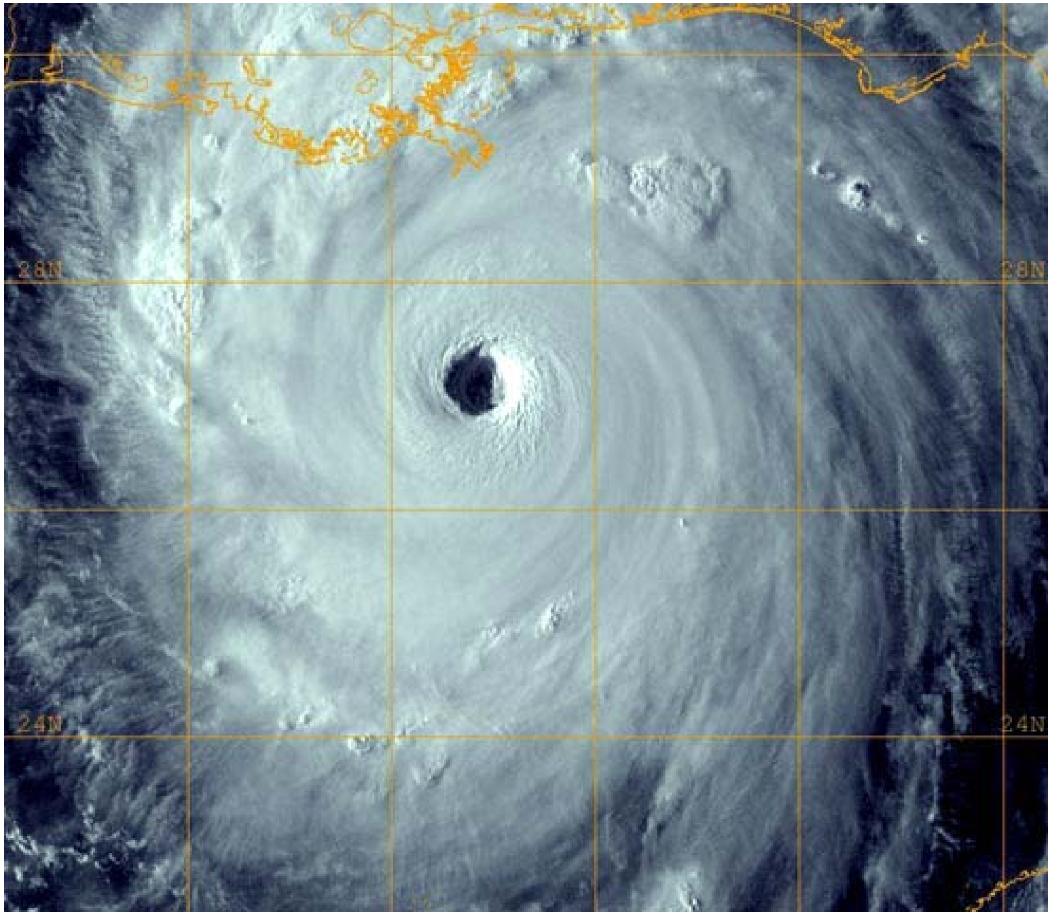
МЕХАНИКА НА ФЛУИДИ

IV семестар, 6 ECTS

Вонр. проф. д-р Зоран Марков



СОДРЖИНА

1. Вовед во механиката на флуиди

- Механиката на флуиди е наука која се занимава со проучувањето на движењето (струењето) на течни и гасовити флуиди - не крути тела!!!
- Гасовите лесно го менуваат обликот и волуменот
- Течностите лесно го менуваат обликот, но тешко волуменот
- Аеромеханика и Хидромеханика
- Компресибилност
- Основни диференцијални равенки на струење (Navier-Stokes)

1. Вовед во механиката на флуиди

- Појава на хидраулика - практична механика на флуидите (експеримент + емпирија)
- Теорија на граничен слој - Prandtl
- Примена:
  - Хидраулични машини (пумпи, турбини, компресори, вентилатори, мотори СВС, парни и гасни турбини)
  - Цевководи, канали, реки
  - Хидроцентрали
  - Греење, климатизација
  - Бродови, авиони, ракети...
  - Метеорологија
  - Оптоварувања на градежни објекти
  - и многу други области...

1. Вовед во механиката на флуиди

1.2. Физички својства на флуидите

Густина:

$$\boxed{\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}}$$

Доколку во волуменот ΔV се наоѓа во точка М, густината во таа точка е:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \qquad [kg / m^3]$$

Во општ случај:

$$\rho = \rho\,(p, T)$$

Реципрочна вредност: $\nu = 1/\rho$ – **специфичен волумен**

1. Вовед во механиката на флуиди

1.2. Физички својства на флуидите

Густина:

Кај гасовите - равенка на состојба на гасот:

$$\frac{p}{\rho} = p\,v = RT$$

Специфична тежина: $\bar{\gamma} = \frac{\Delta G}{\Delta V}$

Повторно во граничен случај
(спец. тежина во точка M):

$$\gamma = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta V} = \frac{dG}{dV}$$

$$\boxed{\gamma = \rho g}$$

1. Вовед во механиката на флуиди

1.2. Физички својства на флуидите

Компресибилност:

$$dp = -E_F \frac{dV}{V} = E_F \frac{d\rho}{\rho}$$

E_F - модул на еластичност (компресибилност) на флуидот

$E_F = 2{,}06 \cdot 10^5$ [N/cm^2] за вода

Брзина на простирање на звук (Лапласова формула):

$$a = \sqrt{dp/d\rho} \qquad a = \sqrt{E_F/\rho}$$

$$\boxed{a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}}$$

1. Вовед во механиката на флуиди

1.2. Физички својства на флуидите

Вискозитет:

Постоење на сила на триење помеѓу честиците на флуидот

Теорија на идеален флуид (се занемаруваат силите на триење - се занемарува вискозитетот)

Теорија на реален флуид (Њутн): Силата на триење зависи од површината по која се тријат честиците и разликата на брзините (релативната брзина на една честица во однос на другата)

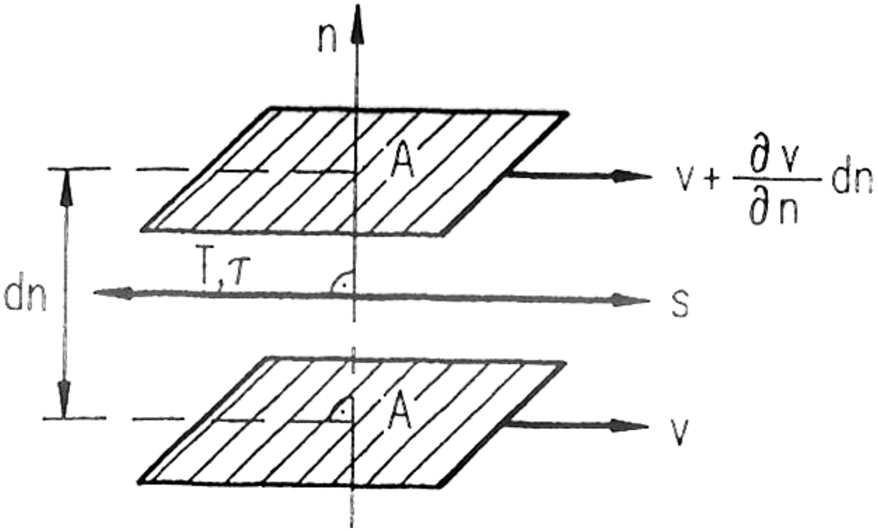
1. Вовед во механиката на флуиди

1.2. Физички својства на флуидите

Вискозитет:

Потребно е да се совлада **сила на триењето**:

$$\boxed{T = \eta A \frac{\partial v}{\partial n}}$$



Силата на триењето сведена на единица површина се вика **тангенцијален напон**:

$$\boxed{\tau = \eta \frac{\partial v}{\partial n}}$$

Коефициент на пропорционалност **Динамички вискозитет**:

η [Ns/m^2] = [kg/ms]

1. Вовед во механиката на флуиди

1.2. Физички својства на флуидите

$$\boxed{\nu = \eta/\rho}$$

Вискозитет - Кинематски вискозитет :

$[m^2/s] = 1$ [St]

Кај **течности** се менува обратно-пропорционално од T:

$$\frac{\eta}{\eta_o} = e^{B/(C+T) - B/(C+T_o)}$$

Кај **гасови** се менува право-пропорционално од T:

$$\frac{\eta}{\eta_o} = \frac{S+T_o}{S+T}\left(\frac{T}{T_o}\right)^{3/2} \approx \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\omega}$$

За турбулентни струеења:

$$\eta_T = \eta + A_T$$

1. Вовед во механиката на флуиди

1.3. Сили што дејствуваат на флуидите. Притисок

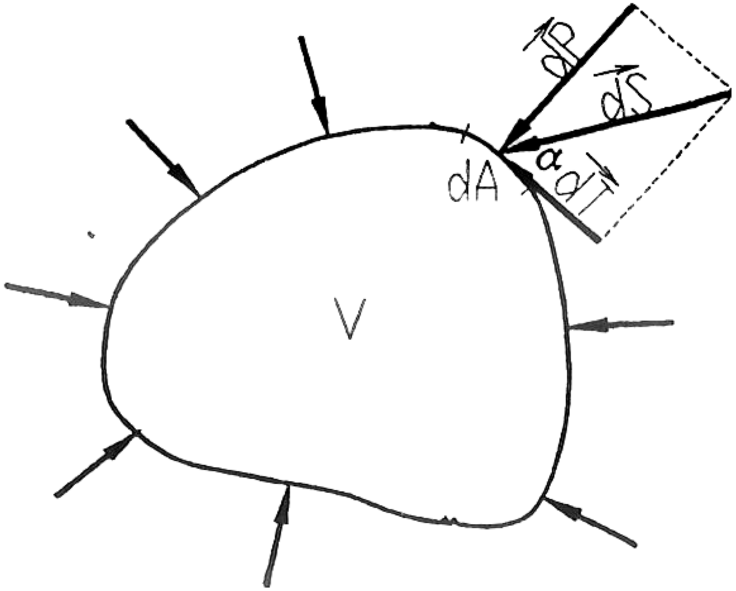
На определена флуидна маса *m* која исполнува определен волумен *V* дејствуваат повеќе сили: тежина, инерцијални, центрифугални... Волуменски сили [N/kg]

Површински сили:

$$d\vec{S} = d\vec{P} + d\vec{T}$$

M (x,y,z) се наоѓа на *dA:*

$$\boxed{p = \frac{dP}{dA}}$$



Притисок во точката M!!

