 \cdot A_6$$

Засилување на омча е производ на засилувањата на гранките од кои што е сочинета омчата. На пример, засилување на повратната омча  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$  ќе биде  $A_2 \cdot A_5$ .

### 7.4.2. Определување на преносна функција на сложен блок дијаграм

Графовите за тек на сигналите многу често се користат и за определување на преносната функција на еден сложен блок дијаграм. За да може еден блок дијаграм да се претстави со граф за тек на сигналите потребно е да се имаат предвид следните правила:

#### 1. Претставување на блок

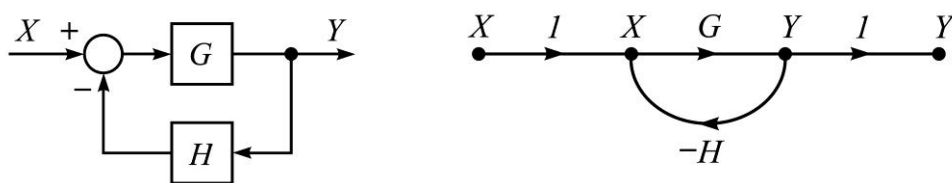
Било кој блок од блок дијаграмот се претставува во графот за тек на сигналите со една гранка со засилување еднакво на преносната функција на блокот, како што е прикажано на слика 7.64.



Слика 7.64. Претставување на блок во граф за тек на сигнали

#### 2. Претставување на влез и излез во еден блок дијаграм

Влезовите и излезите на еден блок дијаграм во графовите ќе бидат претставени секогаш со "вештачки" јазли, како што е прикажано на примерот за каноничен облик на систем со повратна врска на слика 7.65.



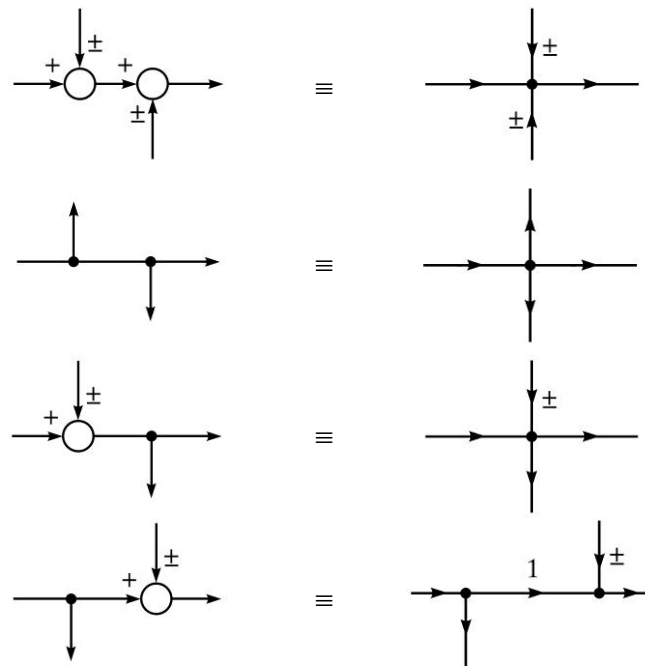
Слика 7.65. Граф за тек на сигналите за каноничен облик на систем

#### 3. Претставување на собирач и точка на разгранување

Собирач и точка на разгранување во граф за тек на сигналите се претставува со јазол, како што е прикажано на слика 7.65.

Кога има комбинација од два собирачи, две точки на разгранување или собирач и точка на разгранување важат следните правила за составување на граф за тек на сигналите (слика 7.66).





Слика 7.66. Комбинации на собирач и точка на разгранување

Со претходно презентираниите правила секој сложен блок дијаграм може едноставно да се претстави со граф за тек на сигналите.

Кога ќе се состави графот за тек на сигналите преносната функција на системот ќе се определи според општата формула:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{\sum_i P_i \cdot \Delta_i}{\Delta} \quad (7.62)$$

Каде што се:

$P_i$  - Засилувањето на  $i$ -тата директна патека.

$\Delta$  - Детерминантата на графот за тек на сигналите или карактеристична функција. Ако се напише  $\Delta = 0$  се добива карактеристичната равенка на системот.

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_i P_{ik} = 1 - \sum_1 P_{i1} + \sum_2 P_{i2} - \sum_3 P_{i3} + \dots \quad (7.63)$$

$\sum_1 P_{i1}$  - Збир на сите засилувања на повратни омчи.

$\sum_2 P_{i2}$  - Збир на сите производи помеѓу засилувањата на две повратни омчи кои што не се допират.

Две повратни омчи не се допираат доколку немаат заеднички јазол.

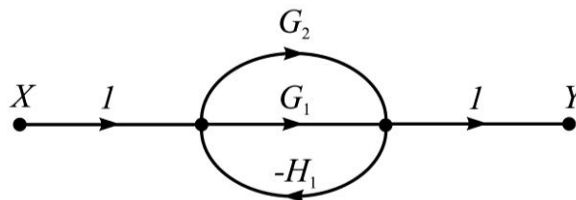
$\sum_3 P_{i3}$  - Збир на сите производи помеѓу засилувањата на три повратни омчи кои што не се допират и т. н.

$\Delta_i$  - Детерминанта на  $i$ -тата директна патека  $P_i$  и таа се добива од детерминантата на графот  $\Delta$  кога ќе се елиминираат сите повратни омчи кои што ја допираат  $i$ -тата директна патека  $P_i$ .

Примената на равенката (7.62) е значително подиректно и поедноставно отколку што тоа се чини. Следните задачи се илустрација на ова тврдење.

**Задача 7.15.** Со примена на графовите за тек на сигналите да се определат преносните функции за секој од управувачките системи прикажани на слика 7.4 (задача 7.2).

**Решение:** (а). Графот за тек на сигналите за системот прикажан на слика 7.4.a. е прикажан на наредната слика 7.67:



Слика 7.67. Граф за тек на сигналите за управувачкиот систем (7.4.a)

Постојат две директни патеки, чии што засилувања се:

$$P_1 = G_1 \quad \text{и} \quad P_2 = G_2 \quad (7.64)$$

Постојат и две повратни омчи со засилувања:

$$P_{11} = -G_1 \cdot H_1 \quad \text{и} \quad P_{21} = -G_2 \cdot H_1 \quad (7.65)$$

Во графот за тек на сигналите даден на слика 7.67 не постојат повратни омчи кои што не се допираат, па, според тоа детерминантата на системот ќе биде:

$$\Delta = 1 - P_{11} - P_{21} = 1 + G_1 \cdot H_1 + G_2 \cdot H_1 \quad (7.66)$$

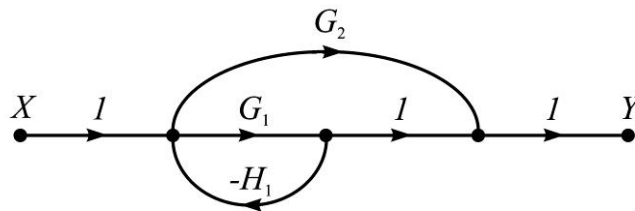
Бидејќи двете повратни омчи ги допираат и двете директни патеки, детерминантите на двете директни патеки ќе бидат:

$$\Delta_1 = 1 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = 1 \quad (7.67)$$

Со замена на добиените вредности во изразите (7.64), (7.66) и (7.67) во равенката (7.62) се добива:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 \cdot H_1 + G_2 \cdot H_1} \quad (7.68)$$

**(б).** Графот за тек на сигналите за системот прикажан на слика 7.4.б. е прикажан на наредната слика 7.68:



Слика 7.68. Граф за тек на сигналите за управувачкиот систем (7.4.б)

Постојат две директни патеки, чии што засилувања се:

$$P_1 = G_1 \quad \text{и} \quad P_2 = G_2 \quad (7.69)$$

Има само една повратна омча со засилување:

$$P_{11} = -G_1 \cdot H_1 \quad (7.70)$$

Детерминантата на системот ќе биде:

$$\Delta = 1 - P_{11} = 1 + G_1 \cdot H_1 \quad (7.71)$$

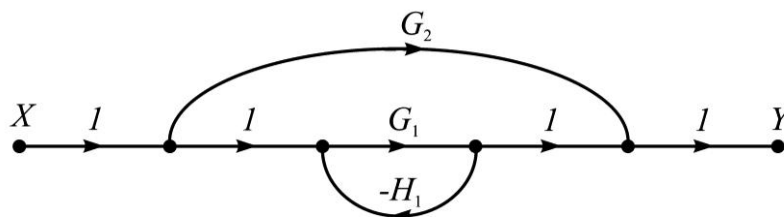
Повратната омча се допира и со двете директни патеки од каде што следи дека детерминантите на двете директни патеки ќе бидат:

$$\Delta_1 = 1 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = 1 \quad (7.72)$$

Со замена на добиените вредности во изразите (7.69), (7.71) и (7.72) во равенката (7.62) се добива:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 + G_2}{1 + G_1 \cdot H_1} \quad (7.73)$$

**(в).** Графот за тек на сигналите за системот прикажан на слика 7.4.в. е прикажан на слика 7.69:



Слика 7.69. Граф за тек на сигналите за управувачкиот систем (7.4.6)

Постојат две директни патеки, чии што засилувања се:

$$P_1 = G_1 \quad \text{и} \quad P_2 = G_2 \quad (7.74)$$

Има само една повратна омча со засилување:

$$P_{11} = -G_1 \cdot H_1 \quad (7.75)$$

Детерминантата на системот ќе биде:

$$\Delta = 1 - P_{11} = 1 + G_1 \cdot H_1 \quad (7.76)$$

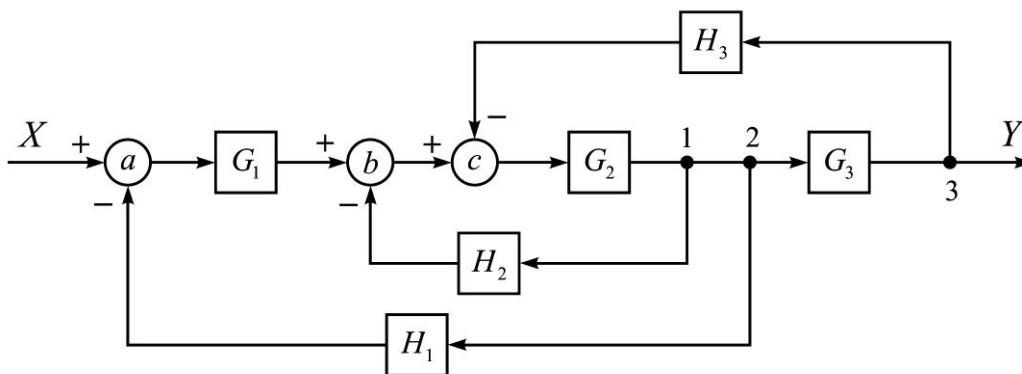
Бидејќи повратната омча не ја допира само директната патека  $P_2$  се добива:

$$\Delta_1 = 1 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = 1 + G_1 \cdot H_1 \quad (7.77)$$

Со замена на добиените вредности во изразите (7.74), (7.76) и (7.77) во равенката (7.62) се добива:

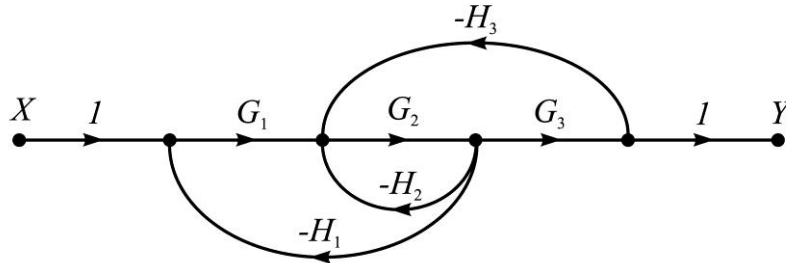
$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 + G_2(1 + G_1 \cdot H_1)}{1 + G_1 \cdot H_1} = \frac{G_1 + G_2 + G_1 \cdot G_2 \cdot H_1}{1 + G_1 \cdot H_1} \quad (7.78)$$

**Задача 7.16.** Со примена на графовите за тек на сигналите да се определи преносната функција на управувачкиот систем даден со неговиот сложен блок дијаграм на слика 7.70.



Слика 7.70. Блок дијаграм на управувачки систем

**Решение:** Графот за тек на сигналите за системот прикажан на слика 7.71.



Слика 7.71. Граф за тек на сигналите

Постои една директна патека, чие што засилување е:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 \quad (7.79)$$

Постојат три повратни омчи со засилувања:

$$P_{11} = -G_1 G_2 H_1, \quad P_{21} = -G_2 H_2, \quad P_{31} = -G_2 G_3 H_3 \quad (7.80)$$

Не постојат омчи кои што не се допираат, па според тоа, детерминантата на системот ќе биде:

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 \quad (7.81)$$

Сите повратнати омчи ја допираат директната патека од каде што следи:

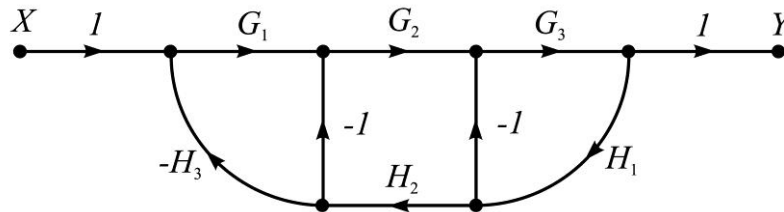
$$\Delta_1 = 1 \quad (7.82)$$

Со замена на добиените вредности во изразите (7.79), (7.81) и (7.82) во равенката (7.62) се добива:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{P_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3} \quad (7.83)$$

**Задача 7.17.** Со примена на графовите за тек на сигналите да се определи преносната функција на управувачкиот систем даден со неговиот сложен блок дијаграм на слика 7.46 (задача 7.13).

**Решение:** Графот за тек на сигналите за дадениот управувачки систем, со примена на основните правила за негово исцртување, е прикажан на слика 7.72.



Слика 7.71. Граф за тек на сигналите

Од графот за тек на сигналите лесно може да се пресметаат потребните големини:

1. *Директни ѓајџеки*: постои една директна патека со засилување:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 \quad (7.84)$$

2. *Повратни омчи*: постојат три повратни омчи со засилувања:

$$P_{11} = -G_3 H_1, \quad P_{21} = -G_2 G_3 H_1 H_2, \quad P_{31} = -G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 H_3 \quad (7.85)$$

3. *Детерминанти на системот*: не постојат омчи кои што не се допираат, па според тоа, детерминантата на системот ќе биде:

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) = 1 + G_3 H_1 + G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 H_3 \quad (7.86)$$

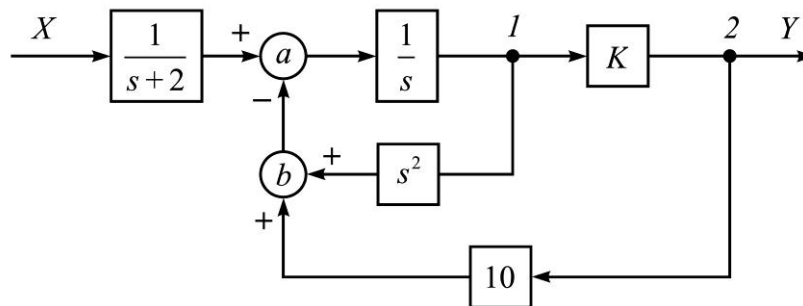
4. *Детерминанти на директните ѓајџеки*: сите повратни омчи ја допираат директната патека од каде што следи:

$$\Delta_1 = 1 \quad (7.87)$$

5. *Преносна функција*: со замена на добиените вредности во изразите (7.84), (7.86) и (7.87) во равенката (7.62) се добива:

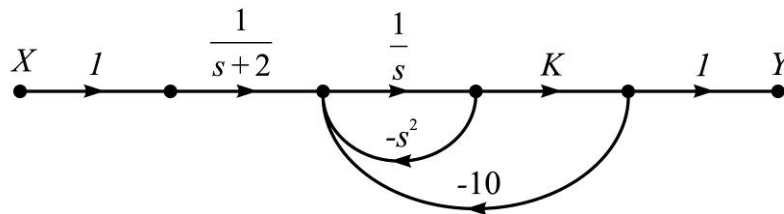
$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{P_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_3 H_1 + G_2 G_3 H_1 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 H_3} \quad (7.88)$$

**Задача 7.18.** Со примена на графовите за тек на сигналите да се определи преносната функција на управувачкиот систем даден со неговиот блок дијаграм на слика 7.73 во кој што  $K = const$ .



Слика 7.73. Блок дијаграм на управувачки систем

**Решение:** Графот за тек на сигналите за системот ќе биде:



Слика 7.74. Граф за тек на сигналите

1. Засилувањето на единствената директна патека ќе биде:

$$P_1 = \left( \frac{1}{s+2} \right) \cdot \left( \frac{1}{s} \right) \cdot K = \frac{K}{s(s+2)} \quad (7.89)$$

2. Засилувањата на двете повратни омчи се:

$$P_{11} = \left( \frac{1}{s} \right) \cdot (-s^2) = -s, \quad P_{21} = \left( \frac{1}{s} \right) \cdot K \cdot (-10) = \frac{-10K}{s}, \quad (7.90)$$

3. Не постојат омчи кои што не се допираат, па според тоа, детерминантата на системот ќе биде:

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21}) = 1 - (-s) - \left( \frac{-10K}{s} \right) = \frac{s^2 + s + 10K}{s} \quad (7.91)$$

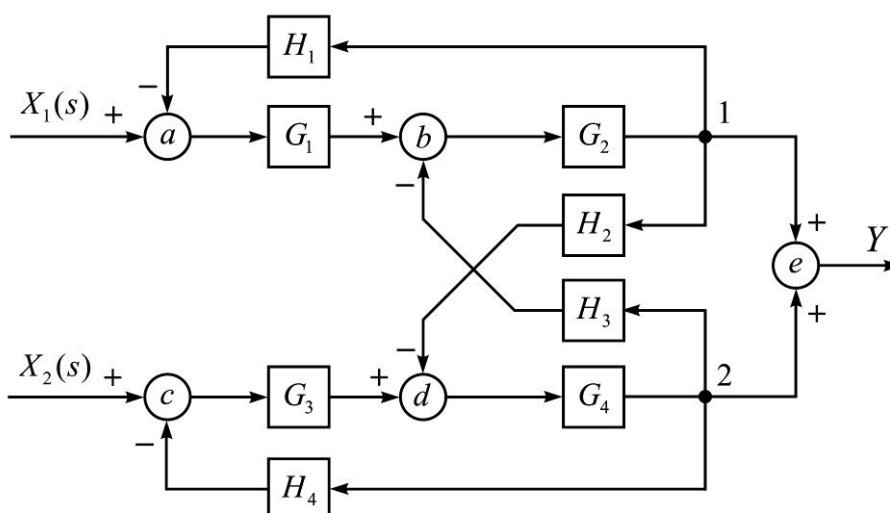
4. И двете повратни омчи ја допираат директната патека од каде што следи дека засилувањето на детерминантата на директната патека е:

$$\Delta_1 = 1 \quad (7.92)$$

5. Според тоа, преносната функција за овој систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{P_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{K}{s(s+2)} \cdot 1}{\frac{s^2 + s + 10K}{s}} = \frac{K}{(s+2)(s^2 + s + 10K)} \quad (7.93)$$

**Задача 7.19.** Даден е линеарен управувачки систем со два влеза  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  преку неговиот сложен блок дијаграм (слика 7.75). Да се определи равенката на излезот на системот  $Y(s)$ , кога истовремено ќе бидат активни и двата влеза во системот.



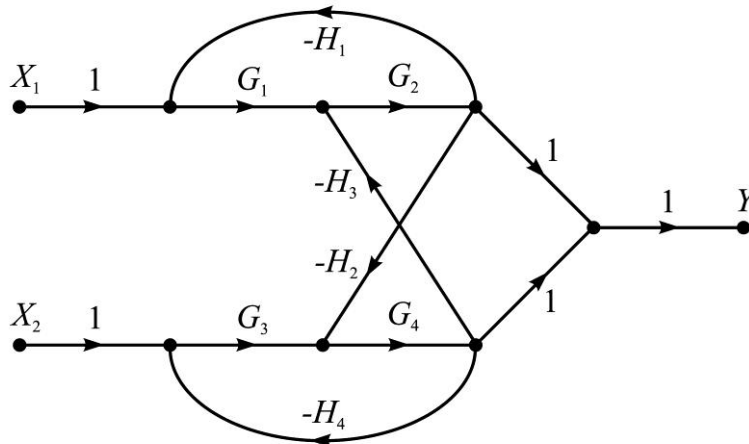
Слика 7.75. Блок дијаграм на управувачки систем со два влеза

**Решение:** Со примена на принципот на суперпозиција, прво се определува излезот  $Y_1(s)$ , кога е активен само влезот  $X_1(s)$ , а потоа се определува излезот  $Y_2(s)$ , кога е активен само влезот  $X_2(s)$ . Вкупниот одзив (излез) на системот, кога се активни истовремено и двата влеза  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  ќе претставува збир од претходно добиените поединечни одзиви, односно:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \quad (7.94)$$

Графот за тек на сигналите за дадениот блок дијаграм е прикажан на слика 7.76.





Слика 7.76. Граф за тек на сигналите за систем со два влеза

Согласно даденото објаснување, прво се анализира системот кога е активен само влезот  $X_1(s)$ , односно влезот  $X_2(s)$  комплетно се занемарува, како да не постои ( $X_1(s) \neq 0$ ;  $X_2(s) = 0$ ).

1.1. Во графот за тек на сигналите постојат две директни патеки и нивното засилување ќе биде:

$$P_1 = 1 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot 1 \cdot 1 = G_1 G_2 \quad (7.95)$$

$$P_2 = 1 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot (-H_2) \cdot G_4 \cdot 1 \cdot 1 = -G_1 G_2 G_4 H_2 \quad (7.96)$$

1.2. Постојат три повратни омчи, чии што засилувања ќе бидат:

$$P_{11} = G_1 \cdot G_2 \cdot (-H_1) = -G_1 G_2 H_1 \quad (7.97)$$

$$P_{21} = G_4 \cdot (-H_4) \cdot G_3 = -G_3 G_4 H_4 \quad (7.98)$$

$$P_{31} = G_2 \cdot (-H_2) \cdot G_4 \cdot (-H_3) = G_2 G_4 H_2 H_3 \quad (7.99)$$

1.3. Во овој граф за тек на сигналите постојат две омчи кои што не се допираат и нивното засилување ќе биде:

$$P_{12} = P_{11} \cdot P_{21} = G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_4 \quad (7.100)$$

Па, според тоа, детерминантата на системот ќе биде:

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) + P_{12}$$

$$\Delta = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_4 - G_2 G_4 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_4 \quad (7.101)$$

1.4. Засилувањата на детерминантите на директните патеки се:

$$\Delta_1 = 1 + G_3 G_4 H_4 \quad (7.102)$$

$$\Delta_2 = 1 \quad (7.103)$$

1.5. Според тоа, преносната функција за овој систем кога е активен само влезот  $X_1(s)$  ќе биде:

$$P_1(s) = \frac{Y_1}{X_1}(s) = \frac{P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 (1 + G_3 G_4 H_4) - G_1 G_2 G_4 H_2}{\Delta}$$

$$\frac{Y_1}{X_1}(s) = \frac{G_1 G_2 (1 - G_4 H_2 + G_3 G_4 H_4)}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_4 - G_2 G_4 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_4} \quad (7.104)$$

Од равенката (7.104) се определува излезот  $Y_1(s)$  кога е активен само влезот  $X_1(s)$ , односно:

$$Y_1(s) = \frac{G_1 G_2 (1 - G_4 H_2 + G_3 G_4 H_4) X_1(s)}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_4 - G_2 G_4 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_4} \quad (7.105)$$

Аналогно на претходното, се повторува истата постапка кога е активен само влезот  $X_2(s)$ , односно, сега, влезот  $X_1(s)$  комплетно се занемарува, како да не постои ( $X_1(s) = 0$ ;  $X_2(s) \neq 0$ ).

2.1. И во овој случај, во графот за тек на сигналите постојат две директни патеки и нивното засилување ќе биде:

$$P_1 = 1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot 1 \cdot 1 = G_3 G_4 \quad (7.106)$$

$$P_2 = 1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot (-H_3) \cdot G_2 \cdot 1 \cdot 1 = -G_2 G_3 G_4 H_3 \quad (7.107)$$

2.2. Постојат три повратни омчи, чии што засилувања ќе бидат:

$$P_{11} = G_2 \cdot (-H_1) \cdot G_1 = -G_1 G_2 H_1 \quad (7.108)$$

$$P_{21} = G_3 \cdot G_4 \cdot (-H_4) = -G_3 G_4 H_4 \quad (7.109)$$

$$P_{31} = G_4 \cdot (-H_3) \cdot G_2 \cdot (-H_2) = G_2 G_4 H_2 H_3 \quad (7.110)$$

2.3. И во овој случај постојат две омчи кои што не се допираат и нивното засилување ќе биде:

$$P_{12} = P_{11} \cdot P_{21} = G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_4 \quad (7.111)$$

Па, според тоа, детерминантата на системот ќе биде:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) + P_{12} \\ \Delta &= 1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_4 - G_2 G_4 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_4\end{aligned}\quad (7.112)$$

2.4. Засилувањата на детерминантите на директните патеки се:

$$\Delta_1 = 1 + G_1 G_2 H_1 \quad (7.113)$$

$$\Delta_2 = 1 \quad (7.114)$$

2.5. Преносната функција за овој систем кога е активен само влезот  $X_2(s)$  ќе биде:

$$\begin{aligned}P_2(s) &= \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = \frac{P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2}{\Delta} = \frac{G_3 G_4 (1 + G_1 G_2 H_1) - G_2 G_3 G_4 H_3}{\Delta} \\ \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} &= \frac{G_3 G_4 (1 - G_2 H_3 + G_1 G_2 H_1)}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_4 - G_2 G_4 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_4}\end{aligned}\quad (7.115)$$

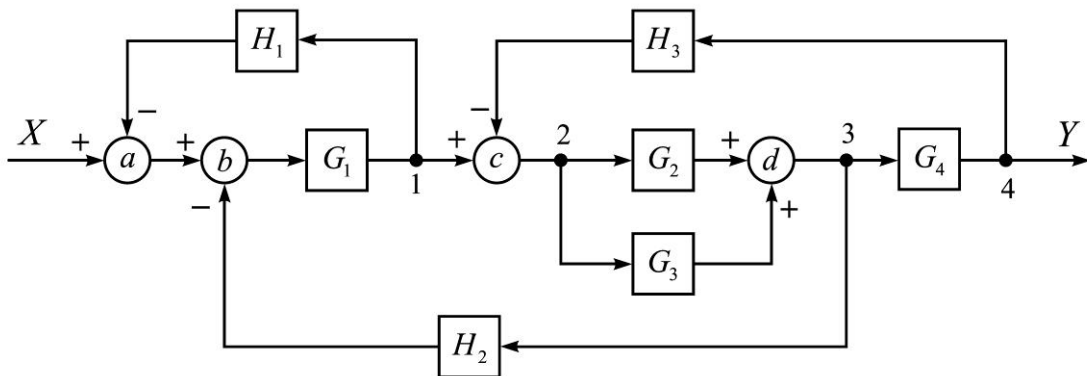
Од равенката (7.115) се определува излезот  $Y_2(s)$  кога е активен само влезот  $X_2(s)$ , односно:

$$Y_2(s) = \frac{G_3 G_4 (1 - G_2 H_3 + G_1 G_2 H_1) X_2(s)}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_4 - G_2 G_4 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_4} \quad (7.116)$$

Според тоа, вкупниот одзив на системот кога се активни и двата влеза  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  ќе се определи според равенка (7.94) и притоа се добива:

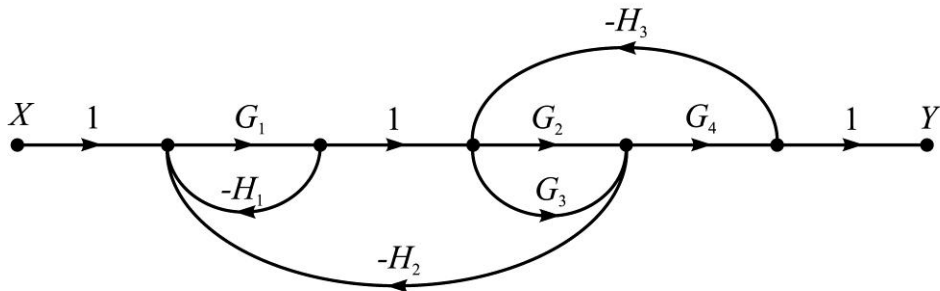
$$Y(s) = \frac{G_1 G_2 (1 - G_4 H_2 + G_3 G_4 H_4) X_1(s) + G_3 G_4 (1 - G_2 H_3 + G_1 G_2 H_1) X_2(s)}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_3 G_4 H_4 - G_2 G_4 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_4} \quad (7.117)$$

**Задача 7.20.** Со примена на графовите за тек на сигналите да се определи преносната функција на управувачкиот систем даден со неговиот сложен блок дијаграм на слика 7.77.



Слика 7.77. Блок дијаграм на управувачки систем

**Решение:** Графот за тек на сигналите за системот ќе биде:



Слика 7.74. Граф за тек на сигналите

1. Постојат две директни патеки и нивното засилување ќе биде:

$$P_1 = 1 \cdot G_1 \cdot 1 \cdot G_2 \cdot G_4 \cdot 1 = G_1 G_2 G_4 \quad (7.118)$$

$$P_2 = 1 \cdot G_1 \cdot 1 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot 1 = G_1 G_3 G_4 \quad (7.119)$$

2. Постојат пет повратни омчи, чии што засилувања се:

$$P_{11} = G_1 \cdot (-H_1) = -G_1 H_1 \quad (7.120)$$

$$P_{21} = G_1 \cdot 1 \cdot G_2 \cdot (-H_2) = -G_1 G_2 H_2 \quad (7.121)$$

$$P_{31} = G_1 \cdot 1 \cdot G_3 \cdot (-H_2) = -G_1 G_3 H_2 \quad (7.122)$$

$$P_{41} = G_2 \cdot G_4 \cdot (-H_3) = -G_2 G_4 H_3 \quad (7.123)$$

$$P_{51} = G_3 \cdot G_4 \cdot (-H_3) = -G_3 G_4 H_3 \quad (7.124)$$

Постојат два пара на две повратни омчи коишто не се допираат и нивните засилувања ќе бидат:

$$P_{12} = P_{11} \cdot P_{41} = (-G_1 H_1) \cdot (-G_2 G_4 H_3) = G_1 G_2 G_4 H_1 H_3 \quad (7.125)$$

$$P_{22} = P_{11} \cdot P_{51} = (-G_1 H_1) \cdot (-G_3 G_4 H_3) = G_1 G_3 G_4 H_1 H_3 \quad (7.126)$$

3. Детерминантата на системот е:

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31} + P_{41} + P_{51}) + (P_{12} + P_{22})$$

$$\Delta = 1 + G_1 H_1 + G_1 G_2 H_2 + G_1 G_3 H_2 + G_2 G_4 H_3 + G_3 G_4 H_3 + G_1 G_2 G_4 H_1 H_3 + G_1 G_3 G_4 H_1 H_3 \quad (7.127)$$

4. Сите повратни омчи ги допираат и двете директни патеки од каде што следи дека засилувањата на детерминантите на директните патеки се:

$$\Delta_1 = 1 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = 1 \quad (7.128)$$

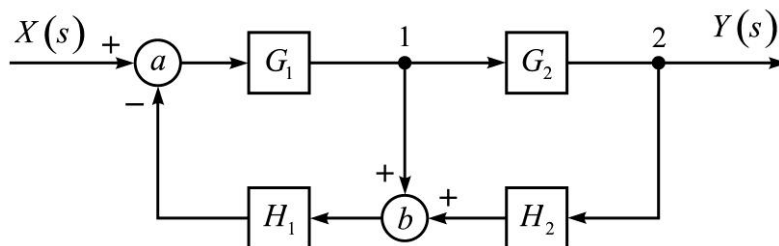
5. Според тоа, преносната функција за овој систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2}{\Delta}$$

$$\frac{Y}{X}(s) = \frac{G_1 G_4 (G_2 + G_3)}{1 + G_1 H_1 + (G_1 H_2 + G_4 H_3 + G_1 G_4 H_1 H_3)(G_2 + G_3)} \quad (7.129)$$

### Задачи за вежбање:

**Задача 7.21.** Да се определи преносната функција на управувачкиот систем даден со неговиот блок дијаграм претставен на слика 7.79.

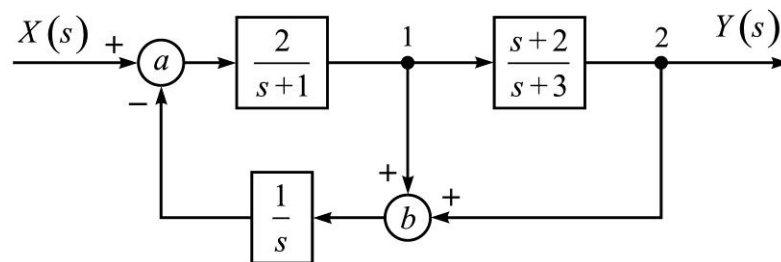


Слика 7.79. Блок дијаграм на управувачки систем

**Решение:** Со една од наведените три методи во оваа глава, лесно може да се добие преносната функција на дадениот управувачки систем, и таа е:

$$\frac{Y}{X}(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_1 G_2 H_1 H_2} \quad (7.130)$$

**Задача 7.22.** Даден е блок дијаграмот:



Слика 7.80. Блок дијаграм на управувачки систем

Да се определи диференцијалната равенка (математичкиот модел) со којашто е опишан овој управувачки систем.

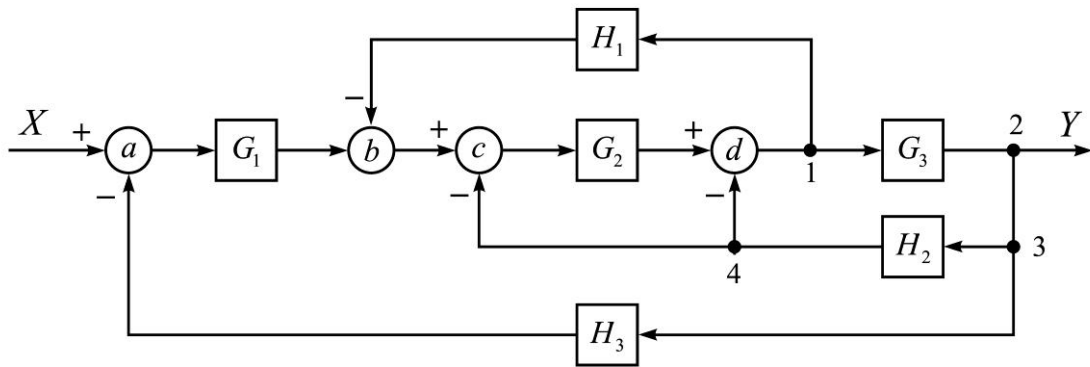
**Решение:** Преносната функција на дадениот управувачки систем ќе биде:

$$\frac{Y}{X}(s) = \frac{2s(s+2)}{s^3 + 4s^2 + 7s + 10} \quad (7.131)$$

Ако се замени, Лапасовиот оператор -  $s$ , со операторот на диференцирање -  $D$ , односно:  $s \equiv D$ , директно се добива диференцијалната равенка за дадениот управувачки систем:

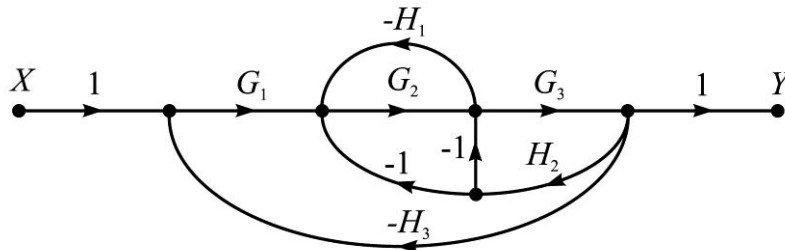
$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 7 \frac{dy}{dt} + 10y = 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} \quad (7.132)$$

**Задача 7.23.** Со примена на графовите за тек на сигналите да се определи преносната функција на управувачкиот систем даден со неговиот сложен блок дијаграм на слика 7.81.