Тој е скаларна големина-не е вектор!!

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

Статиката на флуидите ги проучува законите за апсолутно и релативно мирување на флуидите.

http://www.youtube.com/watch?v=g8vHhgh6oM0

Хидростатички притисок:

Притисок при мирување на флуидите

Особини:

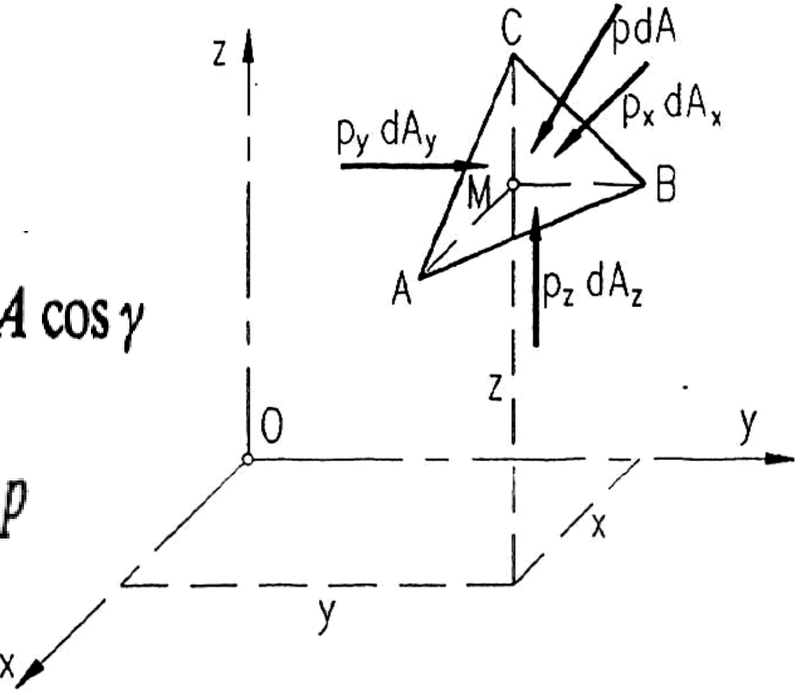
- **Секогаш е нормален на секоја површина замислена во флуидниот простор**
- **Неговата големина не се менува со промена на положбата на таа површина, т.е. неговата големина во една точка е иста во сите правци повлечени низ таа точка**

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

Прва особина: **Површински сили при мирување на флуид се нарекуваат притисок**

Втора особина: **Неговата големина е иста во сите правци - Се докажува на бесконечно мал тетраедар**



$$dA_x = dA\cos\alpha \quad , \quad dA_y = dA\cos\beta \quad , \quad dA_z = dA\cos\gamma$$

$$p_x dA_x - pdA\cos\alpha = 0,$$

$$p_x = p \quad p_y = p \quad p_z = p$$

$$p_y dA_y - pdA\cos\beta = 0,$$

$$p_x = p_y = p_z = p$$

$$p_z dA_z - pdA\cos\gamma = 0,$$

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

- **Во точката *M* во правец нормален на четирите површинки од тетраедарот дејствува ист притисок *p*!!**
- **Заради произволноста на тетраедарот следи дека притисокот кај флуид во мирување е**

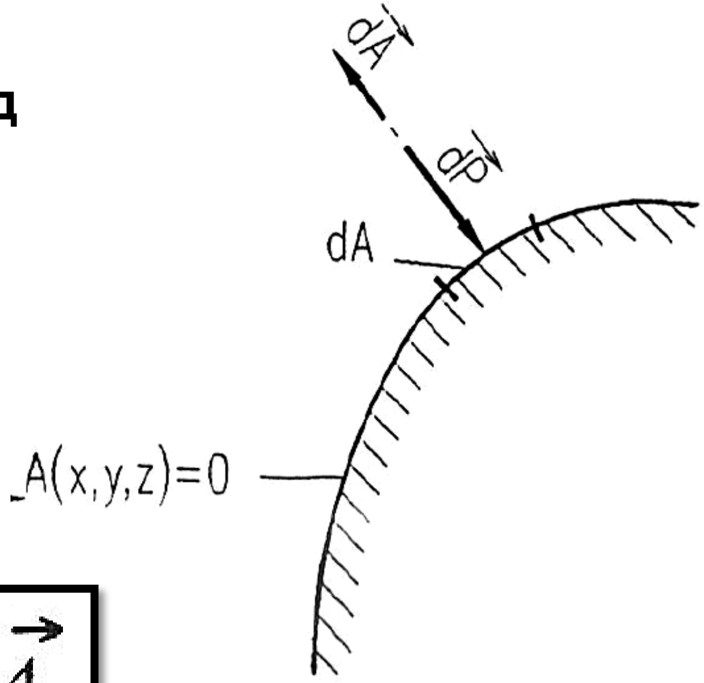
  скаларна големина која не зависи од

  правецот, туку само од положбата

  на точката: $p = p(x, y, z)$
- **Елементарна сила на притисок,**

како вектор:

$$d\vec{P} = -p\,d\vec{A}$$



Резултантна сила на притисок

по цела површина *A*:

$$\boxed{\vec{P} = -\int_A p\,d\vec{A}}$$

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

Ојлерови (Euler) равенки за рамнотежа на флуид:

- На флуид во мирување дејствуваат површински сили (сили на притисокот) $\vec{P}$ и волуменски сили, чија резултанта сведена на единица маса изнесува $\vec{R}$
- Услов за рамнотежа на флуидот во векторски облик:

$$\vec{P}+\vec{R}=0$$

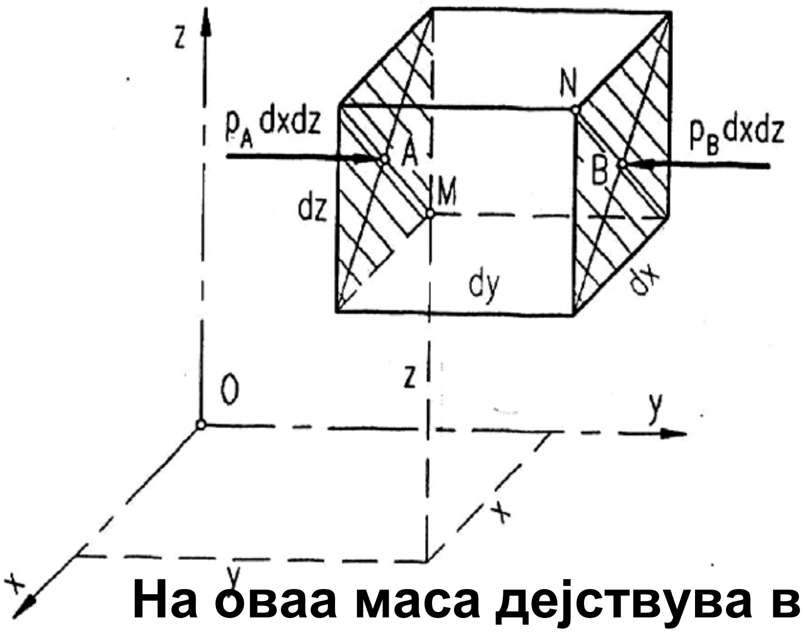
- Оваа векторска равенка ќе се разложи на три скаларни равенки

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

Ојлерови (Euler) равенки за рамнотежа на флуид:

$$p_A = p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}, \qquad p_B = p + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}$$



Сили на притисок во *y*-насока:

$$p_A\,dx\,dz \quad \text{и} \quad p_B\,dx\,dz$$

Маса на елементарната честица:

$$dm = \rho\, dV = \rho\, dx\, dy\, dz$$

На оваа маса дејствува волуменска сила:

$$\boxed{\vec{R}\, dm = \vec{R}\, \rho\, dx\, dy\, dz}$$

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

Ојлерови (Euler) равенки за рамнотежа на флуид:

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \qquad dm\,Y = \rho\,Y\,dx\,dy\,dz$$

Услов за рамнотежа на сите сили во правец на *y*-оска:

$$\boxed{p_A\,dx\,dz - p_B\,dx\,dz + \rho\,Y\,dx\,dy\,dz = 0}$$

Со замена на p_A и p_B и средување се добива: $$\rho\,Y\,dy = \frac{\partial p}{\partial y}\,dy$$

Аналогно:

$$\rho X dx = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx \qquad \rho Z dz = \frac{\partial p}{\partial z}\,dz$$

Со собирање на Ојлеровите равенки во скаларен облик се добива основната равенка на статиката на флуидите:

$$\rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz = dp$$

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

Потенцијал на силата. Еквипотенцијални површини

Во општ случај волуменските сили зависат од положбата на точката: $\vec{R} = \vec{R}(x, y, z)$ $\quad X = X(x, y, z), Y = Y(x, y, z), Z = Z(x, y, z)$

Кај баротропен флуид:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{\rho(p)}$$

Десната страна е тотален диференцијал од некоја скаларна функција *P=P(p)*:

$$dP = \frac{dp}{\rho(p)} \quad \text{т.е.} \quad P = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

Се добива:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz = dP$$

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

Потенцијал на силата. Еквипотенцијални површини

Оваа диференцијална равенка е интеграбилна само ако и левата страна е тотален диференцијал на некоја скаларна функција *U=U(x, y, z)*:

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

При што:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

U=U(x, y, z) е потенцијал на силата или *потенцијална функција*

Во случај на мирување на баротропен флуид, компонентите на резултантната волуменска сила мораат да бидат изведени како соодветни парцијални изводи од потенцијалната функција, т.е. да имаат свој потенцијал!!