Слика 7.81. Блок дијаграм на управувачки систем

**Решение:** Графот за тек на сигналите за системот ќе биде:

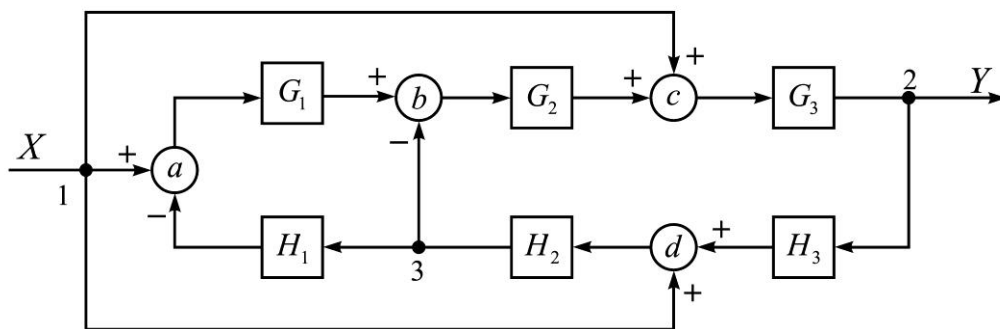


Слика 7.82. Граф за тек на сигналите

Преносната функција за овој систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_3 H_2 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_3} \quad (7.133)$$

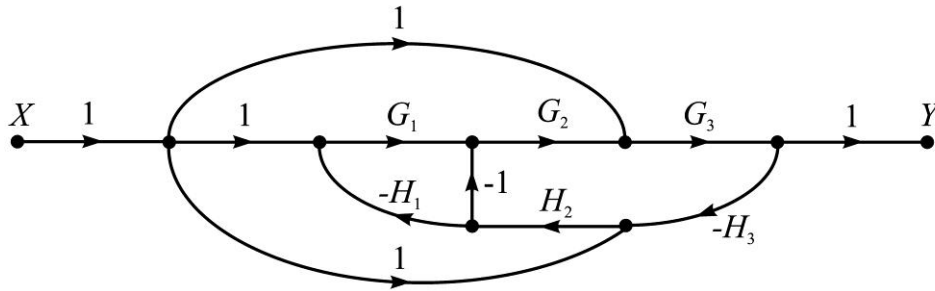
**Задача 7.24.** Даден е сложен блок дијаграм на еден управувачки систем:



Слика 7.83. Блок дијаграм на управувачки систем

Да се определи неговата преносна функција.

**Решение:** Графот за тек на сигналите за системот ќе биде:

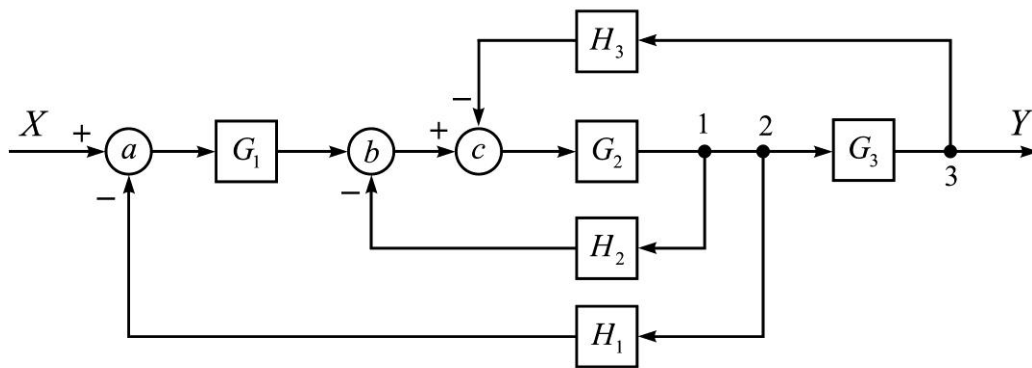


Слика 7.84. Граф за тек на сигналите

Преносната функција за овој систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 G_3 H_1 H_2}{1 + G_2 G_3 H_2 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_1 H_2 H_3} \quad (7.134)$$

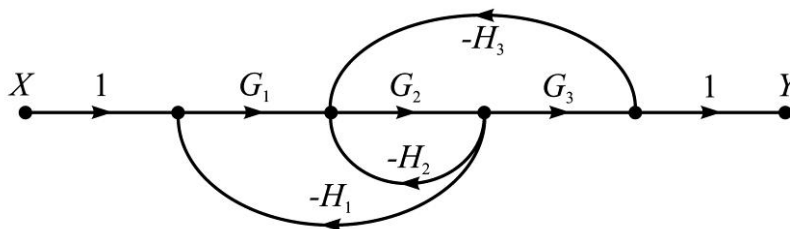
**Задача 7.25.** Даден е блок дијаграмот:



Слика 7.85. Блок дијаграм на управувачки систем

- Да се нацрта графот за тек на сигналите.
- Да се определи преносната функција на дадениот управувачки систем.

**Решение:** а). Графот за тек на сигналите за системот ќе биде:



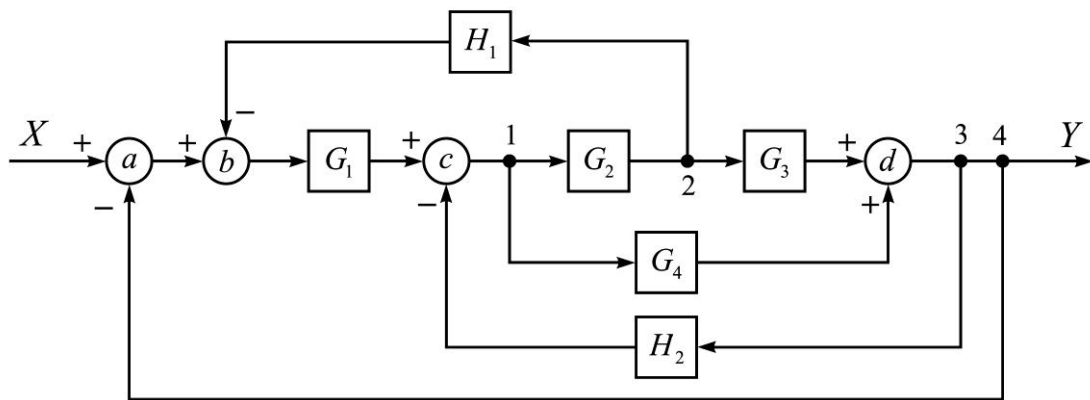
Слика 7.86. Граф за тек на сигналите



б). Преносната функција за овој систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3} \quad (7.135)$$

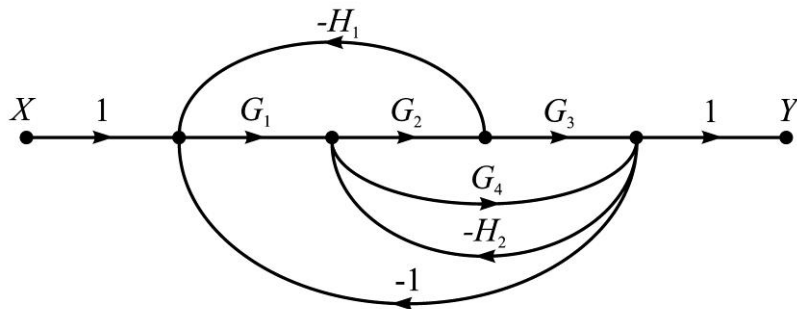
**Задача 7.26.** Даден е сложениот блок дијаграм на еден управувачки систем:



Слика 7.87. Блок дијаграм на управувачки систем

Со примена на графовите за тек на сигналите да се определи преносната функција на дадениот управувачки систем.

**Решение:** Графот за тек на сигналите за системот ќе биде:

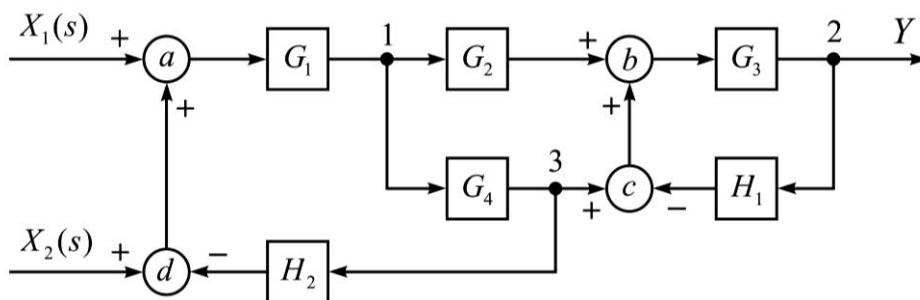


Слика 7.88. Граф за тек на сигналите

Преносната функција за овој систем ќе биде:

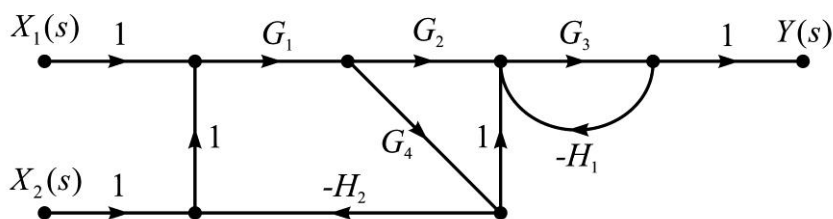
$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 H_2 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4} \quad (7.136)$$

**Задача 7.27.** Да се определи равенката на излезот  $Y(s)$  во функција од влезите  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  за системот претставен преку неговиот сложен блок дијаграм (слика 7.89).



Слика 7.89. Блок дијаграм на управувачки систем со два влеза

**Решение:** Графот за тек на сигналите за системот ќе биде:



Слика 7.90. Граф за тек на сигналите за систем со два влеза

Излезот  $Y_1(s)$  на системот кога е активен само влезот  $X_1(s)$ , односно ( $X_1(s) \neq 0$ ;  $X_2(s) = 0$ ), ќе биде:

$$Y_1(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 G_4}{1 + G_3 H_1 + G_1 G_4 H_2} X_1(s) \quad (7.137)$$

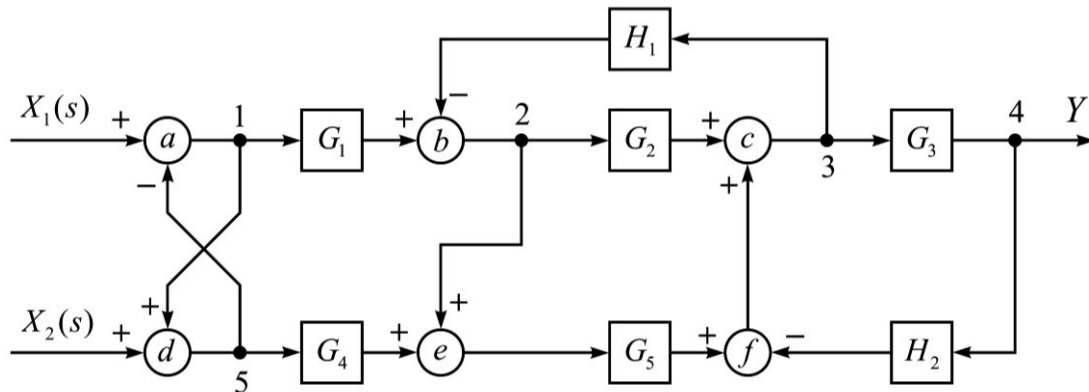
Излезот  $Y_2(s)$  на системот кога е активен само влезот  $X_2(s)$ , односно ( $X_1(s) = 0$ ;  $X_2(s) \neq 0$ ), ќе биде:

$$Y_2(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 G_4}{1 + G_3 H_1 + G_1 G_4 H_2} X_2(s) \quad (7.138)$$

Вкупниот излез на овој управувачки систем кога ќе бидат активни и двата влеза и ќе биде:

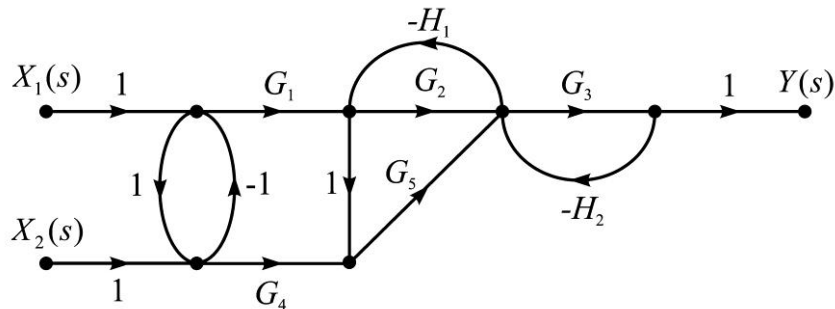
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_3 G_4}{1 + G_3 H_1 + G_1 G_4 H_2} [X_1(s) + X_2(s)] \quad (7.139)$$

**Задача 7.28.** Да се определи равенката на излезот  $Y(s)$  во функција од влезите  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  за системот претставен преку неговиот сложен блок дијаграм (слика 7.91).



Слика 7.91. Блок дијаграм на управувачки систем со два влеза

**Решение:** Графот за тек на сигналите за системот ќе биде:



Слика 7.92. Граф за тек на сигналите за систем со два влеза

Излезот  $Y_1(s)$  на системот кога е активен само влезот  $X_1(s)$  ќе биде:

$$Y_1(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4 G_5 + G_1 G_3 G_5}{2(1 + G_2 H_1 + G_3 H_2 + G_5 H_1)} X_1(s) \quad (7.140)$$

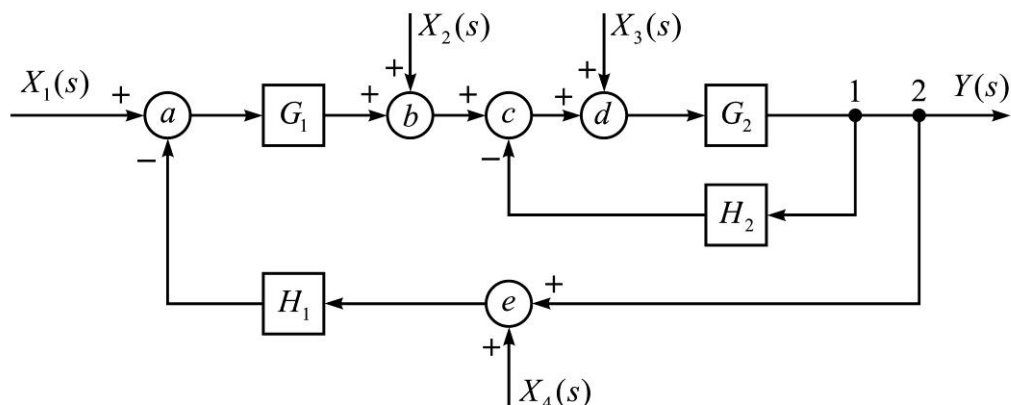
Излезот  $Y_2(s)$  на системот кога е активен само влезот  $X_2(s)$  ќе биде:

$$Y_2(s) = \frac{-G_1 G_2 G_3 + G_3 G_4 G_5 - G_1 G_3 G_5}{2(1 + G_2 H_1 + G_3 H_2 + G_5 H_1)} X_2(s) \quad (7.141)$$

Вкупниот излез на овој управувачки систем кога ќе бидат активни и двата влеза ќе биде:

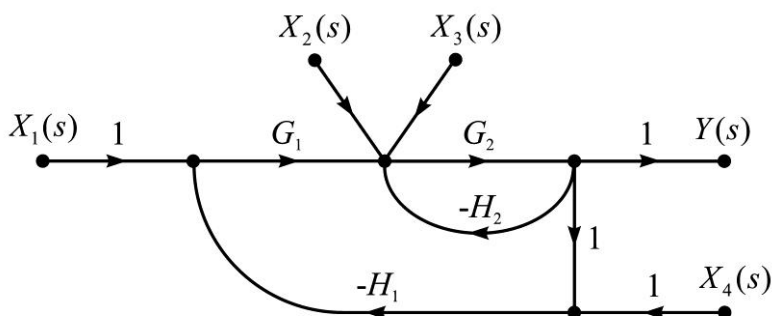
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{G_1 G_3 (G_2 + G_5)(X_1 - X_2) + G_3 G_4 G_5 (X_1 + X_2)}{2(1 + G_2 H_1 + G_3 H_2 + G_5 H_1)} \quad (7.142)$$

**Задача 7.29.** Да се определи равенката на излезот  $Y(s)$  за системот претставен преку неговиот сложен блок дијаграм (слика 7.93).



Слика 7.93. Блок дијаграм на управувачки систем со четири влез

**Решение:** Графот за тек на сигналите за системот ќе биде:

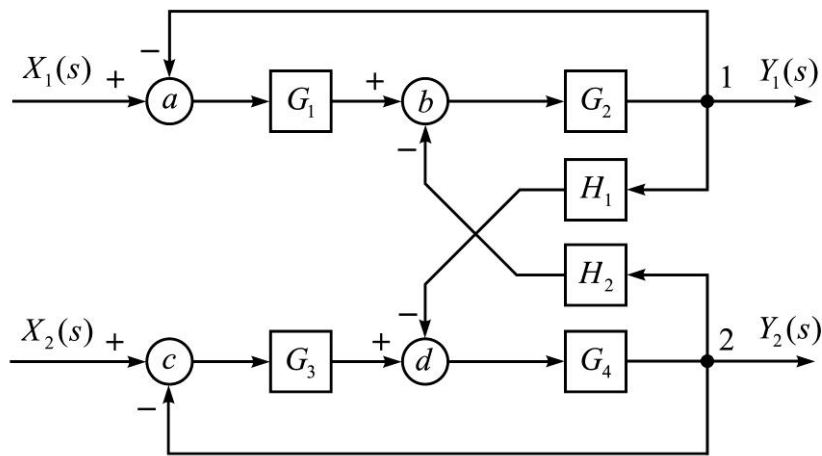


Слика 7.94. Граф за тек на сигналите за систем со четири влез

Вкупниот излез на овој управувачки систем кога ќе бидат активни сите четири влез ќе биде:

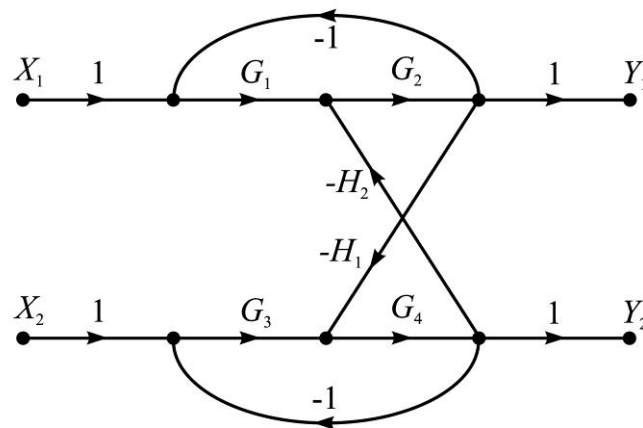
$$Y(s) = \frac{G_1 G_2 X_1 + G_2 (X_2 + X_3) - G_1 G_2 H_1 X_4}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1} \quad (7.142)$$

**Задача 7.30.** Да се определат равенките на излезите  $Y_1(s)$  и  $Y_2(s)$  во функција од влезите  $X_1(s)$  и  $X_2(s)$  за системот претставен преку неговиот сложен блок дијаграм (слика 7.95).



Слика 7.95. Блок дијаграм на управувачки систем со два влеза и два излеза

**Решение:** Графот за тек на сигналите за дадениот блок дијаграм е прикажан на слика 7.96.



Слика 7.96. Граф за тек на сигналите за систем со два влеза и два излеза

Излезот  $Y_1(s)$  на системот кога ќе бидат активни и двата влеза ќе биде:

$$Y_1(s) = \frac{G_1 G_2 X_1 - G_2 G_3 G_4 H_2 X_2}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 - G_2 G_4 H_1 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4} \quad (7.144)$$

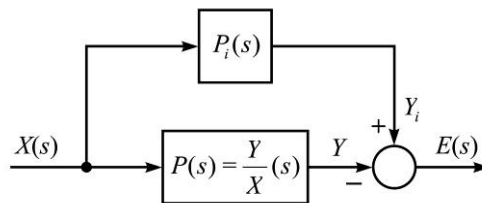
Излезот  $Y_2(s)$  на системот кога ќе бидат активни и двата влеза ќе биде:

$$Y_2(s) = \frac{-G_1 G_2 G_4 H_1 X_1 + G_3 G_4 X_2}{1 + G_1 G_2 + G_3 G_4 - G_2 G_4 H_1 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4} \quad (7.145)$$

---

## ОСМА ГЛАВА

---

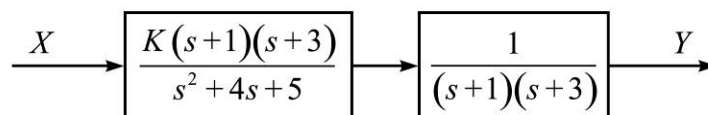


## 8. КЛАСИФИКАЦИЈА НА СИСТЕМИТЕ, КОНСТАНТИ НА ГРЕШКИ И ОСЕТЛИВОСТ

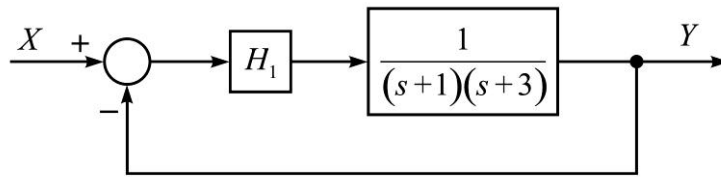
### 8.1. Класификација на системите

Во практиката може да се случи два системи да имаат идентична преносна функција, а притоа двата системи да имаат различна конфигурација; едниот да биде систем со отворена омча, а другиот да биде систем со затворена омча (повратна врска). Според тоа, овие два системи нема да имаат еднакви особини, иако нивните преносни функции се идентични.

*Пример 8.1.* Следните два системи имаат идентичен објект на уптавување и идентична преносна функција за засилување  $K = 2$  и притоа едниот е систем со отворена омча (слика 8.1.а), а другиот е систем со повратна врска (слика 8.1.б).



а).



б).

Слика 8.1. Блок дијаграми на системи со отворена и затворена омча

Преносната функција на системот со отворена омча (слика 8.1.а) ќе биде:

$$\left(\frac{Y}{X}\right)_1 = \frac{K}{s^2 + 4s + 5} \quad (8.1)$$

Преносната функција на системот со затворена омча (слика 8.1.б) ќе биде:

$$\left(\frac{Y}{X}\right)_2 = \frac{K}{s^2 + 4s + 3 + K} \quad (8.2)$$

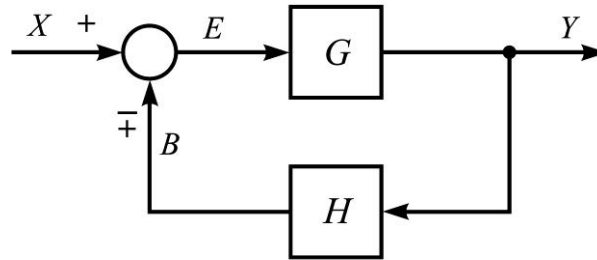
Ако вредноста на засилувањето е  $K = 2$  се добиваат идентични преносни функции за двата системи, односно:

$$\left(\frac{Y}{X}\right)_{1,K=2} = \left(\frac{Y}{X}\right)_{2,K=2} = \frac{2}{s^2 + 4s + 5} \quad (8.3)$$

И покрај тоа што овие два системи се сосема еквивалентни за  $K = 2$ , нивните особини значително ќе се разликуваат, и за мали отстапувања на засилувањето  $K$  од неговата вредност  $K = 2$ .

Во продолжение на оваа глава ќе бидат анализирани некои од особините на системите со повратна врска и притоа ќе бидат дадени квантитативни мерила за делотворноста на повратната врска, како што се: *грешкиите* што ги прави системот и *осейливостта* на системот во однос на некој параметар.

Ќе се разгледува класата на системи со повратна врска со каноничен облик на блок дијаграмот, претставени на слика 8.2.



Слика 8.2. Каноничен облик на систем со повратна врска

Кружната преносна функција за овој систем, во општ облик, може да биде претставена како:

$$GH(s) = \frac{k \cdot \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (8.4)$$

Каде што се:  $k = const$  - засилување на кружната преносна функција  $GH(s)$ ,

$-z_i$  - конечни нули на  $GH(s)$ ,

$-p_i$  - конечни нули на  $GH(s)$ .

Притоа, мора да биде исполнет условот  $n \geq m$ , заради физичка реализливост на системот.

Доколку постојат  $l$  полови во центарот на  $s$ -полето, тогаш кружната преносна функција може да се претстави во облик:

$$GH(s) = \frac{k \cdot \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^l \cdot \prod_{i=1}^{n-l} (s + p_i)} = \frac{k \cdot B(s)}{s^l \cdot I(s)} \quad (8.5)$$

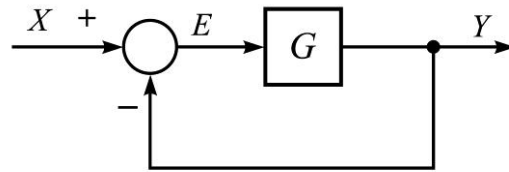
Системот претставен со равенката (8.5) се нарекува  $l$ -систем од тип  $l$ .

## 8.2. Константи на грешки

### 8.2.1. Системи со единична повратна спрега

Даден е стабилен систем со единична повратна врска, прикажан на слика 8.4.





Слика 8.3. Систем со единична повратна врска

### Константи на позициона грешка

Едно од мерилата за делотворноста на повратната врска, кај стабилен систем со единична повратна врска, е константата на позиционата (отскопната) грешка -  $K_p$ .

Константата  $K_p$  на позициона грешка за систем со единична повратна спрега од тип  $l$  (слика 8.3) се определува според изразот:

$$K_p \equiv \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k \cdot B(s)}{s^l \cdot I(s)} = \begin{cases} \frac{k \cdot B(0)}{I(0)} & l = 0 \\ \infty & l > 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

Грешката на сталната состојба на излезот на стабилен систем со единична повратна врска од тип  $l$ , за случај кога на влезот е доведена единична отскопна функција, се определува со помош на константата на позициона грешка според равенката:

$$e_p(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{1 + K_p} \quad (8.7)$$

Таа е мерило на грешката сталната состојба помеѓу влезот и излезот на системот, кога на влезот е доведена единична отскопна функција, односно со неа се оценува колку успешно тој систем може да прати промена на позицијата.

*Напомена:* Генезата на равенката (8.7) може да се потврди на следниот начин:

Грешката  $E(s)$  на системот со единична негативна повратна врска, прикажан на слика 8.3, ќе биде:

$$E(s) = X(s) - Y(s) = X(s) - \frac{G}{1+G} \cdot X(s) = \frac{1}{1+G} \cdot X(s) \quad (8.8)$$

Според равенката (8.7), за влез единечна отскочна функција, следи:

$$e_p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (8.9)$$

Каде што е:  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$  - Лапласова трансформација на влез единечна отскочна функција.

### Константи на брзинска грешка

Друго мерилото за делотворноста на повратната врска, кај стабилен систем со единечна повратна врска (слика 8.3), е брзинската (нагибната) константата на грешка -  $K_v$ .

Брзинската константата на грешка  $K_v$  за стабилен систем со единечна повратна врска од тип  $l$  е определена како:

$$K_v \equiv \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{k \cdot B(s)}{s^l \cdot I(s)} = \begin{cases} 0 & l = 0 \\ \frac{k \cdot B(0)}{I(0)} & l = 1 \\ \infty & l > 1 \end{cases} \quad (8.10)$$

Грешката на сталната состојба на излезот на стабилен систем со единечна повратна врска од тип  $l$ , за случај кога на влезот е доведена единечна нагибна функција, се определува со помош на брзинската константа на грешка според равенката:

$$e_v(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_v} \quad (8.11)$$

Таа е мерило на грешката сталната состојба помеѓу влезот и излезот на системот, кога на влезот е доведена единечна нагибна функција, односно со неа се оценува колку успешно тој систем може да прати промена на брзината.

### Константи на забрзувачка грешка

Третото мерилото за делотворноста на повратната врска, кај стабилен систем со единечна повратна врска (слика 8.3), е забрзувачката (параполичната) константата на грешка -  $K_a$ .

Забрзувачката константата на грешка  $K_a$  за стабилен систем со единечна повратна врска од тип  $l$  е определена како:

$$K_a \equiv \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{k \cdot B(s)}{s^l \cdot I(s)} = \begin{cases} 0 & l = 0, 1 \\ \frac{k \cdot B(0)}{I(0)} & l = 2 \\ \infty & l > 2 \end{cases} \quad (8.12)$$

Грешката на сталната состојба на излезот на стабилен систем со единечна повратна врска од тип  $l$ , за случај кога на влезот е доведена единечна параболична функција, се определува со помош на забрзувачката константа на грешка според изразот:

$$e_a(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_a} \quad (8.13)$$

Таа е мерило на грешката на сталната состојба помеѓу влезот и излезот од системот, кога на влезот е доведена единечна параболична функција, односно со неа се оценува колку успешно тој систем може да прати промена на забрзувањето.

Константите на грешки и грешките на сталната состојба за стабилен систем со единечна повратна врска од тип 0, 1 и 2 се прикажани во табела 8.1 заради поедноставен увид во нив.

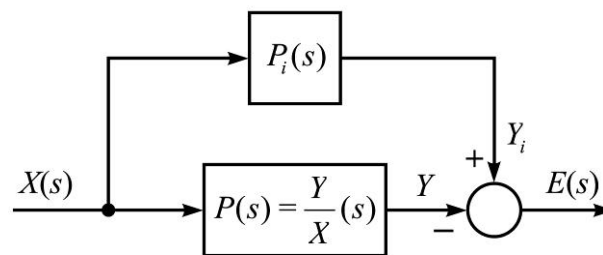
Табела 8.1. Константи на грешки и грешки на сталната состојба

Влез Тип на систем	Единечна отскочна функција		Единечна нагибна функција		Единечна параболична функција	
	$K_p$	$e_p(\infty)$	$K_v$	$e_v(\infty)$	$K_a$	$e_a(\infty)$
Тип 0	$\frac{k \cdot B(0)}{I(0)}$	$\frac{1}{1 + K_p}$	0	$\infty$	0	$\infty$
Тип 1	$\infty$	0	$\frac{k \cdot B(0)}{I(0)}$	$\frac{1}{K_v}$	0	$\infty$
Тип 2	$\infty$	0	$\infty$	0	$\frac{k \cdot B(0)}{I(0)}$	$\frac{1}{K_a}$

### 8.2.2. Општ облик на системи со повратна врска

Во претходното поглавие 8.2.1 беа презентирани изразите за пресметка на константите на грешки кај системи со единечна повратна врска. Постои можност, по друга методологија, да се оцени делотворноста на повратната спрега и кај општ тип на стабилен систем со повратна врска. Имено, во овој случај се оценува квалитетот на одзивот на дадениот систем со тоа што тој се споредува со одзивот што би го имал пожелниот (идеалниот) облик на истиот систем.

На сликата 8.4. со  $P_i(s)$  е претставена преносната функција на пожелниот (идеален) систем, а со  $P(s)$  е претставена преносната функција на дадениот (расположивиот) систем. Притоа,  $X(s)$  е истовремено влез за двата системи, а со  $E(s)$  е претставена грешката, односно разликата помеѓу пожелниот (идеалниот) и вистинскиот излез на системот.



Слика 8.4. Грешка на општ облик на систем со повратна врска

Најелементарни облици на идеални (пожелни) системи се:

- чист пропорционален елемент:  $P_i(s) = k; \quad k = const$  (8.14)

- чист диференцијатор:  $P_i(s) = s$  (8.15)

- чист интегратор:  $P_i(s) = \frac{1}{s}$  (8.16)

За општ облик на стабилен систем со повратна врска, во продолжение, се дадени изразите за константите на грешки и нивните релации со грешките во сталната состојба.

*Константите на позициона грешка*

Константата на позиционата грешка (отскочна константа на грешка)  $K_p$  се определува според изразот:

$$K_p \equiv \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [P_i(s) - P(s)]} \quad (8.17)$$

Грешката на сталната состојба на излезот на општ облик на стабилен систем со повратна врска, за случај кога на влезот е доведена единечна отскочна функција, се определува со помош на константата на позициона грешка според равенката:

$$e_p(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_p} \quad (8.18)$$

*Константите на брзинска грешка*

Константата на брзинската грешка (нагибна константа на грешка)  $K_v$  се определува според изразот:

$$K_v \equiv \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [P_i(s) - P(s)]} \quad (8.19)$$

Грешката на сталната состојба на излезот на општ облик на стабилен систем со повратна врска, за случај кога на влезот е доведена единечна нагибна функција, се пресметува сна следниот начин:

$$e_v(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_v} \quad (8.20)$$

*Константите на забрзувачка грешка*

Константата на забрзувачката грешка (параболична константа на грешка)  $K_a$  се определува според изразот:

$$K_a \equiv \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} [P_i(s) - P(s)]} \quad (8.21)$$

Грешката на сталната состојба на излезот на општ облик на стабилен систем со повратна врска, за случај кога на влезот е доведена единечна параболична функција, се пресметува сна следниот начин:

$$e_a(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_a} \quad (8.22)$$

### 8.3. Осетливост

Доколку се претпостави дека системот е линеарен и временски инваријантен, за негов математички модел, може да биде генерирана преносната функција, односно за некои типови на системи, преносна функција во фреквентен домен, или функција на фреквентниот одзив.

Преносната функција е определена со конечен број на константни параметри. Вредностите на овие параметри, за номинална работа на системот, односно за режимот на работа на системот во кој што се анализира, се наречени номинални вредности. Точноста на моделот, очигледно, зависи од точноста со која што овие номинални параметри ги апроксимираат вистинските вредности на параметрите, како и од тоа, колку овие параметри отстапуваат од номиналната вредност во текот на работа на системот.

Осетливоста на еден систем во однос на некој параметар претставува мерило за промената на преносната функција во однос на нејзината номинална вредност, кога тој параметар ќе ја менува својата вредност.

Преносната функција  $P(s) = Y(s)/X(s)$ , чија што осетливост се оценува во однос на параметарот  $k$ , ќе биде анализирана како функција во однос на променливата  $k$  -  $P(k)$ . Според тоа, осетливоста на преносната функција  $P(s)$  во однос на параметарот  $k$  ќе се определи според равенката:

$$S_k^{P(k)} \equiv \frac{d \ln P(k)}{d \ln k} = \frac{\frac{dP(k)}{P(k)}}{\frac{dk}{k}} = \frac{k}{P(k)} \cdot \frac{dP(k)}{dk} \quad (8.23)$$

Во најопшт случај, осетливоста  $S_k^{P(k)}$  е изразена како функција од комплексната променлива -  $s$ .

Функцијата на фреквентниот одзив на еден систем може да се добие директно од преносната функција на системот, доколку е таа позната, преку замена на комплексната променлива -  $s$  со имагинарната вредност -  $j\omega$ . Во овој случај, функцијата на фреквентниот одзив (преносната функција во фреквентен домен) е определена со истите параметри како и кај преносната функција и нејзината точност е определена со точноста на овие параметри. Функцијата на фреквентниот одзив може алтернативно да биде определена преку дијаграмите на големината и фазниот агол, двата скицирани во функција на реалната фреквенција -  $\omega$ . Овие дијаграми често се добиваат експериментално и во многу случаи не можат да бидат определени со конечен број на параметри. Точноста на моделот, притоа, зависи од точноста со која дијаграмите за амплитудата и фазниот агол ја апроксимираат вистинската функција на фреквентниот одзив.