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

Потенцијал на силата. Еквипотенцијални површини

Резултантната волуменска сила преку нејзиниот потенцијал

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \text{grad } U .$$

Основната равенка на статиката на флуидите:

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = dp \qquad \text{или} \qquad \rho\, dU = dp$$

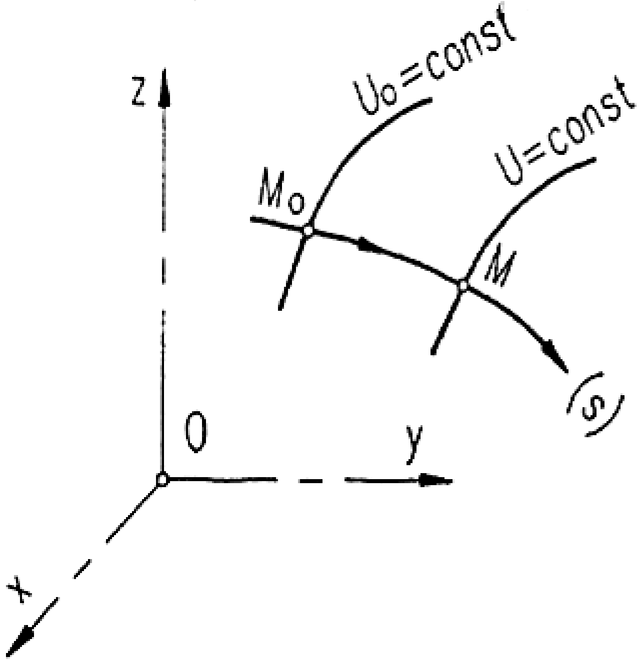
- **Се интегрира по должината на која и да било крива линија *s* од точка *M₀* (со потенцијал на сила *U₀* и притисок *p₀*) до точката *M* (со потенцијал на сила *U* и притисок *p*)**

2. Статика на флуидите

2.1. Основни закони на статиката на флуидите

Потенцијал на силата. Еквипотенцијални површини

$$\int_{M_o}^{M} \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{M_o}^{M} dU = U - U_o$$



За $\rho = const$: $$\frac{p - p_o}{\rho} = U - U_o$$

Од каде лесно се определува

p = p (x, y, z)

Доколку се движиме поточки што лежат на површини со ист притисок *(dp=0)* – изобари или еквипотенцијални површини

$$\rho\, dU = dp = 0\,, \qquad dU = 0 \qquad U = U(x,y,z) = konst.$$

2. Статика на флуидите

2.2. Мирување на флуид под дејство на гравитација

Во овој случај, резултантната волуменска сила изнесува:

$$X = Y = 0 \qquad \text{и} \qquad Z = -g$$

Основната равенка на статиката:

$$\boxed{\rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = -\rho\,g\,dz = dp}$$

Или

$$dp = -\rho g dz = -\gamma dz$$

$$X = Y = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0\,, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z} = -g\,, \qquad \text{односно} \qquad \frac{dU}{dz} = -g$$

Од каде: $U = -\int g\,dz + U_o = -g\,z + U_o$

Еквипотенцијалните површини: $\boxed{U = -g\,z + U_o = konst.}$

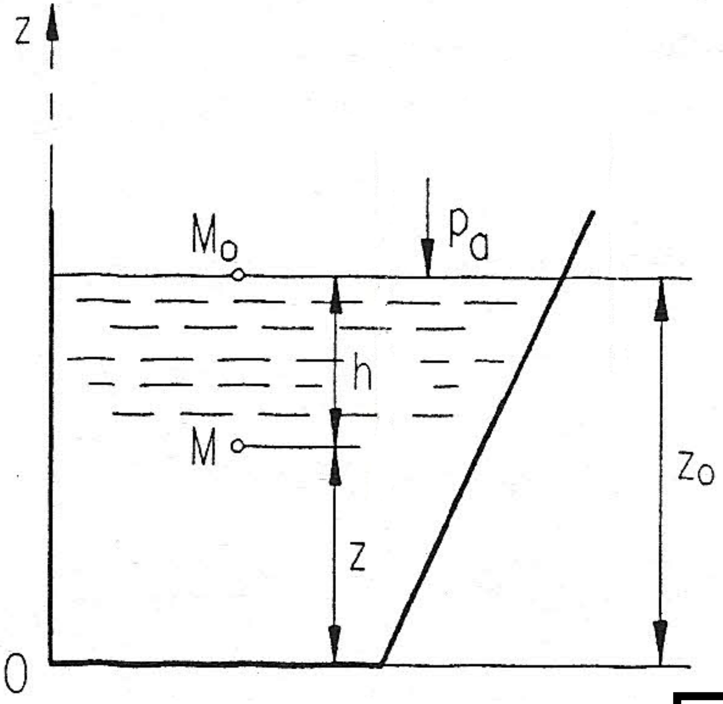
$$z = const.$$

2. Статика на флуидите

2.2. Мирување на флуид под дејство на гравитација

Мирување на некомпресибилен флуид (течност)

Се интегрира равенката $dp = -\rho g dz$ **при ρ=const. Помеѓу две точки со притисоци *p* и *p_0* и растојанија *z* и *z_0* од коорд. почеток:**



$$p - p_0 = -\int_{z_0}^{z} \gamma dz = \gamma(z_0 - z) = \rho g(z_0 - z)$$

Длабочината ***h=z_0-z*** **под слоб. површ.**

Се добива:

$$p - p_0 = \gamma h \qquad p = p_0 + \gamma h = p_0 + \rho g h$$

Атмосферски притисок

Натпритисок : $p_m = p - p_a$

Потпритисок: $p_v = p_a - p$

Апсолутен притисок:

$$\boxed{p = p_m + p_a \quad \text{и} \quad p = p_a - p_v}$$

2. Статика на флуидите

2.2. Мирување на флуид под дејство на гравитација

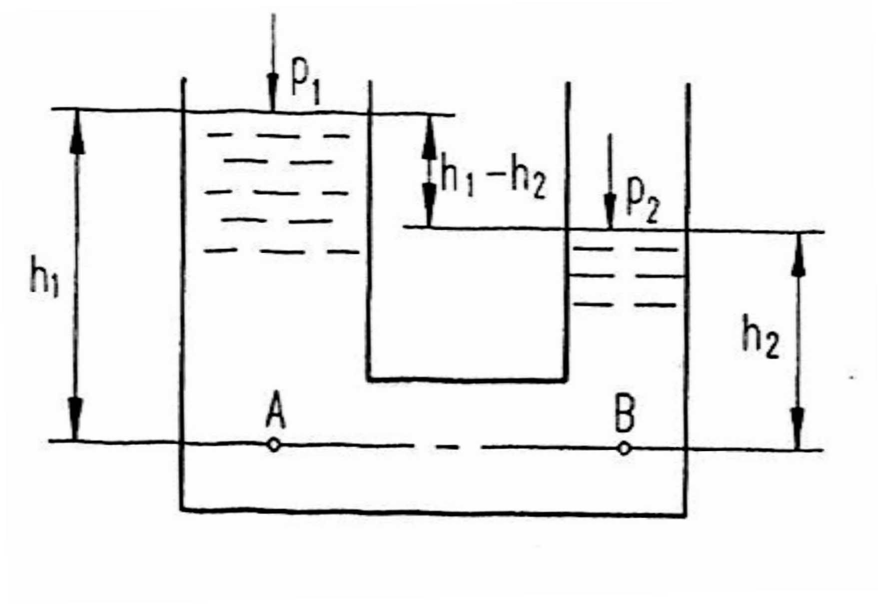
Сврзани садови

Еквипотенцијална површина (AB) при што $p_A=p_B$:

$$p_A = p_1 + \gamma h_1 \quad \text{и} \quad p_B = p_2 + \gamma h_2$$

$$p_2 - p_1 = \gamma (h_1 - h_2) = \gamma h = \rho g h$$

За случај кога $p_1=p_2$: $h=0$



2. Статика на флуидите

2.2. Мирување на флуид под дејство на гравитација

Манометар

Служи за мерење на натпритисокот во садови под притисок (цевки, котли, резервоари за гас и сл).