И во овој случај осетливоста на системот во однос на некој параметар претставува мерило за промената на функцијата на фреквентниот одзив во однос на нејзината номинална вредност, кога тој параметар ќе ја менува својата вредност.

Нека е даден математичкиот модел  $P(k)$  (преносна функција или функција на фреквентниот одзив) за еден линеарен временски инваријантен систем претставен во поларен облик како

$$P(k) = |P(k)| e^{j\Phi_p} \quad (8.24)$$

каде што е  $k$  - параметар од којшто зависи  $P(k)$ . Обично и  $|P(k)|$  и  $\Phi_p$  зависат од  $k$ , а  $k$  е реална или комплексна големина со која што е претставен некој параметар на системот.

Според тоа, осетливоста на математичкиот модел  $P(k)$  во однос на параметарот  $k$  ќе се определи според равенката (8.23).

Осетливоста на големината на преносната функција  $P(k) - |P(k)|$  во однос на параметарот  $k$  е определена со:

$$S_k^{|P(k)|} \equiv \frac{d \ln |P(k)|}{d \ln k} = \frac{\frac{d |P(k)|}{|P(k)|}}{\frac{dk}{k}} = \frac{k}{|P(k)|} \cdot \frac{d |P(k)|}{dk} \quad (8.25)$$

Осетливоста на фазниот агол на преносната функција  $P(k) - \Phi_p$  во однос на параметарот  $k$  е определена со:

$$S_k^{\Phi_p} \equiv \frac{d \ln \Phi_p}{d \ln k} = \frac{\frac{d \Phi_p}{\Phi_p}}{\frac{dk}{k}} = \frac{k}{\Phi_p} \cdot \frac{d \Phi_p}{dk} \quad (8.26)$$

Осетливоста на математичкиот модел  $P(k) = |P(k)|e^{j\Phi_p}$  во однос на параметарот  $k$  се определува според изразот:

$$S_k^{P(k)} = S_k^{|P(k)|} + j\Phi_p S_k^{\Phi_p} \quad (8.27)$$

Во најопшт случај големините на  $S_k^{|P(k)|}$  и  $S_k^{\Phi_p}$  се комплексни броеви, но ако е параметарот  $k$  реална вредност, тогаш и  $S_k^{|P(k)|}$  и  $S_k^{\Phi_p}$  се реални вредности.

**Задача 8.1.** Даден е објект на автоматско управување со неговата преносна функција:

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} \quad (8.28)$$

Потребно е да се конструира систем, во кој што ќе биде вклучен објектот на управување  $G_2(s)$ , и кој што ќе има преносна функција:

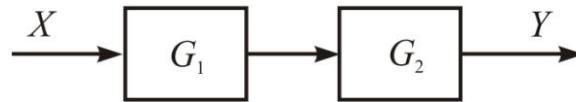
$$\frac{Y}{X}(s) = \frac{2}{s^3 + 2s^2 + 2} \quad (8.29)$$

Да се покаже дека, ако не постојат дополнителни ограничувања (како што е стабилноста), кои што се однесуваат на управувачките (компензационите)



елементи, тогаш таков систем може да биде конструиран или како систем со отворена омча или како систем со единечна повратна врска.

**Решение:** Ако системот биде конструиран како систем со отворена омча, тогаш тој ќе ја има следната конфигурација:



Слика 8.5. Блок дијаграм на управувачки систем со отворена омча

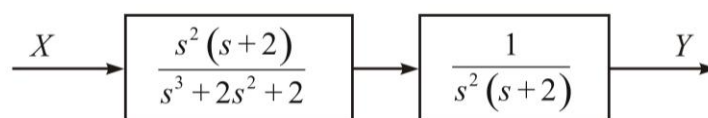
Преносната функција за овој систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = G_1 \cdot G_2$$

од каде што се добива:

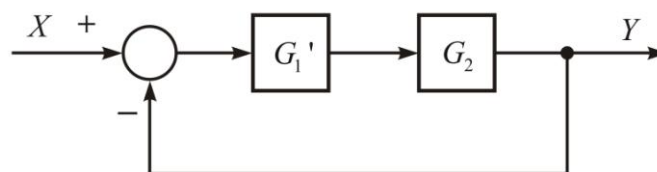
$$G_1(s) = \frac{P(s)}{G_2(s)} = \frac{s^2(s+2)}{s^3+2s^2+2} \quad (8.30)$$

Според тоа блок дијаграмот за овој систем ќе биде:



Слика 8.6. Блок дијаграм на бараниот систем со отворена омча

Ако системот биде проектиран како систем со единечна повратна врска, тогаш тој ќе ја има следната конфигурација (слика 8.7):



Слика 8.7. Блок дијаграм на систем со единечна повратна врска

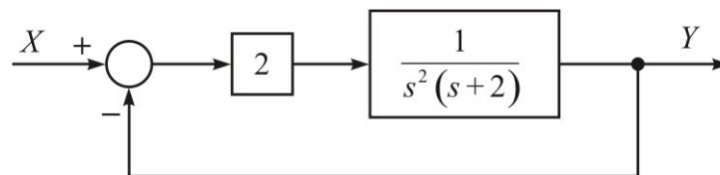
Преносната функција за овој систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{G_1' \cdot G_2}{1 + G_1' \cdot G_2}$$

од каде што се добива:

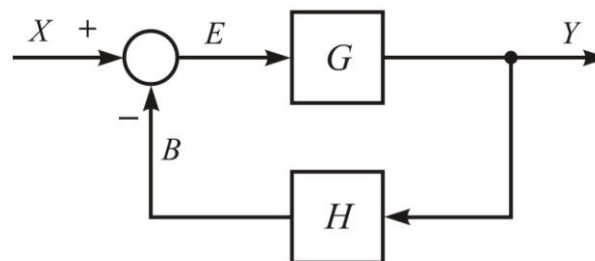
$$G_1'(s) = \frac{1}{G_2(s)} \left[ \frac{P(s)}{1 - P(s)} \right] = 2 \quad (8.31)$$

Според тоа блок дијаграмот за овој управувачки систем со единечна повратна врска ќе биде:



Слика 8.8. Блок дијаграм на бараниот систем со единечна повратна врска

**Задача 8.2.** Систем со повратна врска е претставен во канонична форма.



Слика 8.9. Канонична форма на систем со повратна врска

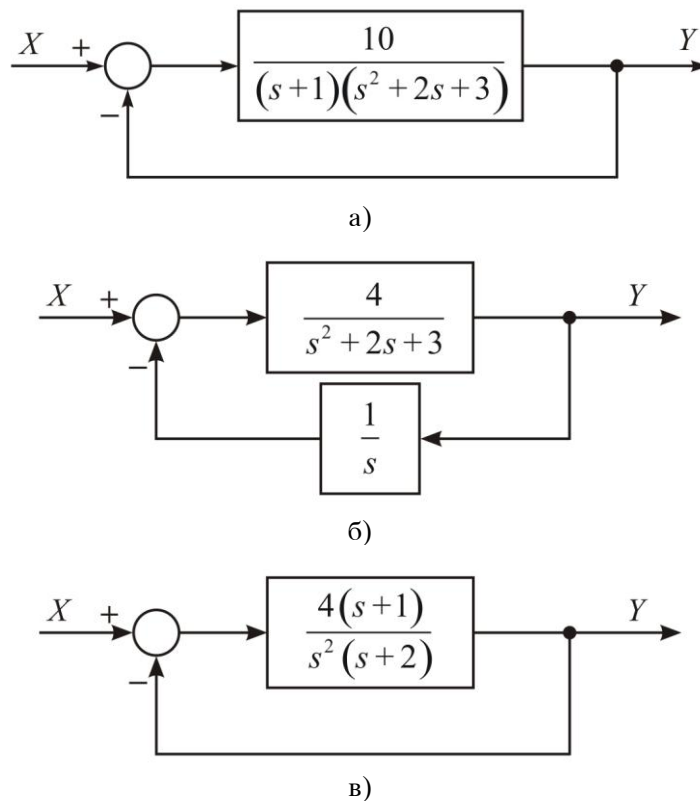
Да се класифицира овој систем според типот, ако се:

- а).  $G(s) = \frac{1}{s}$ ,  $H(s) = 1$
- б).  $G(s) = \frac{3}{s(s+1)}$ ,  $H(s) = \frac{s+2}{s+3}$
- в).  $G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 3}$ ,  $H(s) = \frac{s+1}{s+2}$  (8.32)
- г).  $G(s) = \frac{10}{(2s+1)(3s+1)}$ ,  $H(s) = \frac{36}{3s(4s+1)}$
- д).  $G(s) = \frac{2}{s(s+1)}$ ,  $H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

**Решение:** За да се определи класификацијата на системите треба да се најде нивната кружна преносна функција, а потоа според равенка 8.5 да се определи типот на системите. Според тоа се добива:

- а).  $GH(s) = \frac{1}{s}$ , Тип: 1
- б).  $GH(s) = \frac{3(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$  Тип: 1
- в).  $GH(s) = \frac{5(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+3)}$  Тип: 0 (8.33)
- г).  $GH(s) = \frac{120}{s(2s+1)(3s+1)(4s+1)}$  Тип: 1
- д).  $GH(s) = \frac{2}{s^2(s+1)^2}$  Тип: 2

**Задача 8.3.** Да се определи типот на системите дадени со нивните блок-дијаграми (слика 8.10):



Слика 8.10. Блок-дијаграми на системи со повратна врска

**Решение:** а). Кружната преносна функција ќе биде:

$$GH(s) = \frac{10}{(s+1)(s^2+2s+3)} \quad (8.34)$$

Ова е систем од тип 0.

б). Кружната преносна функција ќе биде:

$$GH(s) = \frac{4}{s(s^2+2s+2)} \quad (8.35)$$

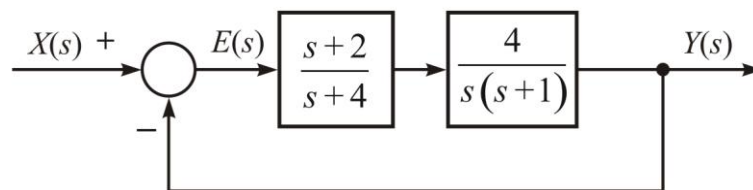
Ова е систем од тип 1.

в). Кружната преносна функција ќе биде:

$$GH(s) = \frac{4(s+1)}{s^2(s+2)} \quad (8.36)$$

Ова е систем од тип 2.

**Задача 8.4.** Даден е блок-дијаграмот на еден стабилен систем со единечна повратна врска (слика 8.11):



Слика 8.11. Блок-дијаграм на систем со единечна повратна врска

Да се определи грешката на сталната состојба на излезот:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) \quad (8.37)$$

ако на влезот е доведена функцијата:

$$x(t) = 5 + 4t; \text{ за } t > 0, \text{ односно: } x(t) = 5 \cdot u(t) + 4 \cdot r(t) \quad (8.38)$$

**Решение:** Влезот на системот во  $s$ -домен ќе биде:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = 5\frac{1}{s} + 4\frac{1}{s^2} \quad (8.39)$$

Според табела 8.1, константата на позициона грешка  $K_p$ , односно константата на грешка кога на влезот на системот се доведе единична отскочна функција, ќе биде:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4(s+2)}{s(s+1)(s+4)} = \infty \quad (8.40)$$

Грешката на сталната состојба на излезот, за влез единична отскочна функција ќе биде:

$$e_p(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0 \quad (8.41)$$

Константата на брзинска грешка  $K_v$ , односно константата на грешка кога на влезот на системот се доведе единична рампа, ќе биде:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{4(s+2)}{s(s+1)(s+4)} = 2 \quad (8.42)$$

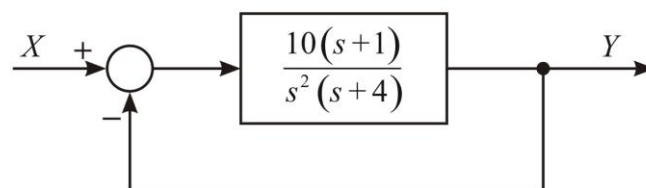
Грешката на сталната состојба на излезот, за влез единична рампа ќе биде:

$$e_v(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2} \quad (8.43)$$

Според тоа, вкупната грешка на сталната состојба на излезот, за дадениот влез (равенка 8.38), ќе изнесува;

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 5 \cdot e_p(\infty) + 4 \cdot e_v(\infty) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \quad (8.44)$$

**Задача 8.5.** Даден е блок-дијаграмот на еден стабилен систем со единична повратна врска од тип 2 (слика 8.12):



Слика 8.12. Блок-дијаграм на систем со единична повратна врска од тип 2

а). Да се определи како системот ќе прати позиција, брзина и забрзување на влезот, во подолг временски период, односно во сталната состојба на излезот.

б). Да се определи крајната вредност на грешката, ако на влезот е доведена функцијата:

$$x(t) = 3 \cdot u(t) - \frac{1}{2} \cdot r(t) + \frac{1}{4} p(t) \quad (8.45)$$

**Решение:** Најнапред треба да се провери стабилноста на системот, бидејќи пресметаните грешки што ги прави системот во стационарната состојба се валидни само за стабилни системи.

Апсолутната стабилност на системот наједноставно може да се провери со помош на Routh-овиот критериум.

Карактеристичната равенка за овој систем ќе биде:

$$1 + G(s) = 0, \quad \text{односно:} \quad s^3 + 4s^2 + 10s + 10 = 0 \quad (8.46)$$

Routh-овата табела за добиената карактеристична равенка (8.46) е:

	$s^3 + 4s^2 + 10s + 10 = 0$	
$s^3$	1	10
$s^2$	4	10
$s^1$	7,5	0
$s^0$	10	

Според тоа, системот е стабилен, бидејќи во првата колона од Routh-овата табела сите членови се позитивни.

а). Како системот ќе прати позиција, се проверува кога ќе се определи грешката на сталната состојба на излезот на системот, кога на влез е доведена единечна отскочна функција (табела 8.1):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+1)}{s^2(s+4)} = \infty, \quad \text{односно} \quad e_p(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0 \quad (8.47)$$

Грешката што ја прави системот при промена на брзината на влезната големина, се определува на тој начин што ќе се определи грешката на сталната состојба на излезот на системот, кога на влез е доведена единечна рампа (табела 8.1):

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{10(s+1)}{s^2(s+4)} = \infty, \quad \text{односно} \quad e_v(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0 \quad (8.48)$$

Грешката што ја прави системот при промена на забрзувањето на влезната големина, се определува кога ќе се определи грешката на сталната состојба на излезот на системот, кога на влез е доведена единечна парабола (табела 8.1):

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{10(s+1)}{s^2(s+4)} = \frac{10}{4}, \quad \text{односно} \quad e_a(\infty) = \frac{1}{K_a} = \frac{2}{5} \quad (8.49)$$

Според ова може да се заклучи дека системот во стационарна состојба добро и без грешка ќе прати промена на позиција и брзина на влезот, а забрзувањето ќе го прати со константна грешка од  $e_a(\infty) = 2/5$ .

б). Крајната вредност на грешката што ја прави системот стационарната состојба, за влезот даден со равенката (8.45) ќе биде:

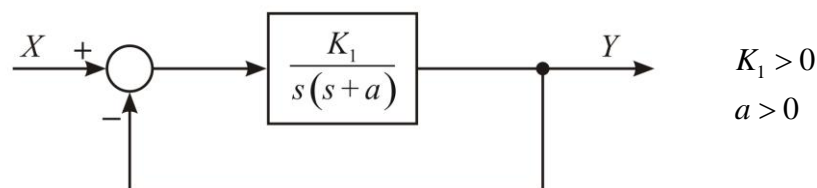
- Најпрво се определува Лапласовата трансформација на влезот, односно:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = 3\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^3} \quad (8.50)$$

Од каде што следи:

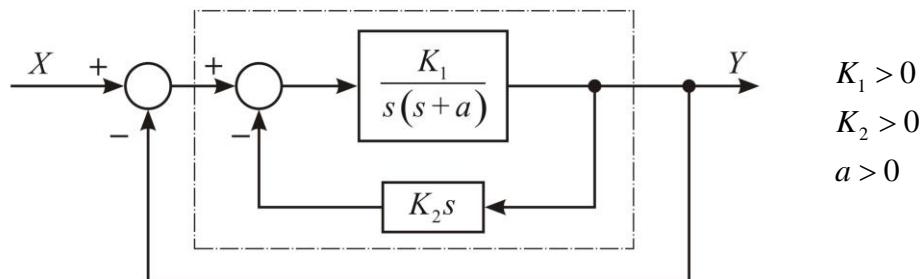
$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 3 \cdot e_p(\infty) + \frac{1}{2} \cdot e_v(\infty) + \frac{1}{2} \cdot e_a(\infty) = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \quad (8.51)$$

**Задача 8.6.** Даден е блок-дијаграмот на еден стабилен систем со единечна повратна врска (слика 8.13):



Слика 8.13. Блок-дијаграм на систем со единечна повратна врска

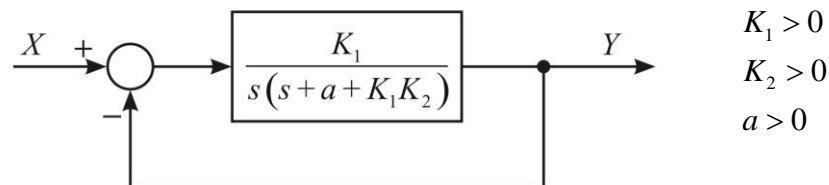
На овој систем е извршена интервенција со вградување на локална повратна омча, како што е прикажано на следната слика 8.14:



Слика 8.14. Блок-дијаграм на систем со вградена локална повратна омча

Како, новововедената локална повратна омча ќе влијае на динамичките и статичките карактеристики на системот.

**Решение:** Системот со вградена локална повратна омча, прикажан на слика 8.14, со средување на повратната омча, може да се прикаже со следниот блок дијаграм.



Слика 8.15. Упростен блок дијаграм на систем со локална повратна омча

Со анализа на кружните преносни функции, односно карактеристичните равенки на системите, може лесно да се утврди дека станува збор за стабилни системи.

Динамиката на системите е дефинирана со сопствената фреквенција -  $\omega_n$  и со пригушувањето на системот -  $\xi$ .

За таа цел се определуваат преносните функции на дадениот систем (слика 8.13) и на системот со вградена локална повратна омча (слика 8.15):



$$P_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{s^2 + as + K_1} \quad (8.52)$$

$$P_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{s^2 + (a + K_1K_2)s + K_1} \quad (8.53)$$

Општиот облик на преносна функција на систем од втор ред, според равенка (3.121) ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8.54)$$

Со споредување на равенката (8.52) и равенката (8.53) со равенката (8.54) се добива:

За дадениот систем (слика 8.13):

$$\begin{aligned} \omega_{n,1} &= \sqrt{K_1} \\ \xi_1 &= \frac{a}{2\sqrt{K_1}} \end{aligned} \quad (8.55)$$

За системот со дополнителна локална повратна омча (слика 8.14):

$$\begin{aligned} \omega_{n,2} &= \sqrt{K_1} \\ \xi_2 &= \frac{a + K_1K_2}{2\sqrt{K_1}} = \xi_1 + \frac{1}{2}\sqrt{K_1}K_2 \end{aligned} \quad (8.56)$$

Од добиените резултати (8.55) и (8.56) може да се заклучи дека непригушената природна фреквенција (сопствената фреквенција) на системите во двата случаја останува иста, додека пригушувањето на системот со дополнителна повратна омча е поголемо од пригушувањето на основниот систем за вредност:

$$\frac{1}{2}\sqrt{K_1}K_2.$$

Што се однесува на компарацијата на стационарните карактеристики на двата системи, тие може да се валоризираат преку споредување на грешките во стационарната состојба на излезите за двата системи поединечно.

Стационарните грешки, коишто ги прави првиот систем, според табела 8.1, ќе бидат:

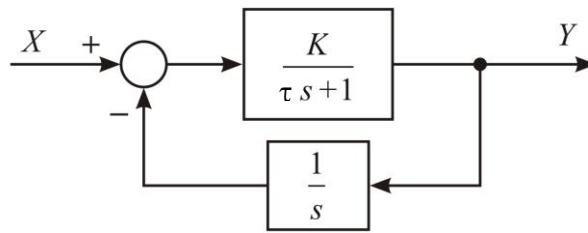
$$\begin{aligned}
 K_{p,1} &= \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1}{s(s+a)} = \infty, & e_{p,1}(\infty) &= \frac{1}{1+K_{p,1}} = 0 \\
 K_{v,1} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_1}{s(s+a)} = \frac{K_1}{a}, & e_{v,1}(\infty) &= \frac{1}{K_{v,1}} = \frac{a}{K_1} \\
 K_{a,1} &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K_1}{s(s+a)} = 0, & e_{a,1}(\infty) &= \frac{1}{K_{a,1}} = \infty
 \end{aligned} \tag{8.57}$$

Стационарните грешки за системот со дополнителна повратна омча се:

$$\begin{aligned}
 K_{p,2} &= \lim_{s \rightarrow 0} G_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_1}{s(s+a+K_1K_2)} = \infty, & e_{p,2}(\infty) &= \frac{1}{1+K_{p,2}} = 0 \\
 K_{v,2} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_1}{s(s+a+K_1K_2)} = \frac{K_1}{a+K_1K_2}, \\
 e_{v,2}(\infty) &= \frac{1}{K_{v,2}} = \frac{a+K_1K_2}{K_1} = e_{v,1}(\infty) + K_2 \\
 K_{a,2} &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K_1}{s(s+a+K_1K_2)} = 0, & e_{a,2}(\infty) &= \frac{1}{K_{a,2}} = \infty
 \end{aligned} \tag{8.58}$$

Со анализа на стационарните грешки што ги прават и двата системи, може да се заклучи дека и двата системи, добро, без грешка, пратат позиција и дека воопшто не можат да пратат забрзување, односно забрзувачката стационарна грешка им е еднаква и бесконечно голема. Брзинската стационарна грешка, која што ја прави системот со дополнителна повратна омча е поголема од брзинската грешка за дадениот систем за износ  $K_2$ .

**Задача 8.7.** Со следниот блок-дијаграм е претставен систем, кој што апроксимира чист диференцијатор за мали вредности на параметарот  $\tau$  и за големи вредности на засилувањето  $K$  (слика 8.16):



Слика 8.16. Блок-дијаграм на приближен диференцијатор

Неговата преносна функција е:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ks}{s(\tau s + 1) + K} \quad (8.59)$$

Очигледно е дека: 
$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ K \rightarrow \infty}} P(s) = s \quad (8.60)$$

т.е. неговата преносна функција е чист диференцијатор во лимит.

Да се определат грешките на сталната состојба на излезот за дадениот систем во однос на сталната состојба на излезот на идеален диференцијатор, односно колку успешно дадениот систем ќе прати позиција, врзина и забрзување во однос на чистиот диференцијатор.

**Решение:** Системот е стабилен за сите вредности на  $\tau > 0$  и  $K > 0$ .

Константата на позиционата грешка  $K_p$  се определува според равенка (8.17):

$$K_p \equiv \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ s - \frac{Ks}{s(\tau s + 1) + K} \right]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^2(\tau s + 1)}{s(\tau s + 1) + K} \right]} = \infty \quad (8.61)$$

Позиционата грешка на сталната состојба, според равенка (8.18), ќе биде:

$$e_p(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_p} = 0 \quad (8.62)$$

Константата на брзинската грешка  $K_v$  се определува според равенка (8.19):

$$K_v \equiv \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s} \cdot \frac{s^2(\tau s + 1)}{s(\tau s + 1) + K} \right]} = \infty \quad (8.63)$$

Брзинската грешка на сталната состојба, според равенка (8.20), ќе биде:

$$e_v(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_v} = 0 \quad (8.64)$$

Константата на забрзувачката грешка  $K_a$ , според равенка (8.21), ќе биде:

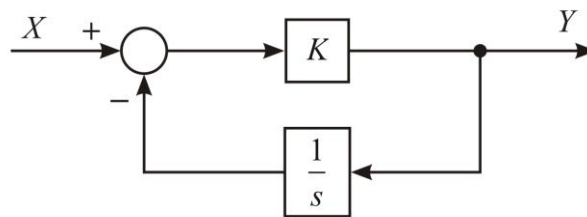
$$K_a \equiv \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s^2} \cdot \frac{s^2(\tau s + 1)}{s(\tau s + 1) + K} \right]} = K \quad (8.65)$$

Забрзувачката грешка на сталната состојба се пресметува според равенка (8.22) и таа изнесува:

$$e_a(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K} \quad (8.66)$$

Со анализа на добиените резултати од равенките (8.62), (8.64) и (8.66) може да се заклучи дека дадениот систем ќе се однесува идентично како чист диференцијатор во однос на пратење на позиција и брзина, но во однос на пратење на забрзување ќе прави грешка  $1/K$ , која што, за големи вредности на  $K$ , ќе биде незначително мала.

**Задача 8.8.** Даден е реален систем со неговиот блок-дијаграм, слика 8.17:



Слика 8.17. Блок-дијаграм на реален систем

Од системот се бара да реализира; кога на влезот се доведе единечна нагибна функција (единечна рампа), на излезот треба да се добие единечна одскочна функција.

Кои ќе бидат отстапувањата на стационарните вредности на излезот во однос на излезот на идеалниот систем, кога на влезот се доведат:

- а). Единечна одскачна функција.  
 б). Единечна нагибна функција.  
 в). Единечна парабола.

**Решение:** Согласно условите дадени во задачата, идеалниот систем треба да претставува чист диференцијатор, односно:

$$P_i(s) = s \quad (8.67)$$

Преносната функција за дадениот реален систем (слика 8.17) ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ks}{s+K} \quad (8.68)$$

Очигледно е дека системот е стабилен за сите позитивни вредности на  $K$ .

а). Константата на позиционата грешка ќе биде:

$$K_p = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left( s - \frac{Ks}{s+K} \right)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s^2}{s+K} \right)} = \infty \quad (8.69)$$

Позиционата грешка на стационарната состојба е:

$$e_p(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_p} = 0 \quad (8.70)$$

б). Константата на брзинската грешка се определува од изразот:

$$K_v = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{s^2}{s+K}} = \infty \quad (8.71)$$

Брзинската грешка на сталната состојба ќе биде:

$$e_v(\infty) = \frac{1}{K_v} = 0 \quad (8.72)$$

в). Константата на забрзувачката грешка ќе биде:

$$K_a = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{s^2}{s+K}} = K \quad (8.73)$$

Забрзувачката грешка на сталната состојба ќе се определи од изразот:

$$e_a(\infty) = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K} \quad (8.74)$$

Според тоа, и за овој систем ќе важи истиот заклучок како и за системот даден во задача 8.7, односно, колку е поголема вредноста на засилувањето  $K$ , толку системот со своите статички карактеристики ќе се приближува до однесувањето на чист диференцијатор.

**Задача 8.9.** Даден е реален систем со неговиот математички модел:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + y = \frac{dx}{dt} + 100x \quad (8.75)$$

Овој систем треба да биде употребен како засилувач. Дали ќе ја задоволи таа улога и со колкава стационарна грешка, доколку на влезот се доведе: единечна отскочна функција -  $u(t)$ , единечна рампа -  $r(t)$  и единечна парабола -  $p(t)$ ?

**Решение:** Од математичкиот модел на системот (8.75), со примена на Лапласова трансформација лесно може да се добие преносната функција на системот:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+100}{s^3+3s^2+4s+1} \quad (8.76)$$

Карактеристичната равенка на системот е:

$$s^3 + 3s^2 + 4s + 1 = 0 \quad (8.77)$$

Routh-овата табела за добиената карактеристична равенка (8.77) е:

	$s^3 + 3s^2 + 4s + 1 = 0$	
$s^3$	1	4
$s^2$	3	1
$s^1$	$11/3$	0
$s^0$	1	

Според тоа, системот е стабилен, бидејќи во првата колона од Routh-овата табела сите членови се позитивни.

Со оглед на тоа дека системот е стабилен, грешките кои што ги прави системот во стационарната состојба, за дадените функции на влезот, ќе се пресметаат според равенките (8.18), (8.20) и (8.22).

Идеалниот систем треба да биде засилувач, со засилување еднакво на нултото засилување на реалниот систем, односно:

$$P_i(s) = k = \lim_{s \rightarrow 0} P(s) = 100 \quad (8.78)$$

Грешките на сталната состојба на излезот за дадениот систем во однос на сталната состојба на излезот на идеален засилувач (8.78) ќе бидат:

$$K_p = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left( 100 - \frac{s+100}{s^3 + 3s^2 + 4s + 1} \right)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{100s^3 + 300s^2 + 399s}{s^3 + 3s^2 + 4s + 1} \right)} = \infty$$

$$e_p(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_p} = 0$$

$$K_v = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left( \frac{100s^2 + 300s + 399}{s^3 + 3s^2 + 4s + 1} \right)} = \frac{1}{399} \quad (8.79)$$

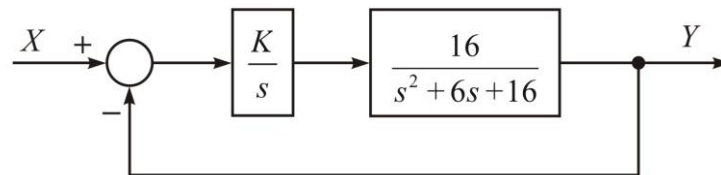
$$e_v(\infty) = \frac{1}{K_v} = 399$$

$$K_a = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \left( \frac{100s^2 + 300s + 399}{s^3 + 3s^2 + 4s + 1} \right)} = 0$$

$$e_a(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty$$

Според резултатите од анализата на статичките карактеристики на дадениот реален систем може да се заклучи дека тој може да се користи како засилувач, бидејќи статичката грешка при пратење на позиција е еднаква на нула. Овој систем може да прати и промена на брзината но со значајно голема грешка. Системот, воопшто не може да прати забрзување.

**Задача 8.10.** Даден е реален систем со единична негативна повратна омча со неговиот блок-дијаграм (слика 8.17), со објект на управување -  $G_2(s)$ , систем од втор ред, и управувачки елемент -  $G_1(s)$ , чист интегратор со засилување  $K$ :



Слика 8.18. Блок-дијаграм на реален систем со единична повратна врска

- а). Да се определи засилувањето  $K$ , така да е крајната вредност на брзинската грешка во стационарна состојба на системот:  $e_v(\infty) < 0,5$ .
- б). Дали системот може да се подеси, и за попрецизно пратење на брзинските промени, односно ако треба да е крајната вредност на брзинската грешка во стационарна состојба на системот:  $e_v(\infty) < 0,1$ ?

**Решение:** Кружната преносна функција за дадениот систем ќе биде:

$$GH(s) = \frac{16K}{s(s^2 + 6s + 16)} \quad (8.80)$$

За да се провери стабилноста на системот потребно е да се определи карактеристичната равенка на системот:

$$1 + GH(s) = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 16s + 16K = 0 \quad (8.81)$$

Routh-овата табела за добиената карактеристична равенка (8.81) е:

	$s^3 + 6s^2 + 16s + 16K = 0$	
$s^3$	1	16
$s^2$	6	16K
$s^1$	$\frac{96 - 16K}{6}$	0
$s^0$	16K	

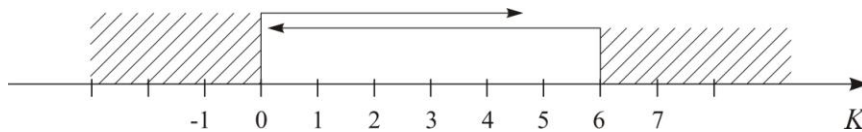


За да биде системот е стабилен, потребно е сите членови од првата колона во Routh-овата табела да се позитивни.

$$\text{Од } s^0 \text{ - редот следи: } 16K > 0 \quad \Rightarrow \quad K > 0$$

$$\text{а од } s^1 \text{ - редодот се добива: } 96 - 16K > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 6$$

Овие услови се нанесени на реалната оска за вредностите на засилувањето  $K$  и прикажани се на слика 8.19.



Слика 8.19. Дозволените вредности за засилувањето  $K$

Системот ќе биде стабилен ако засилувањето  $K$  се менува во границите:

$$0 < K < 6 \quad (8.82)$$

а). Константата на брзинска грешка  $K_v$ , односно константата на грешка кога на влезот на системот се доведе единечна рампа, ќе биде:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot GH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{16K}{s(s^2 + 6s + 16)} = K \quad (8.83)$$

Брзинската грешка на сталната состојба на излезот ќе биде:

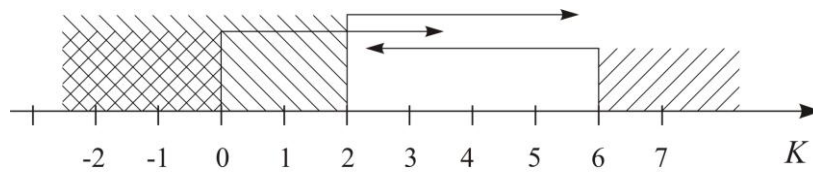
$$e_v(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} \quad (8.84)$$

Од условот во задачата следи:

$$e_v(\infty) = \frac{1}{K} < 0,5, \text{ односно } K > 2 \quad (8.85)$$

Според тоа, за да биде системот стабилен и да биде исполнет условот за големината на брзинската грешка, вредноста на засилувањето  $K$  треба да биде, истовремено, и во границите (8.82) и да биде задоволен условот (8.85).

Овие услови се нанесени на реалната оска за вредностите на засилувањето  $K$  и прикажани се на слика 8.20.

Слика 8.20. Дозволените вредности за засилувањето  $K$  за исполнување на двата условия

Од слика 8.20, јасно се гледа, дека засилувањето  $K$  треба да се менува во границите:

$$2 < K < 6 \quad (8.86)$$

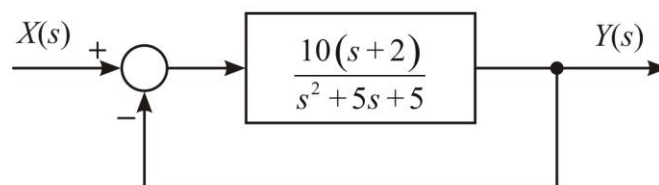
б). Од дополнителниот услов во задачата следи:

$$e_v(\infty) = \frac{1}{K} < 0,1, \text{ односно } K > 10 \quad (8.87)$$

Од условот (8.82) за стабилноста на системот, за вредноста на засилувањето  $K$  се добива:  $0 < K < 6$ , а за да биде исполнет условот (8.87) за големината на брзинската грешка, треба да биде:  $K > 10$ , што не може истовремено да биде исполнето.

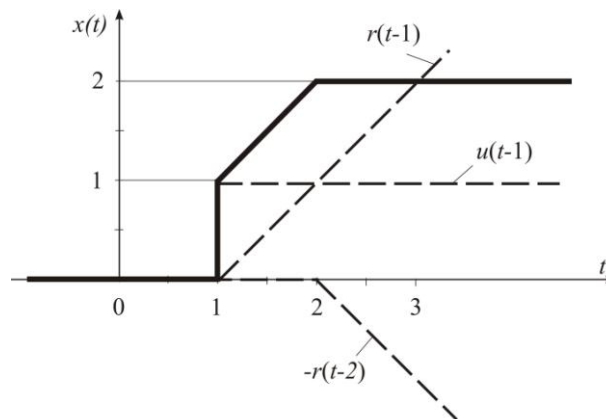
Според тоа, овој систем не може да се подеси да има брзинска грешка во стационарната состојба  $e_v(\infty) < 0,1$ . Најголемата точност што може да постигне со овој систем, во однос на брзинската грешка во стационарна состојба, изнесува  $e_v(\infty) > 0,1667$ .