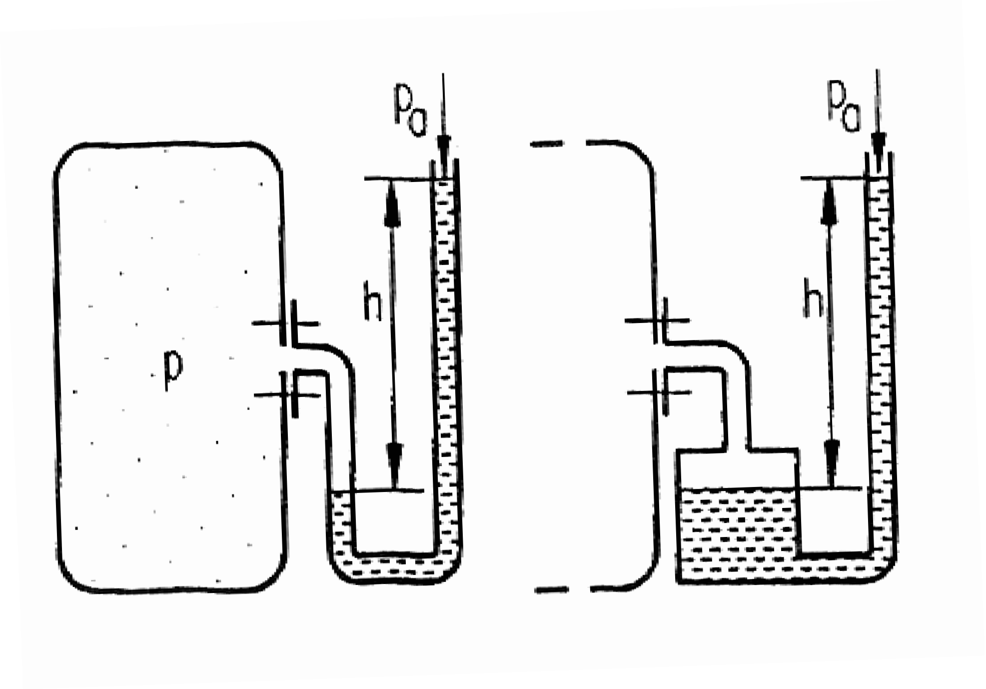
Во овој случај $p_2=p$ и $p_1=p_a$:

$$p_m = p - p_a = \gamma h = \rho g h$$

Вакуумметар

Притисоци под атмосферскиот

$h < 0$



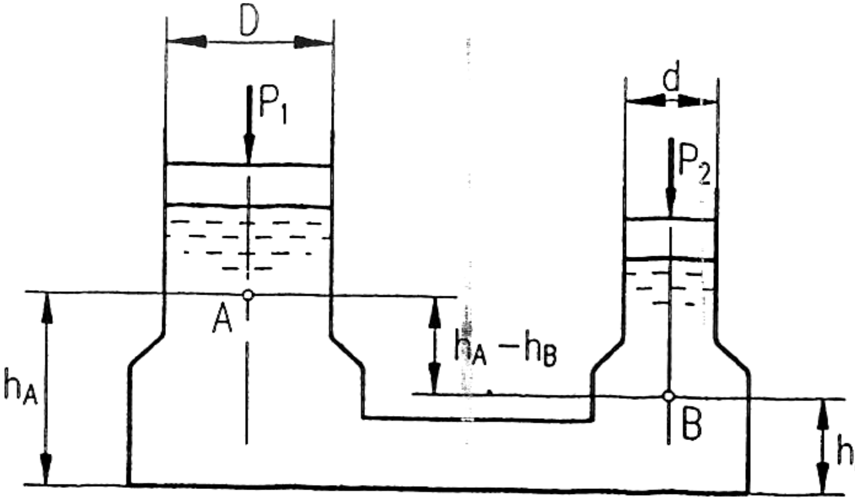
2. Статика на флуидите

2.2. Мирување на флуид под дејство на гравитација

Паскалов закон

$p_B - p_A = \gamma (h_A - h_B)$ $\quad (p_B + \Delta p_B) - (p_A + \Delta p_A) = \gamma (h_A - h_B)$

$$\Delta p_A = \Delta p_B$$



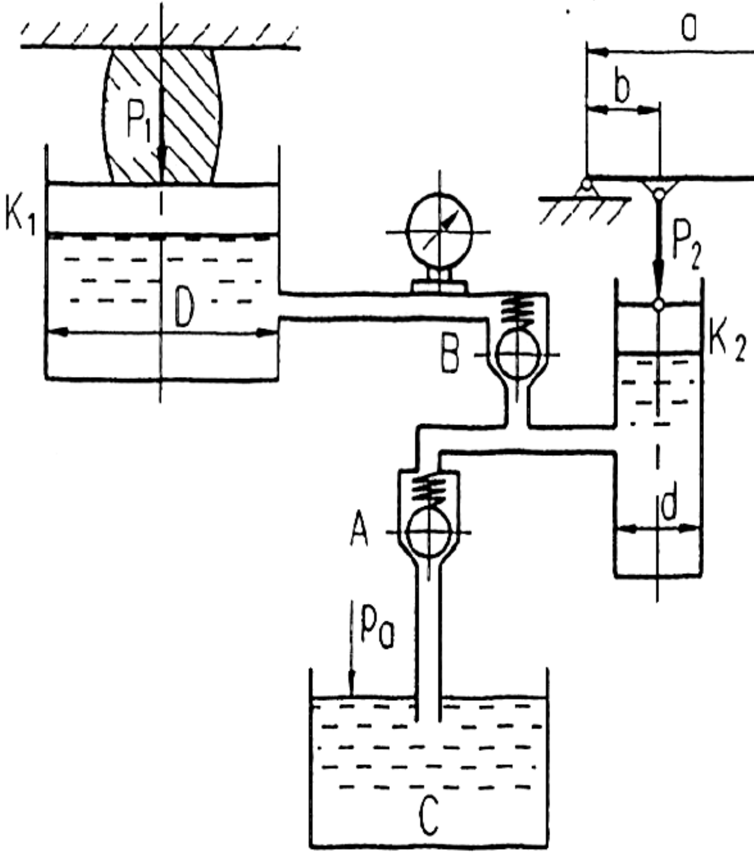
Паскалов закон:

Во течност што е во мирување промената на притисокот во една точка се пренесува еднакво во сите нејзини точки.

2. Статика на флуидите

2.2. Мирување на флуид под дејство на гравитација

Хидраулична преса



$$\frac{4P_1}{D^2\pi} = \frac{4P_2}{d^2\pi} = \frac{4}{d^2\pi}\frac{a}{b}P$$

$$\boxed{P_1 = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{a}{b} P}$$

Теоретски, силата P_1 може да се зголеми произволно со односите D/d и a/b. На триење се троши 25% од силата

2. Статика на флуидите

2.2. Мирување на флуид под дејство на гравитација

Мирување на компресибилен флуиди. Стандардна атмосфера

$$dp = -\rho g\, dz \qquad \rho \neq konst.$$

Баротропен флуид: $\rho = \rho(p)$

$$z_o - z = \frac{1}{g}\int_{p_o}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}$$

За $z_0=0$ на морската ширина, може да се определи произволен притисок p на надморска височина $H=z-z_0$

Ако се претпостави изотермна промена на состојбата на воздухот:

$$\frac{p}{\rho} = RT = \frac{p_o}{\rho_o} = RT_o = konst. \quad \text{т.е.} \quad \rho = \frac{p}{RT_o} = \frac{\rho_o}{p_o}p = \rho(p)$$

2. Статика на флуидите

2.2. Мирување на флуид под дејство на гравитација

Мирување на компресибилен флуиди. Стандардна атмосфера

$$z_o - z = -H = \frac{1}{g} R T_o \int_{p_o}^{p} \frac{dp}{p} = \frac{RT_o}{g}(\ln p - \ln p_o)$$

Со познат притисок, може да се определи надморската висина:

$$H = \frac{RT_o}{g} \ln \frac{p_o}{p}$$

За p→0 се добива H →∞?!

За адијабатска промена:

$$H = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_o}{\rho_o g} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{(\kappa - 1)/\kappa} \right] \qquad H = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{RT_o}{g} \left[1 - \frac{T}{T_o} \right]$$

2. Статика на флуидите

2.2. Мирување на флуид под дејство на гравитација

Мирување на компресибилен флуиди. Стандардна атмосфера

За адијабатска промена:

$$H_{\max} = \frac{1{,}402}{1{,}402 - 1} \frac{287{,}04}{9{,}81} 288 = 29389 \text{ m} = 29{,}389 \text{ km}$$

За да подобро се дефинира стварната промена на притисокот со висината се воведува поимот нормална или стандардна атмосфера. За неа важат претпоставките:

а) до надморска висина од 11.000 m (во тропосферата), Т на воздухот опаѓа од 15 °С на 0 m.н.в. по 6,5 °С на секои 1.000 m

б) над 11.000 m.н.в. промената на состојбата е изотермна и во согласност со првата претпоставка Т изнесува – 56,5 °С = const

2. Статика на флуидите

2.3. Релативно мирување на флуид

Волуменски сили кои можат да дејствуваат на флуидот:

- Земјината тежа (гравитација)
- Сили на инерција
- Центригугални сили и др.

Така настанува релативно мирување на флуидот.

Најчести случаи во техниката на релативно мирување:

- Транслаторно еднолично забрзано
- Течност во сад што ротира околу вертикална оска со константна аголна брзина