**Задача 8.11.** Даден е реален систем со единична негативна повратна омча со неговиот блок-дијаграм (слика 8.21):



Слика 8.21. Блок-дијаграм на реален систем со единична повратна врска

Да се определи грешката на системот во стационарната состојба ( $t \rightarrow \infty$ ), ако на влезот е доведена функцијата прикажана на слика 8.22.



Слика 8.22. Функција на влез на системот

**Решение:** Од слика 8.22 може лесно, со помош на основните функции, да се определи функцијата на влез на системот, и таа ќе изнесува:

$$x(t) = u(t-1) + r(t-1) - r(t-2) \quad (8.88)$$

Според тоа, влезната функција во стационарната состојба ( $t \rightarrow \infty$ ) ќе биде:

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 2 \quad (8.88)$$

односно, влезната функција во стационарна состојба ќе биде отскочна функција со интензитет 2:  $x(\infty) = 2u(t)$ .

Од овде следи дека системот треба да се провери само каква грешка ќе прави во стационарна состојба ако на влезот е доведена отскочна функција, односно:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 2 \cdot e_p(\infty) \quad (8.89)$$

Кружната преносна функција за дадениот систем ќе биде:

$$GH(s) = \frac{10(s+2)}{s^2 + 5s + 5} \quad (8.90)$$

Според табела 8.1, константата на позициона грешка  $K_p$ , односно константата на грешка кога на влезот на системот се доведе единечна отскочна функција, ќе биде:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} GH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+2)}{s^2 + 5s + 5} = 4 \quad (8.91)$$

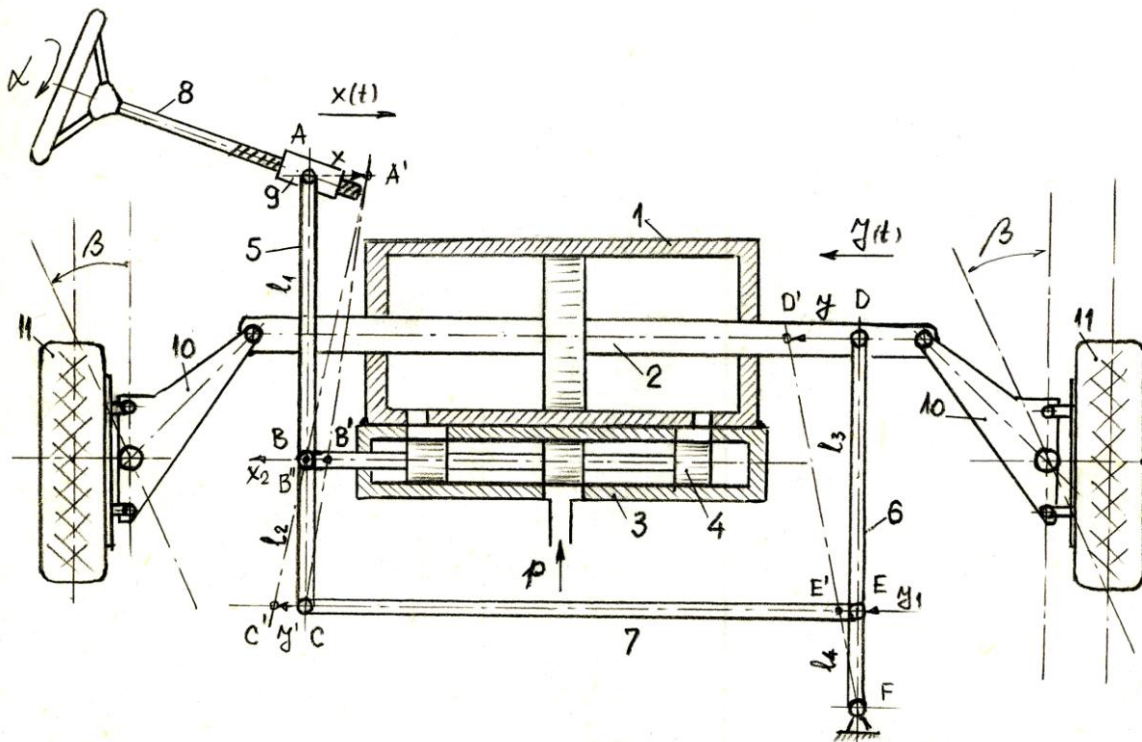
Грешката на сталната состојба на излезот, за влез единечна отскочна функција ќе биде:

$$e_p(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad (8.92)$$

Според тоа, грешката што ќе прави системот во стационарна состојба за влезната функција зададена на слика 8.22 ќе биде:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 2 \cdot e_p(\infty) = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \quad (8.93)$$

**Задача 8.12.** На слика 8.23 е претставена скица на хидрауличен волан за управување на возило. Всушност, овој хидрауличен систем претставува систем на пратење на позиција, односно како се менува влезот  $x(t)$ , така треба, пропорционално, да се менува излезот  $y(t)$ .



Слика 8.23. Скица на хидрауличен волан

Хидрауличниот волан во стационарна состојба треба да обезбеди пропорционалност помеѓу ротацијата на воланот, односно поместувањето на точката  $A$  за  $x(t)$ , влез на системот, и ротацијата на тркалата на возилото, односно поместувањето на точката  $D$  за  $y(t)$ , излез на системот, во сооднос  $1 : 5$ .

а). Да се определат стационарните грешки што ги прави овој хидрауличен волан во однос на идеалниот систем за пратење на позиција, во случај побудата да биде: единечна отскочна функција, единечна рампа или единечна параболоа.

б). Кој услов треба да биде исполнет, во однос на конструктивните карактеристики на системот, за да се намали стационарната грешка?

**Решение:** Според скицата дадена на слика 8.23 ќе се објасни принципот на работа на хидрауличниот волан за управување на возило.

Со ротација на воланот (8), преку завојното вратило и навртката (9) се поместува лостот (5) во десно за позиција  $x(t)$ , односно точката  $A$  се поместува во позиција  $A'$ . Ова е овозможено, бидејќи во почетниот момент, коморите на цилиндерот (1) се блокирани, а со тоа е блокиран и лостот (6), односно точката  $C$  од лостот (5) е со фиксна позиција. Со поместување на точката  $A$  за позиција  $x(t)$ , клипчето (4) на распоредникот (3), односно точката  $B$  од лостот (5), ќе се помести во десно за позиција  $x_1(t)$ . Ова ќе предизвика поместување на клипот (2) на хидрауличниот цилиндар (1) во лево за позиција  $y(t)$ , односно точката  $D$  од лостот (6) ќе се помести во позиција  $D'$ . Со ова, точката  $E$  од лостот (6) ќе се помести во лево во позиција  $E'$ , односно за поместување  $y_1(t)$ .

Бидејќи преку воланот и завојното вратило (8) и навртката (9), точката  $A'$  се одржува во фиксна позиција, сега лостот (5) ќе ротира околу таа точка, и точката  $C$  ќе се помести за позиција  $y_1(t)$ , односно во позиција  $C'$ . Со ова, клипчето (4) на хидрауличниот распоредник (3) ќе се врати за позиција  $x_2(t)$ , односно точката  $B$  ќе се помести во позиција  $B''$ , која што мора да се поклопи со почетната позиција на точката  $B$ , односно клипчето (4) на распоредник (3)

треба да се постави во почетна блокирана позиција. На овој начин, преку клипњачата (2) на хидрауличниот цилиндар (1) и механизмот (10) ќе се заротираат тркалата на возилото за определен агол, пропорционално на ротацијата на воланот (8).

Во овој случај, треба да се напомене дека ротацијата на тркалата на возилото се одвива континуирано, во зависност од ротацијата на воланот (8), а не како што беше објаснето, дека овој процес на позиционирање се одвива секвенцијално. Овој начин на презентирање на процесот на управување на аголот на ротација на предните тркала на возилото е неопходен за да може полесно да се објасни принципот на работа и да се изведе математичкиот модел на хидрауличен волан.

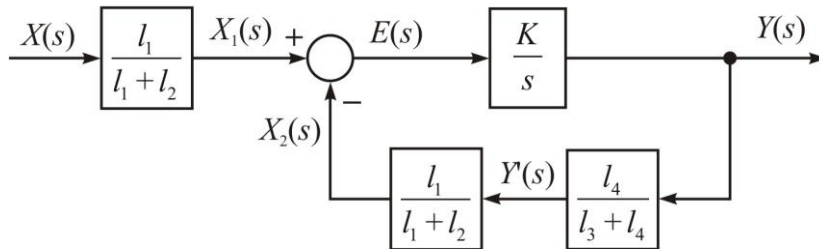
а). Согласно скицата на хидрауличниот волан дадена на слика 8.23 и објаснувањето на начинот на функционирање на истиот, лесно може да се нацрта блок-дијаграмот на дадениот систем на управување (слика 8.24). Притоа, поместувањето на точката  $A$  од лостот (5), кое што е пропорционално на аголот на ротација на воланот во зависност од чекорот на навојницата, претставува влез на системот -  $x(t)$ , а поместувањето на клипњачата на хидрауличниот цилиндар (1), односно точката  $D$  од лостот (6), кое што е, пак, пропорционално на аголот на ротација на тркалата на возилото, во зависност од димензиите на механизмот (10), претставува излез на управувачкиот систем -  $y(t)$ .

За преносна функција на хидрауличната контура: распоредник и позиционен цилиндар, се користи најапроксимираната (наједноставната) зависност дадена со равенка (2.183):

$$\frac{Y}{E}(s) = \frac{K}{s} \quad (8.94)$$

каде што е:  $K$  - засилување на хидрауличната контура, коешто воглавно зависи од димензиите на распоредникот и на цилиндарот, притисокот во системот, типот на работната течност и струјните карактеристики на проточните површини (равенка 2.181, 2.183). Во реални системи вредноста на  $K$  се движи во граници:  $K = 1,5 \cdot 10^3 \div 3 \cdot 10^3$ . Во конкретниот пример се усвојува  $K = 2800$ .

Блок-дијаграмот за дадениот управувачки систем, заедно со поединечните преносни функции за секој блок поединечно, е прикажан на слика 8.24.



Слика 8.24. Блок дијаграм на хидрауличен волан

Преносната функција на дадениот управувачки систем на хидрауличен волан, се определува од блок-дијаграмот даден на слика 8.24, и таа ќе изнесува:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{K \cdot l_2 \cdot (l_3 + l_4)}{s \cdot (l_1 + l_2)(l_3 + l_4) + K \cdot l_1 \cdot l_4} \quad (8.95)$$

Системот е стабилен за сите вредности на:  $l_1, l_2, l_3, l_4, K > 0$ .

Ако се усвои дека односот на должините на краците на лостовите (5) и (6) се дадени си некој преносен однос  $i$ , тогаш ќе важи:

$$\frac{l_1}{l_2} = i_1, \quad \frac{l_3}{l_4} = i_2 \quad (8.96)$$

Од условот на задачата, очигледно е дека идеалниот (пожелниот) систем претставува чист пропорционален елемент со засилување 2, односно:

$$P_i(s) = 5 \quad (8.97)$$

Според тоа се добива:

$$P_i(s) - P(s) = \frac{5s(l_1 + l_2)(l_3 + l_4) + K[5l_1l_4 - l_2(l_3 + l_4)]}{s(l_1 + l_2)(l_3 + l_4) + Kl_1l_4} \quad (8.98)$$

Константите на грешки и грешките во сталната состојба за основните тест функции ќе бидат:

Константата на позиционата грешка ќе биде:

$$K_p = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} [P_i(s) - P(s)]} = \frac{l_1l_4}{5l_1l_4 - l_2(l_3 + l_4)} \quad (8.99)$$

Позиционата грешка на стационарната состојба е:

$$e_p(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \frac{1}{K_p} = 5 - \frac{l_2(l_3 + l_4)}{l_1 l_4} \quad (8.100)$$

За вака апроксимираниот математички модел на хидрауличниот систем од хидрауличниот волан, веднаш се гледа, дека брзинската и забрзувачката константа на грешка се:

$$K_v = K_a = 0 \quad (8.101)$$

од каде што следи дека брзинската и забрзувачката грешка на сталната состојба ќе бидат:

$$e_v(\infty) = e_a(\infty) = \infty \quad (8.102)$$

Од овде може да се заклучи, дека вака конципираниот систем може успешно да прати позиција, со некоја грешка, но неможе да ја прати брзината и забрзувањето на промената на позицијата на воланот.

б). Со анализа на добиениот резултат за позиционата грешка на сталната состојба, равенка (8.100), јасно е дека системот ќе се изедначи со однесувањето на идеалниот систем, во однос на пратење на позиција, ако грешката е еднаква на нула, односно:

$$e_p(\infty) = 5 - \frac{l_2(l_3 + l_4)}{l_1 l_4} = 0 \quad (8.103)$$

Од каде што следи условот во однос на конструктивните карактеристики, при што треба да биде исполнето:

$$5l_1 l_4 = l_2(l_3 + l_4) \quad (8.104)$$

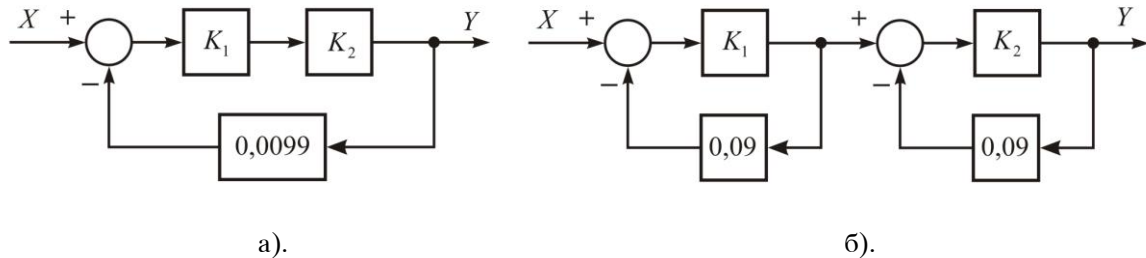
или изразено преку преносните односи (8.96), ќе биде:

$$5i_1 = i_2 + 1 \quad (8.105)$$

Според тоа, ако се усвои да е односот на должините на краците на лостот (5) еднаков на  $i_1 = 2$ , односно да е:  $l_1 = 2 \cdot l_2$ , тогаш, во однос на пратење на позицијата, реалниот систем ќе се изедначи со однесувањето на идеалниот систем, ако е исполнето да е односот на должините на краците на лостот (6) еднаков на  $i_2 = 9$ , односно да е:  $l_3 = 9 \cdot l_4$ .



**Задача 8.13.** На слика 8.25 се претставени блок-дијаграмите на два система:



Слика 8.25. Блок-дијаграми на два система

- а). Да се определат преносните функции на двата системи за  $K_1 = K_2 = 100$ .
- б). Да се определат осетливостите на овие два системи во однос на параметарот  $K_1$ , за номиналните вредности:  $K_1 = K_2 = 100$ .

**Решение:** а). Според блок-дијаграмите дадени на слика 8.25 лесно може да се определат преносните функции на двата системи, и тие ќе бидат:

$$P_1(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{K_1 \cdot K_2}{1 + 0,0099 \cdot K_1 \cdot K_2}, \text{ односно} \quad P_1(s) \Big|_{\substack{K_1=100 \\ K_2=100}} = 100 \quad (8.106)$$

$$P_2(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{K_1}{1 + 0,09 \cdot K_1} \cdot \frac{K_2}{1 + 0,09 \cdot K_2}, \text{ односно} \quad P_2(s) \Big|_{\substack{K_1=100 \\ K_2=100}} = 100 \quad (8.107)$$

Од равенките (8.106) и (8.107) може да се заклучи дека преносните функции на двата системи се идентични за номиналните вредности:  $K_1 = K_2 = 100$ .

- б). Според равенка (8.23) ќе се пресмета осетливоста на преносната функција секој од системите во однос на параметарот  $K_1$ , за номиналните вредности:  $K_1 = K_2 = 100$ :

$$S_{K_1}^{P_1(K_1)} = \frac{K_1}{P_1(K_1)} \cdot \frac{dP_1(K_1)}{dK_1} = \frac{1}{1 + 0,0099 \cdot K_1 \cdot K_2},$$

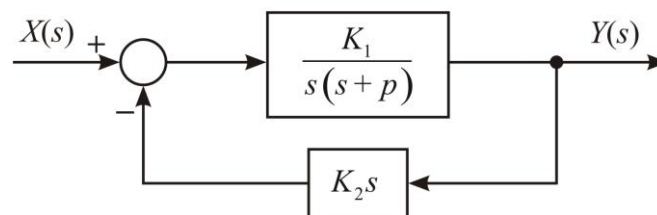
$$\text{односно} \quad S_{K_1}^{P_1(K_1)} \Big|_{K_2=100} = \frac{1}{1 + 0,99 \cdot K_1} \Big|_{K_1=100} = 0,01 \quad (8.108)$$

$$S_{K_1}^{P_2(K_1)} = \frac{K_1}{P_2(K_1)} \cdot \frac{dP_2(K_1)}{dK_1} = \frac{1}{1 + 0,09 \cdot K_1},$$

$$\text{односно } S_{K_1}^{P_2(K_1)} \Big|_{K_2=100} = \frac{1}{1 + 0,09 \cdot K_1} \Big|_{K_1=100} = 0,1 \quad (8.109)$$

Од равенките (8.108) и (8.109) може да се заклучи дека вториот систем -  $P_2(s)$  е за 10 пати поосетлив од првиот систем -  $P_1(s)$  по однос на промената на параметарот  $K_1$ , односно ако се промени параметарот  $K_1$  за 10%, тоа ќе предизвика промена од  $\approx 0,1\%$  на вредноста на  $P_1(s)$  и промена од  $\approx 1\%$  на вредноста на  $P_2(s)$ .