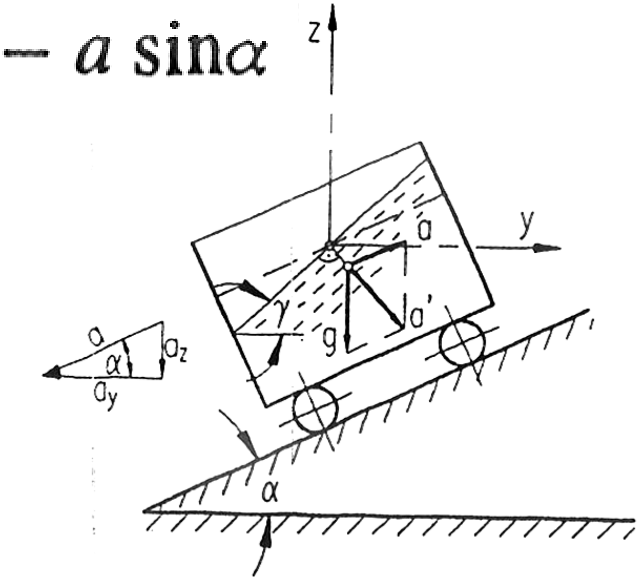
2. Статика на флуидите

2.3. Релативно мирување на флуид

Транслаторно движење на сад со течност

- **Релативно мирување само при константно забрзување!!**

$$a_x = 0 \ , \quad a_y = -a\cos\alpha \ , \quad a_z = -a\sin\alpha$$



$$X = -a_x = 0 \ , \quad Y = -a_y = a\cos\alpha \ ,$$

$$Z = -a_z - g = a\sin\alpha - g$$

$$\rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = dp$$

$$a\cos\alpha\,dy + (a\sin\alpha - g)\,dz = 0$$

$$y\,a\cos\alpha + (a\sin\alpha - g)\,z = C$$

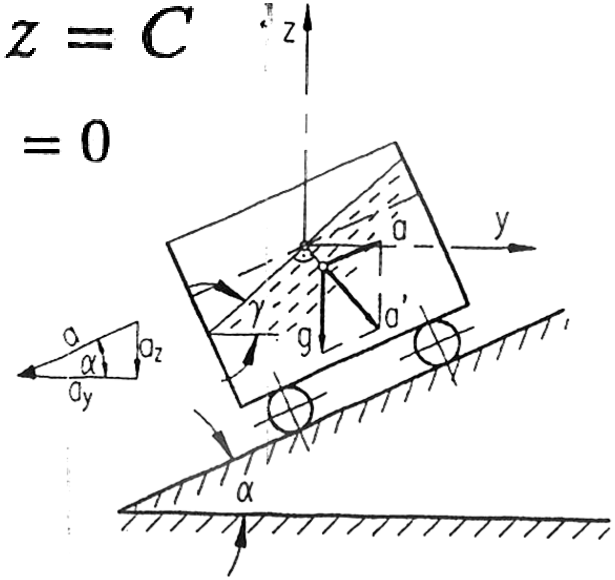
2. Статика на флуидите

2.3. Релативно мирување на флуид

Транслаторно движење на сад со течност

- **Релативно мирување само при константно забрзување!!**

$$y\,a\cos\alpha + (a\sin\alpha - g)\;z = C$$



За *y=z=0* → *C=0*: $y\,a\cos\alpha + z\,(a\sin\alpha - g) = 0$

Агол на слободна површина: $tg\,\gamma = \dfrac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha}$

Промена на притисокот (од основната равенка на статика на флуидите):

$$\rho\,[\;a\cos\alpha\,dy + (a\sin\alpha - g)\,dz\,] = dp$$

$$\rho\,[\;y\,a\cos\alpha + (a\sin\alpha - g)\,z\,] = p + C_1$$

$$p = \rho\,[\;y\,a\cos\alpha + z\,(a\sin\alpha - g)\,] + p_a$$

2. Статика на флуидите

2.3. Релативно мирување на флуид

Ротација околу вертикална оска на сад со течност

Центрифугална сила: $F_c = r\,\omega^2$

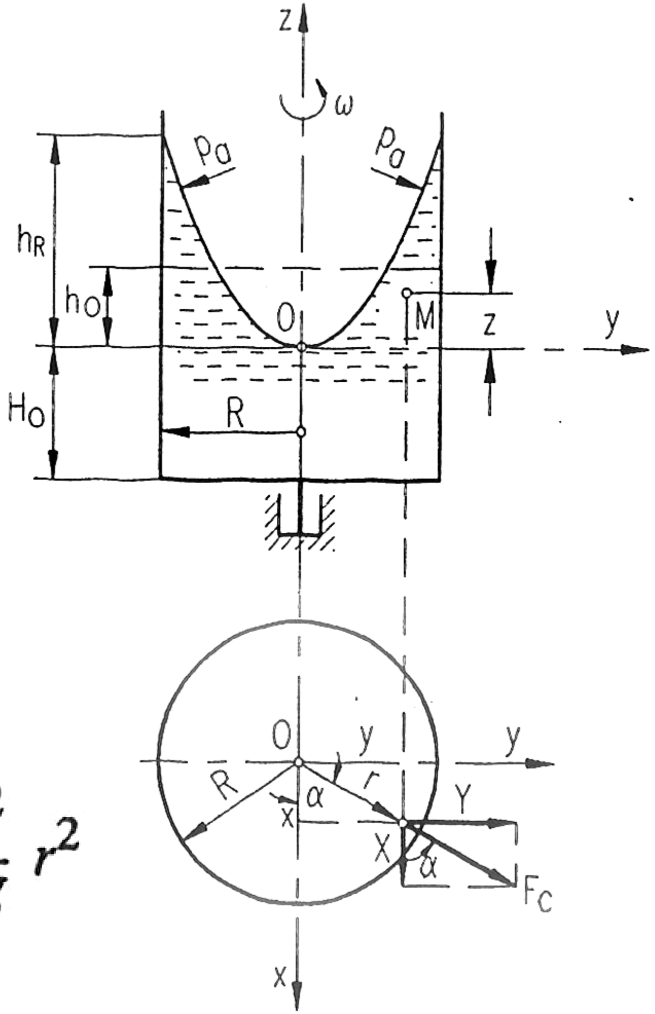
$$X = F_c \cos\alpha = \omega^2 r \cos\alpha = \omega^2 x \;,$$

$$Y = F_c \sin\alpha = \omega^2 r \sin\alpha = \omega^2 y$$

$$Z = -g$$

$$\omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz = 0$$

$$\frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - gz = C$$



Равенка на слободна површина:

$$\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - 2gz = 0 \qquad \text{или} \qquad z = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

2. Статика на флуидите

2.3. Релативно мирување на флуид

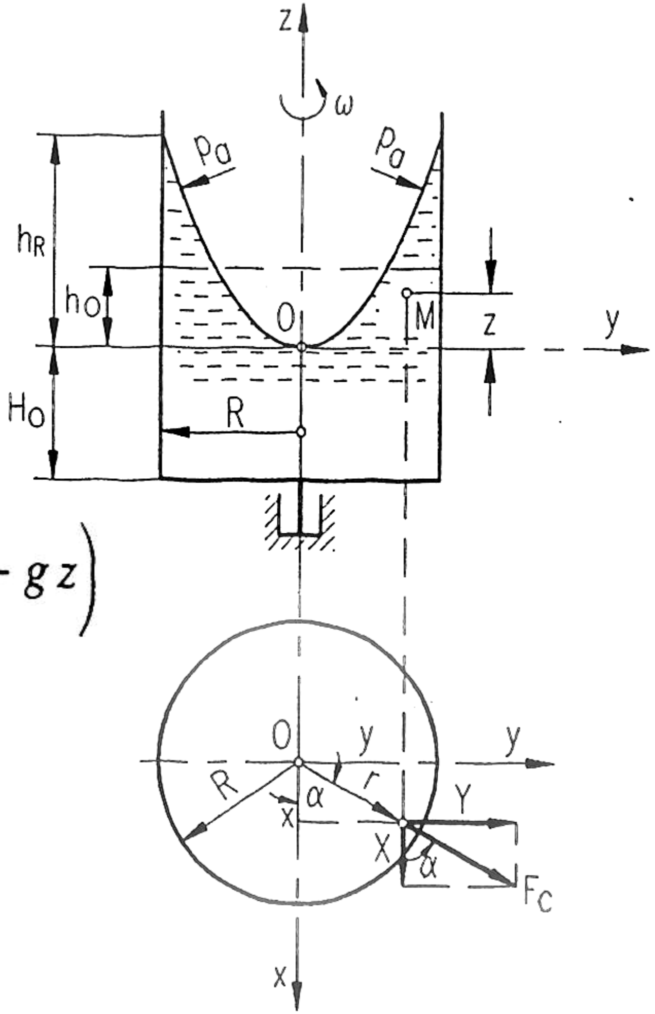
Ротација околу вертикална оска на сад со течност

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \qquad h_R = \frac{\omega^2}{2g} R^2$$

$$R^2 \pi h_o = R^2 \pi h_R - \frac{1}{2} R^2 \pi h_R$$

$$h_o = \frac{1}{2} h_R = \frac{\omega^2}{4g} R^2$$

$$p = p_a + \rho \left[\frac{1}{2}\omega^2 \left(x^2 + y^2\right) - g z\right] = p_a + \rho \left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - g z\right)$$



По цилиндрични површини ($r = r_1 = konst.$) притисокот

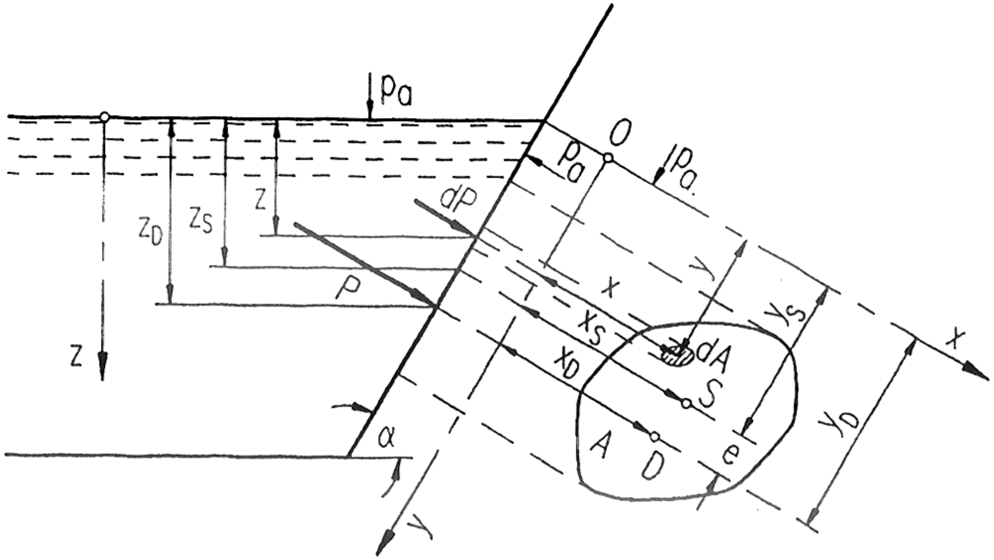
$$p = \left(p_a + \frac{\rho}{2}\omega^2 r_1^2\right) - \rho g z = C_1 - \rho g z$$

2. Статика на флуидите

2.4. Сила на притисокот

$$\vec{P} = -\int_A p\, d\vec{A}$$

Притисок на рамна површина



S **– тежиште,** ***D*** **– средиште на притисокот**

$$dP = \left(p - p_a\right) dA = \gamma z\, dA = g \rho z\, dA$$

$$P = \gamma \int_A z\, dA = g \rho \int_A z\, dA$$

Статички момент на површината ***A*** **во однос на слободната површина:**

$$A z_s = \int_A z\, dA$$

$$P = \gamma A z_s = \rho g A z_s$$

2. Статика на флуидите

2.4. Сила на притисокот

Притисок на рамна површина

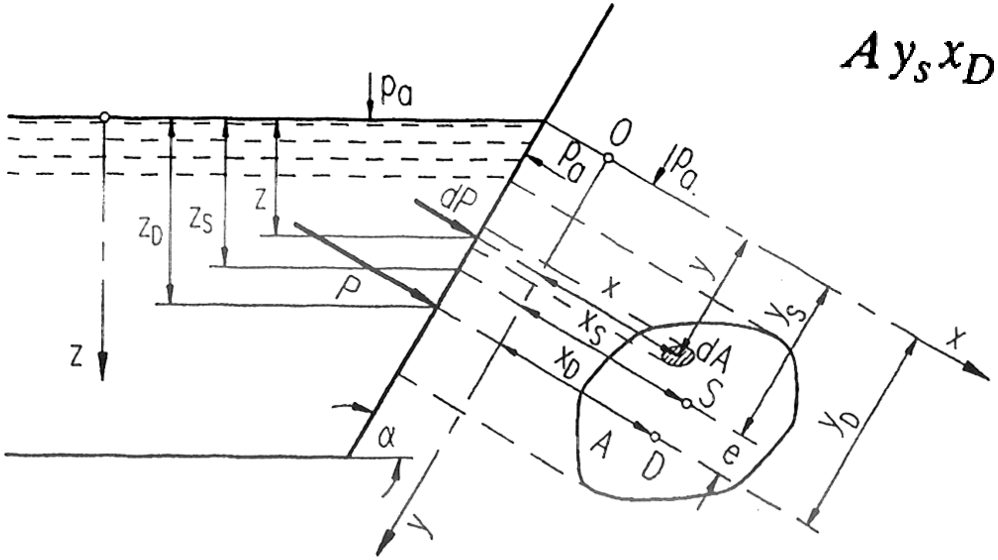
Варињонова теорема за еднаквост на момент на резултатна сила и збир на моменти на компоненти

$$P x_D = \int_A x \, dP \,, \qquad P y_D = \int_A y \, dP$$

$$A y_s x_D = \int_A x y \, dA \,, \qquad A y_s y_D = \int_A y^2 \, dA$$

$$x_D = \frac{J_{xy}}{A y_s} \,, \qquad y_D = \frac{J_x}{A y_s}$$

$$e = y_D - y_S = \frac{J_{xo}}{A y_S}$$

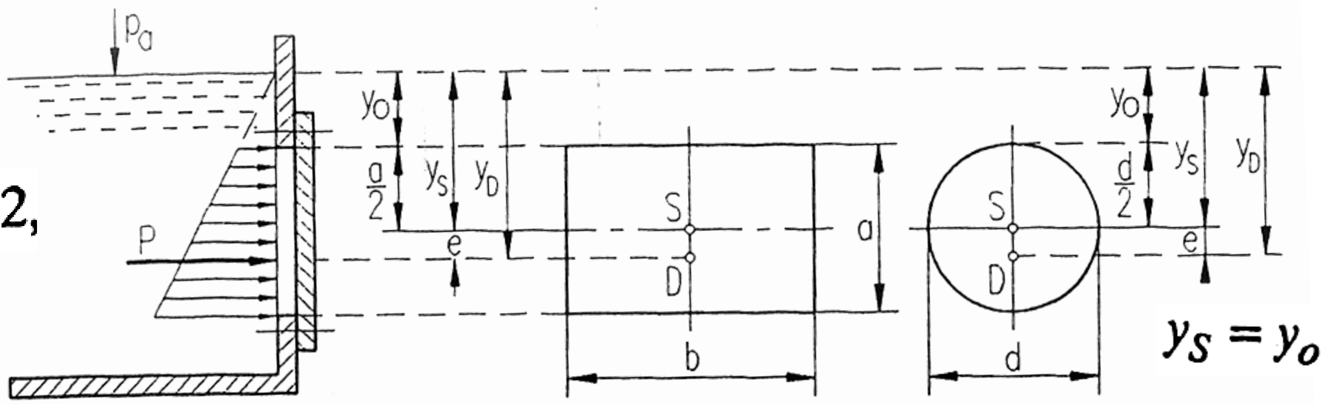


2. Статика на флуидите

2.4. Сила на притисокот

Притисок на рамна површина

$y_S = y_o + a/2,$



$y_S = y_o + d/2$

$$P = \gamma\, a\, b \left(\frac{a}{2} + y_o\right) \qquad P = \frac{1}{4}\, \gamma\, d^2 \pi \left(\frac{d}{2} + y_o\right)$$

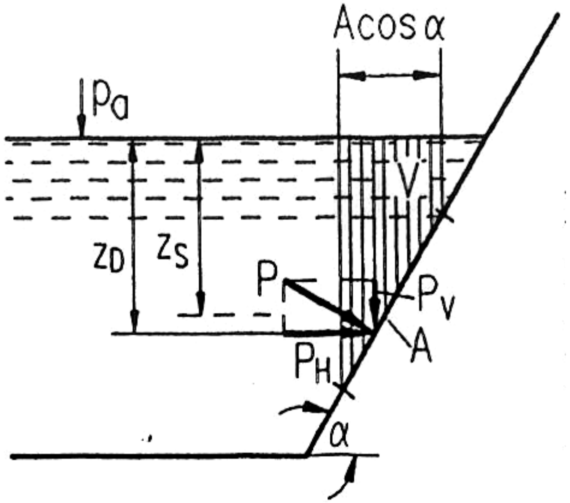
$$e = \frac{a^3 b/12}{ab\left(\frac{a}{2} + y_o\right)} = \frac{a^2}{6\,(a + 2y_o)} \qquad e = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{1}{4}\left(\frac{d}{2} + y_o\right) d^2 \pi} = \frac{d^2}{16\left(\frac{d}{2} + y_o\right)}$$

2. Статика на флуидите

2.4. Сила на притисокот

Притисок на рамна површина

Резултантната сила на притисокот може да се разложи на две компоненти (хоризонтална и вертикална):



$$P_H = P\sin\alpha; \qquad P_V = P\cos\alpha$$

$$P = \gamma z_s A$$

$$P_V = \gamma z_s A\cos\alpha \qquad z_s A\cos\alpha = V$$

$$P_V = \gamma V$$

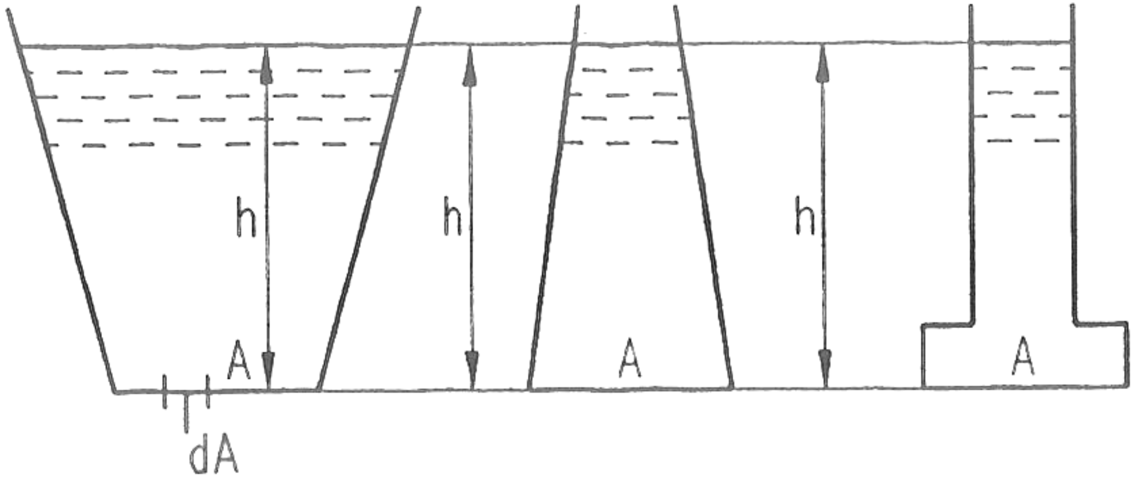
Заклучок: **Вертикалната компонента на силата на притисокот е еднаква на тежината на столбот течност што од слободната површина ја притиска разгледуваната површина!!!**

2. Статика на флуидите

2.4. Сила на притисокот

Притисок на рамна површина

$$P_V = \gamma V$$



$$P_V = \int_A p\, dA = \gamma h \int_A dA = \gamma h A = \rho g h A$$

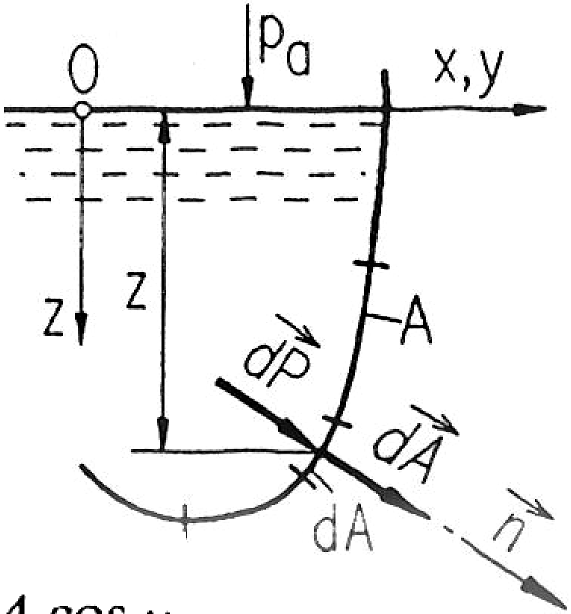
ХИДРОСТАТИЧКИ ПАРАДОКС!!!