**Задача 8.14.** Даден е систем на автоматско управување на слика 8.26:



Слика 8.26. Блок дијаграм на систем на автоматско управување

- Да се определи осетливоста на системот на промената на секој од параметрите  $K_1$ ,  $K_2$  и  $p$ .
- На кој параметар системот ќе биде најосетлив (само по основ на големината на  $|P(j\omega)|$ ) ако влезот е простопериодична функција со услови  $\omega \gg p$  и  $\omega \gg K_1 K_2$ , и за номинални вредности на параметрите:  $p = 0,1$ ,  $K_1 = 0,5$ ,  $K_2 = 0,4$ .

**Решение:** а). Според блок-дијаграмот даден на слика 8.26 се определува преносната функција на системот на автоматско управување:

$$P(s) = \frac{Y}{X}(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)} = \frac{K_1}{s \cdot (s + p + K_1 K_2)} \quad (8.110)$$

Осетливоста на системот за секој од параметарите  $K_1$ ,  $K_2$  и  $p$  поединечно, ќе се определи според равенка (8.23) и таа ќе изнесува:

$$S_{K_1}^{P(K_1)} = \frac{K_1}{P(K_1)} \cdot \frac{dP(K_1)}{dK_1} = \frac{s+p}{s+p+K_1K_2} \quad (8.111)$$

$$S_{K_2}^{P(K_2)} = \frac{K_2}{P(K_2)} \cdot \frac{dP(K_2)}{dK_2} = -\frac{K_1K_2}{s+p+K_1K_2} \quad (8.112)$$

$$S_p^{P(p)} = \frac{p}{P(p)} \cdot \frac{dP(p)}{dp} = -\frac{p}{s+p+K_1K_2} \quad (8.113)$$

б). Функцијата на фреквентниот одзив на еден систем може да се добие директно од преносната функција на системот, доколку е таа позната, преку замена на комплексната променлива -  $s$  со имагинарната вредност -  $j\omega$ , и таа за дадениот систем (рвенка 8.110) ќе изнесува:

$$P(j\omega) = \frac{K_1}{j\omega \cdot (j\omega + p + K_1K_2)} \quad (8.114)$$

Големината на функцијата на фреквентниот одзив (равенка 8.114) ќе биде:

$$|P(j\omega)| = \frac{K_1}{\omega \cdot \sqrt{\omega^2 + (p + K_1K_2)^2}} \quad (8.115)$$

Осетливоста на големината на преносната функција -  $|P(j\omega)|$  за секој од параметарите  $K_1$ ,  $K_2$  и  $p$  поединечно, ќе се определи според равенка (8.25) и таа ќе изнесува:

$$S_{K_1}^{|P(K_1)|} = \frac{K_1}{|P(K_1)|} \cdot \frac{d|P(K_1)|}{dK_1} = 1 - \frac{K_1K_2(p + K_1K_2)}{\omega^2 [\omega^2 + (p + K_1K_2)^2]} \quad (8.116)$$

$$S_{K_2}^{|P(K_2)|} = \frac{K_2}{|P(K_2)|} \cdot \frac{d|P(K_2)|}{dK_2} = -K_1K_2(p + K_1K_2) \quad (8.117)$$

$$S_p^{|P(p)|} = \frac{p}{|P(p)|} \cdot \frac{d|P(p)|}{dp} = -p(p + K_1K_2) \quad (8.118)$$

Според условот даден во задачата, ако влезот е прстопериодична функција со услови  $\omega \gg p$  и  $\omega \gg K_1 K_2$ , и за номинални вредности на параметрите:  $p = 0,1$ ,  $K_1 = 0,5$  и  $K_2 = 0,4$ , осетливостите на системот (8.116, 8.117 и 8.118) ќе бидат:

$$S_{K_1}^{|P(K_1)|} = 1, S_{K_2}^{|P(K_2)|} = -0,06, S_p^{|P(p)|} = -0,03 \quad (8.119)$$

Според тоа, системот е најосетлив на промените на параметарот (засилувањето) -  $K_1$ , потоа на промените на параметарот -  $K_2$ , а најмалку е осетлив на промените на параметарот (полот) -  $p$ .

**Задача 8.15.** За системот даден во задача 8.6 со неговиот блок-дијаграм на слика 8.13 и за системот со вградена локална повратна омча, даден на слика 8.14, да се определи осетливоста, на секој од системите поединечно, во однос на параметрите  $K_1$  и  $a$  и да се искоментира промената на осетливостите со воведувањето на локалната повратна омча.

**Решение:** Преносните функции на двата система се дадени со равенките (8.52) и (8.53), односно:

$$P_1(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{s^2 + as + K_1} \quad (8.120)$$

$$P_2(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_1}{s^2 + (a + K_1 K_2)s + K_1} \quad (8.121)$$

Осетливоста на двете преносни функции (8.120) и (8.121) во однос на параметрите  $K_1$  и  $a$  ќе се определи според равенка (8.23), и тие ќе бидат:

$$S_{K_1}^{P_1(K_1)} = \frac{K_1}{P_1(K_1)} \cdot \frac{dP_1(K_1)}{dK_1} = \frac{s(s+a)}{s^2 + as + K_1} \quad (8.122)$$

$$S_a^{P_1(a)} = \frac{a}{P_1(a)} \cdot \frac{dP_1(a)}{da} = \frac{-as}{s^2 + as + K_1} \quad (8.123)$$

$$S_{K_1}^{P_2(K_1)} = \frac{K_1}{P_2(K_1)} \cdot \frac{dP_2(K_1)}{dK_1} = \frac{s(s+a)}{s^2 + (a + K_1 K_2)s + K_1} \quad (8.124)$$

$$S_a^{P_2(a)} = \frac{a}{P_2(a)} \cdot \frac{dP_2(a)}{da} = \frac{-as}{s^2 + (a + K_1 K_2)s + K_1} \quad (8.125)$$

За да се споредат осетливостите на двете преносни функции (8.120) и (8.121) во однос на секој од параметрите  $K_1$  и  $a$  поединечно, истите ќе се поделат, односно ќе се добие:

$$\frac{S_{K_1}^{P_2(K_1)}}{S_{K_1}^{R_1(K_1)}} = \frac{\frac{s(s+a)}{s^2 + (a + K_1 K_2)s + K_1}}{\frac{s(s+a)}{s^2 + as + K_1}} = \frac{1}{1 + \frac{K_1 K_2 s}{s^2 + as + K_1}} \quad (8.126)$$

$$\frac{S_a^{P_2(a)}}{S_a^{R_1(a)}} = \frac{\frac{-as}{s^2 + (a + K_1 K_2)s + K_1}}{\frac{-as}{s^2 + as + K_1}} = \frac{1}{1 + \frac{K_1 K_2 s}{s^2 + as + K_1}} \quad (8.127)$$

Од равенките (8.126) и (8.127), очигледно е дека и осетливоста по параметарот  $K_1$  и осетливоста по параметарот  $a$ , идентично ќе се променат со воведувањето на локалната повратна омча во системот. И двата системи ќе бидат еднакво осетливи на промените на параметрите  $K_1$  и  $a$ , само ако е  $s=0$ . За сите други вредности на  $s$ , системот со вградена локална повратна омча (8.121) ќе биде помалку осетлив на промените на параметарот  $K_1$  и на параметарот  $a$ , во однос на првиот систем (8.120).

Овој заклучок може да се донесе затоа што за  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$  и  $a > 0$ , ќе важи:

$$\frac{K_1 K_2 s}{s^2 + as + K_1} > 0, \text{ односно } S_{K_1}^{R_1(K_1)} > S_{K_1}^{P_2(K_1)} \text{ и } S_a^{R_1(a)} > S_a^{P_2(a)} \quad (8.128)$$

### Задачи за вежбање:

**Задача 8.16.** Даден е систем со единечна негативна повратна врска и со преносна функција во директната гранка:

$$G(s) = \frac{K_1(2s+1)}{s(4s+1)(s+1)^2} \quad (8.129)$$

На влезот е доведена побудата:  $x(t) = u(t) + 0,5r(t) \stackrel{t>0}{=} 1 + 0,5t$ .

а). За дадениот влез, грешката што ја прави системот во стационарната состојба, треба да изнесува  $e(\infty) \leq 0,1$ . Да се определи најмалата вредност на засилувањето  $K_1$ , која што го задоволува ова барање.

б). Дали е системот стабилен за вредноста на  $K_1$  определена под (а)?

в). Дали системот ќе биде стабилен ако дозволената крајна грешка за дадениот влез изнесува  $e(\infty) = 0,5$

**Решение:** а). Лапласовата трансформација на влезот ќе биде:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} \quad (8.130)$$

Во зависност од дадениот влез (8.130) и според табела 8.1 се определува вкупната грешка на сталната состојба на излезот, и таа ќе биде:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_p(\infty) + 0,5 \cdot e_v(\infty) = \frac{1}{2K_1} \quad (8.131)$$

За да биде исполнето барањето под (а), според равенка (8.131), се добива дека вредноста на засилувањето  $K_1$  треба да биде:  $K_1 \geq 5$ .

б). Карактеристичната равенка за овој систем ќе биде:

$$1 + G(s) = 0, \quad \text{односно:} \quad 4s^4 + 9s^3 + 6s^2 + 11s + 5 = 0 \quad (8.132)$$

Со проверка на апсолутната стабилност на системот со помош на Routh-овиот критериум се добива дека овој систем е нестабилен, поточно, два пола од карактеристичната равенка го прават системот нестабилен.

в). Ако дозволената крајна грешка за дадениот влез изнесува  $e(\infty) = 0,5$ , тогаш според равенка (8.131) се добива дека вредноста на засилувањето е:  $K_1 = 1$ .

Карактеристичната равенка за овој систем ќе биде:

$$4s^4 + 9s^3 + 6s^2 + 3s + 1 = 0 \quad (8.133)$$

Според Routh-овиот критериум на стабилност се добива дека овој систем е апсолутно стабилен.

**Задача 8.17.** Математичкиот модел на еден систем со единична негативна повратна врска е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 10 \frac{d^3 y}{dt^3} + 24 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 2y = 2x \quad (8.134)$$

Да се определат, стационарната: позициона, брзинска и забрзувачка грешка, кои што ги прави зададениот систем.

**Решение:** Преносната функција на дадениот систем се добива директно од диференцијалната равенка (8.134), со замена на линеарниот оператор на диференцирање  $D \equiv \frac{d}{dt}$  со лапасовиот оператор  $s$ , и таа ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s^4 + 10s^3 + 24s^2 + s + 2} \quad (8.135)$$

Со проверка на стабилноста на системот според Routh-овиот критериум на стабилност се добива дека овој систем е апсолутно стабилен.

Од условот дека системот е со единична негативна повратна врска се добива:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}, \text{ односно } G(s) = \frac{P(s)}{1-P(s)} \quad (8.136)$$

Со замена на вредноста на преносната функција (8.135) во изразот (8.136) се добива вредноста на кружната преносна функција:

$$G(s) = \frac{2}{s(s^3 + 10s^2 + 24s + 1)} \quad (8.137)$$

Според тоа може да се заклучи дека ова е систем од тип 1, а според табела 8.1 се добива:

$$\begin{aligned} K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) &= \infty, & e_p(\infty) &= \frac{1}{1+K_p} = 0 \\ K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) &= 2, & e_v(\infty) &= \frac{1}{K_v} = \frac{1}{2} \\ K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s) &= 0, & e_a(\infty) &= \frac{1}{K_a} = \infty \end{aligned} \quad (8.138)$$

**Задача 8.18.** Математичкиот модел на еден систем со единична негативна повратна врска е даден со диференцијалната равенка:

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 3 \frac{dx}{dt} + 2x \quad (8.139)$$

На влезот е доведена побудата:  $x(t) = \begin{cases} 7 - 2t + \frac{1}{4}t^2; & t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$

Да се определи вкупната стационарна грешка.

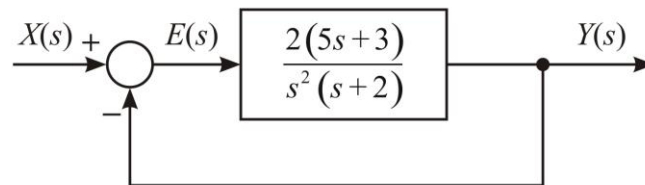
**Решение:** Дадениот систем е стабилен. Неговата кружна преносна функција ќе биде:

$$G(s) = \frac{3s + 2}{s^2(s^2 + 3s + 4)} \quad (8.140)$$

Вкупната грешка на сталната состојба на излезот ќе биде:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 7 \cdot e_p(\infty) - 2 \cdot e_v(\infty) + \frac{1}{2} \cdot e_a(\infty) = 1 \quad (8.141)$$

**Задача 8.19.** Даден е блок-дијаграмот на еден систем со единична повратна врска (слика 8.27):



Слика 8.27. Блок-дијаграм на систем со единична повратна врска

Да се определи крајната вредност на грешката, ако на влезот е доведена функцијата:

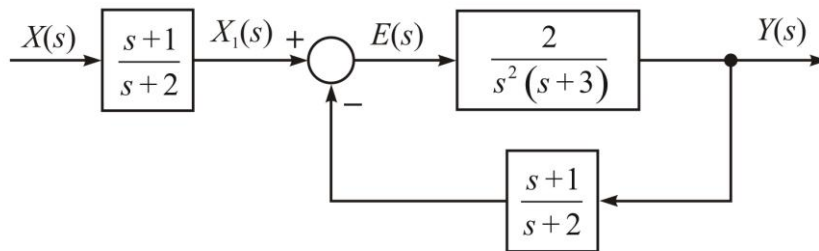
$$x(t) = 2 \cdot u(t) + 7 \cdot r(t) + p(t) \stackrel{t > 0}{=} 2 + 7t + t^2 \quad (8.142)$$

**Решение:** Вкупната грешка на сталната состојба на излезот ќе биде:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 2 \cdot e_p(\infty) + 7 \cdot e_v(\infty) + 2 \cdot e_a(\infty) = \frac{2}{3} \quad (8.143)$$



**Задача 8.20.** Реален систем е претставен со неговиот блок-дијаграм (слика 8.28). Тој е конструиран за излезот на системот  $y(t)$  да го следи влезот на системот  $x(t)$ :



Слика 8.28. Блок-дијаграм на реален систем за следење

Со каква крајната вредност на грешката, излезот  $y(t)$  ќе го следи влезот  $x(t)$ , ако на влезот е доведена функцијата:

$$x(t) = \begin{cases} 2 + t + \frac{1}{3}t^2 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad (8.144)$$

**Решение:** Преносната функција на реалниот систем за следење ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2(s+1)}{s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 2s + 2} \quad (8.145)$$

Од карактеристичната равенка на системот се проверува стабилноста на системот и според Routh-овиот критериум на стабилност се добива дека овој систем е апсолутно стабилен.

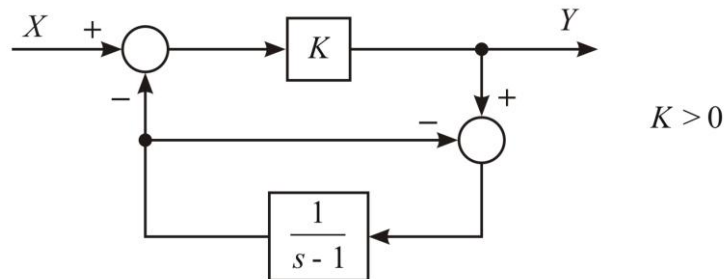
Од условот на задачата следи дека идеалната преносна функција за овој систем би била пропорционален елемент со засилување 1, односно:

$$P_i(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = 1 \quad (8.146)$$

Според тоа, вкупната грешка на сталната состојба на излезот во однос на идеалниот систем ќе биде:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 2 \cdot e_p(\infty) + e_v(\infty) + \frac{2}{3} \cdot e_a(\infty) = 2 \quad (8.147)$$

**Задача 8.21.** На слика 8.29 е претставен реален систем со неговиот блок-дијаграм.



Слика 8.29. Блок-дијаграм на реален систем

а). Да се определи кој тип на идеален систем ќе симулира овој реален систем за многу големи вредности на засилувањето  $K$ .

б). Ако засилувањето на системот е  $K = 100$ , кои ќе бидат отстапувањата на стационарните вредности на излезот во однос на излезот на идеалниот систем, ако на влезот е доведена функцијата:

$$x(t) = \begin{cases} 2 + t + 4t^2 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad (8.148)$$

**Решение:** а). Преносната функција на реалниот систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ks}{s + K} \quad (8.149)$$

Очигледно е дека системот е стабилен за сите позитивни вредности на  $K$ .

За големи вредности на  $K$  се добива:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} P(s) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s}{\frac{s}{K} + 1} = s \quad (8.150)$$

т.е. неговата преносна функција е чист диференцијатор во лимит.

б). Вкупната грешка на сталната состојба на излезот во однос на идеалниот систем ќе биде:

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 2 \cdot e_p(\infty) + e_v(\infty) + 8 \cdot e_a(\infty) = 2 \cdot 0 + 0 + 8 \cdot \frac{1}{K} = 0,08 \quad (8.151)$$

**Задача 8.22.** Реален систем со единична негативна повратна врска прави стационарна грешка  $e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,1$ , кога на влезот е доведена функцијата:

$$x(t) = \begin{cases} 2 + 5t + 2t^2; & t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad (8.152)$$

Да се определи математичкиот модел на системот, ако објектот на управување има една реална нула во  $-1$  и еден реален пол во  $-2$ .

**Решение:** Според условот во задачата дадениот реален систем мора да биде од тип 2. За да биде стационарната грешка  $e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0,1$  и за дадените реални пол и нула се добива дека преносната функција на објектот на управување треба да е:

$$G(s) = \frac{40(s+1)}{s^2(s+2)} \quad (8.153)$$

Според тоа преносната функција на реалниот систем ќе биде:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{40(s+1)}{s^3 + 2s^2 + 40s + 40} \quad (8.154)$$

Од преносната функција на системот, дадена со равенката (8.154), лесно се определува математичкиот модел на реалниот систем, и тој ќе биде:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 40 \frac{dy}{dt} + 40y = 40 \frac{dx}{dt} + 40x \quad (8.155)$$