2. Статика на флуидите

2.4. Сила на притисокот

Притисок на криви површини

$$dP = p\,dA = \gamma\, z\, dA = g\rho\, z\, dA$$



$$dP_x = dP\cos\alpha = \gamma\, z\, dA\cos\alpha$$
$$dP_y = dP\cos\beta = \gamma\, z\, dA\cos\beta$$
$$dP_z = dP\cos\gamma = \gamma\, z\, dA\cos\gamma$$

$$dA_x = dA\cos\alpha,\quad dA_y = dA\cos\beta,\quad dA_z = dA\cos\gamma$$

$$P_x = \gamma\int_{A_x} z\, dA_x,\quad P_y = \gamma\int_{A_y} z\, dA_y,\quad P_z = \gamma\int_{A_z} z\, dA_z$$

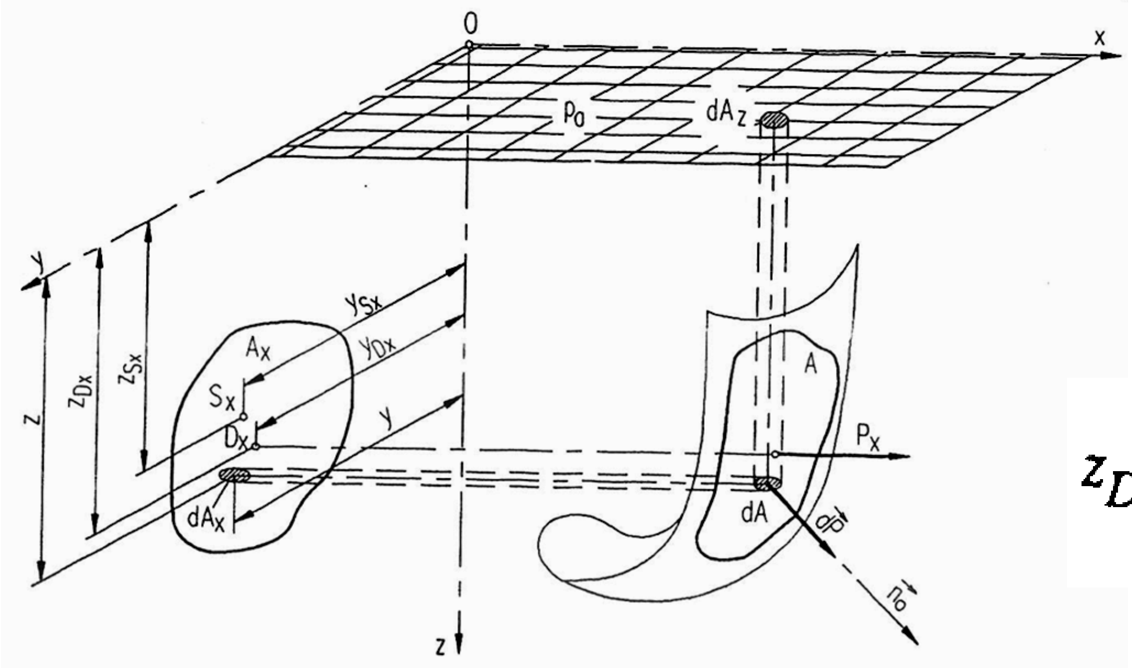
2. Статика на флуидите

2.4. Сила на притисокот

Притисок на криви површини

Хоризонтални и вертикални притисоци

$$P_x = \gamma \int_{A_x} z\, dA_x,\quad P_y = \gamma \int_{A_y} z\, dA_y,\quad P_z = \gamma \int_{A_z} z\, dA_z$$



$$A_x z_{sx} = \int_{A_x} z\, dA_x,\quad A_y z_{sy} = \int_{A_y} z\, dA_y$$

$$P_x = \gamma z_{sx} A_x,\quad P_y = \gamma z_{sy} A_y$$

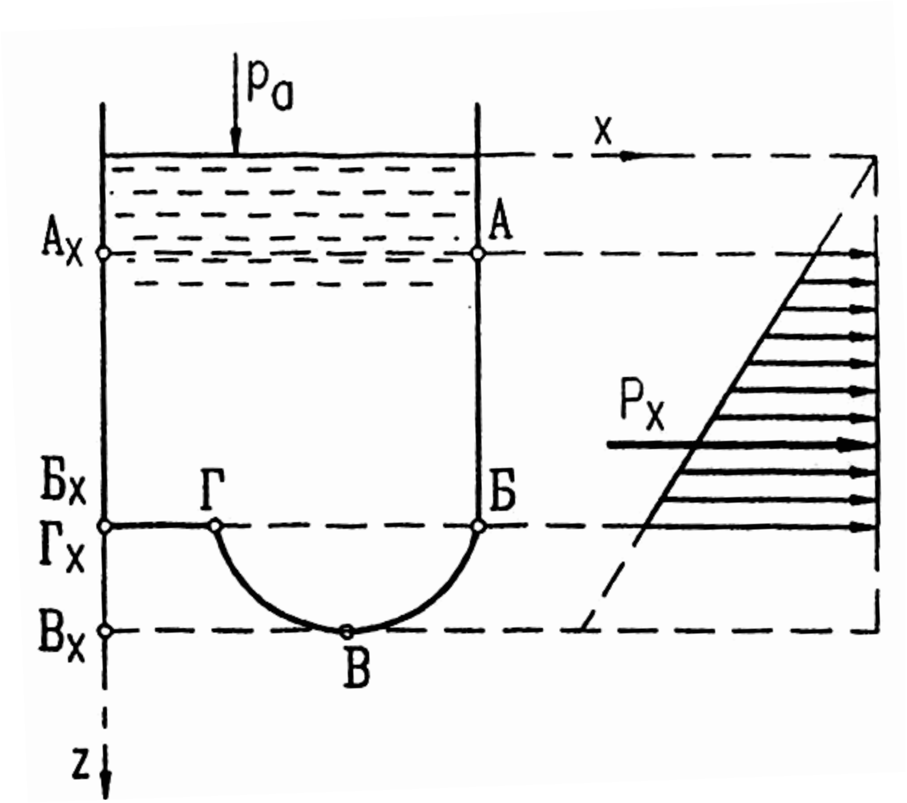
$$z_{Dx} = \frac{J_y}{z_{sx} A_x},\quad y_{Dx} = \frac{J_{yz}}{z_{sx} A_x}$$

2. Статика на флуидите

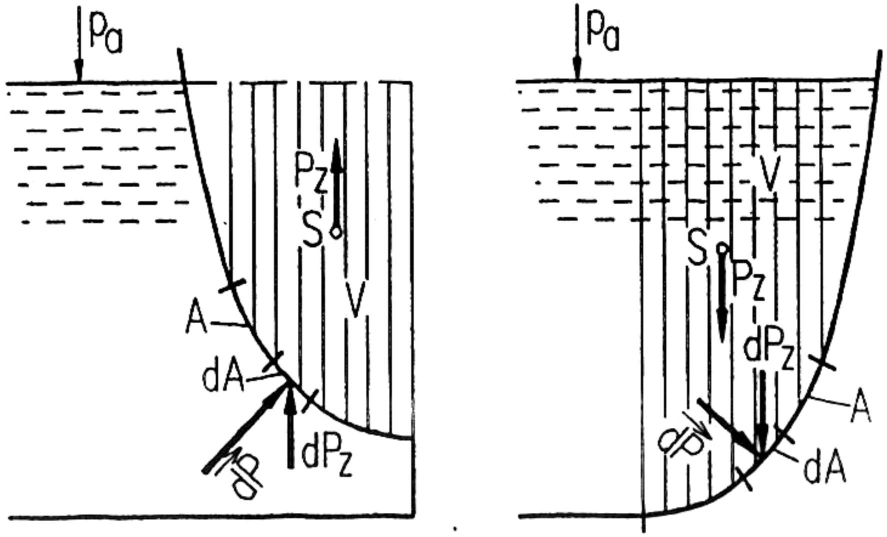
2.4. Сила на притисокот

Притисок на криви површини

Преклопување на одделни површини (БВГ)



$$P_z = \gamma \int_{A_z} z \, dA_z = \gamma \int_{V} dV = \gamma V = g \rho V$$

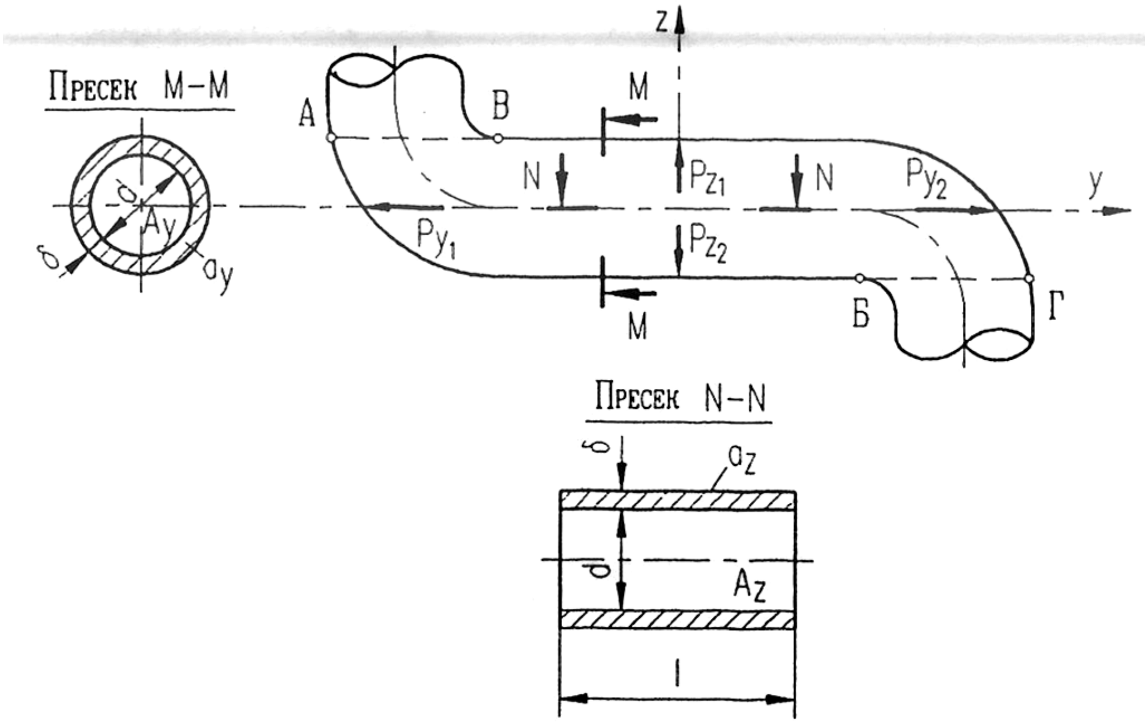


2. Статика на флуидите

2.4. Сила на притисокот

Притисок на криви површини

Димензионирање на дебелина на ѕид на цевковод



$$\sigma_y = \frac{P_y}{a_y} = \frac{p\,d^2\,\pi/4}{d\,\pi\,\delta} = \frac{p\,d}{4\delta}$$

$$\sigma_z = \frac{P_z}{a_z} = \frac{p\,d\,l}{2\delta\,l} = \frac{p\,d}{2\delta}$$

$$\delta = \frac{p\,d}{2\,\sigma_{doz.}}$$

2. Статика на флуидите

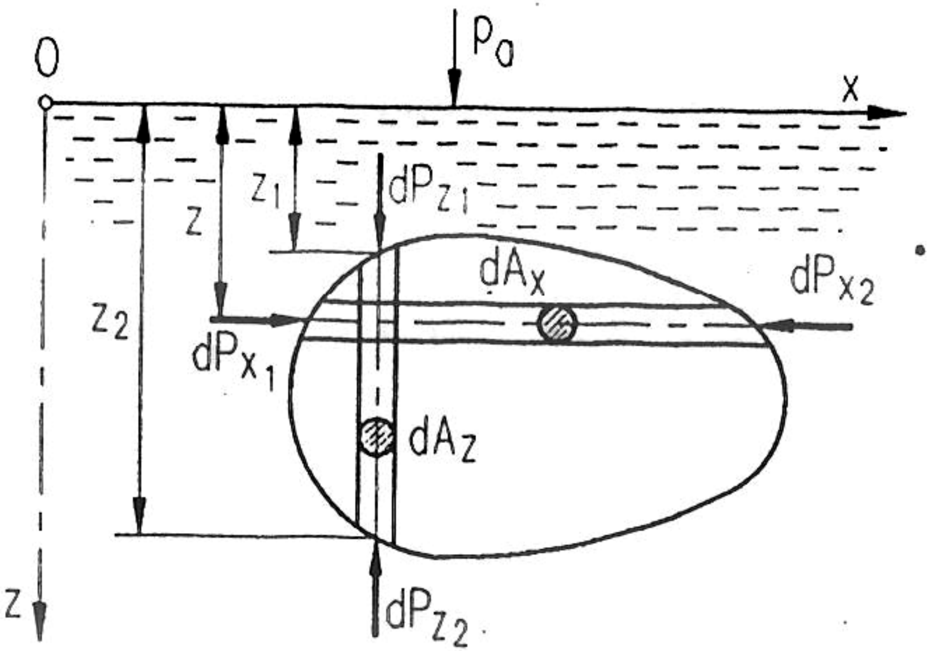
2.5. Пливање на телата

Хидростатички потисок

$$dP_{x1} = dP_{x2} = \gamma z \, dA_x$$

$$dP_z = dP_{z2} - dP_{z1} = \gamma \left(z_2 - z_1\right) dA$$

$$dP_z = \gamma \, dV = \rho g \, dV$$



$$P_z = \gamma \int_V dV = \gamma V = \rho g V$$

Хидростатички потисок (Архимедова сила)

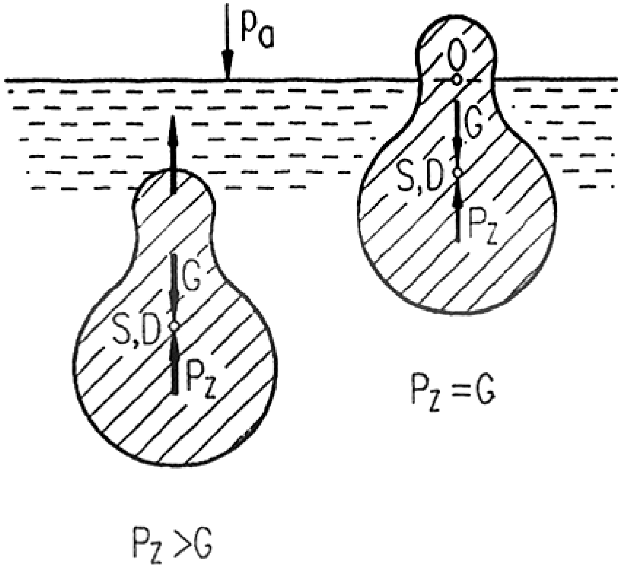
2. Статика на флуидите

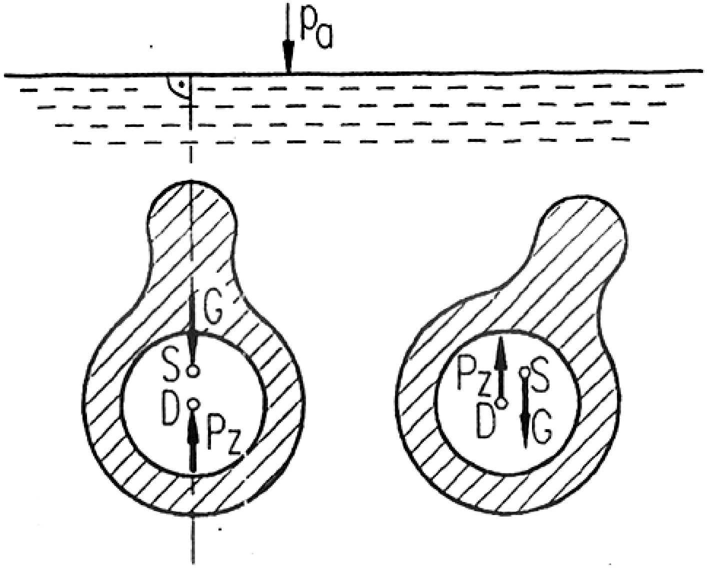
2.5. Пливање на телата

Равенка на пливањето

Потребни услови за да телото може да плива:

- **Силата на потисок P_z по апсолутна вредност мора да биде еднаква на тежината на телото ($P_z = G$ – *основна равенка на пливањето*)**
- **Нападната точка *D* на силата на потисокот и тежиштето на телото *S*, односно нападната линија на тежината на телото, мораат да лежат на иста вертикална линија**





2. Статика на флуидите

2.5. Пливање на телата

Равенка на пливањето

- **Правата линија што ги сврзува нападната точка на силата на тежината на телото и нападната точка на силата на потисок се вика оска на пливањето (оски на симетрија)**
- **Длабочина на потопување**
- **Слободна површина = рамнина на пливање**
- **Површина на пливањето**

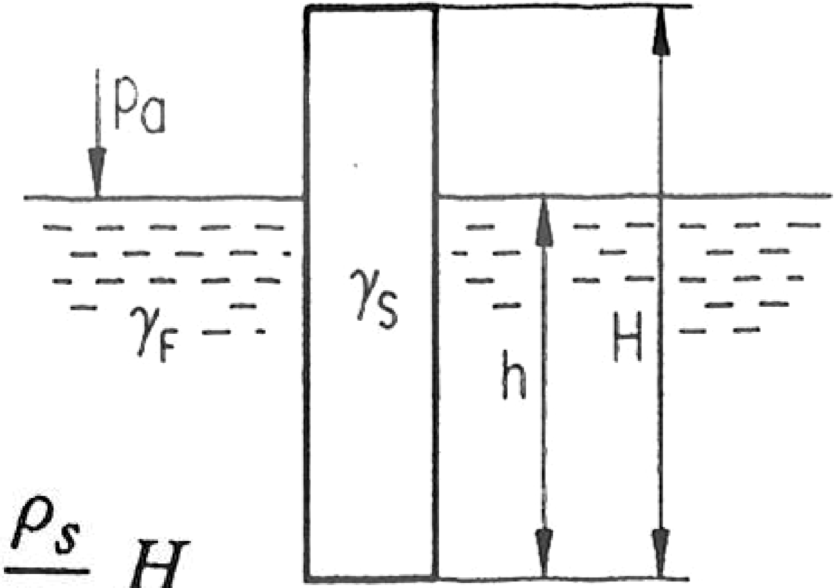
$$\gamma_s < \gamma_F$$

$$\gamma_s A H = \gamma_F A h$$

$$P_z = \gamma_F A h$$

$$G = \gamma_s A H$$

$$h = \frac{\gamma_s}{\gamma_F} H = \frac{\rho_s}{\rho_F} H$$



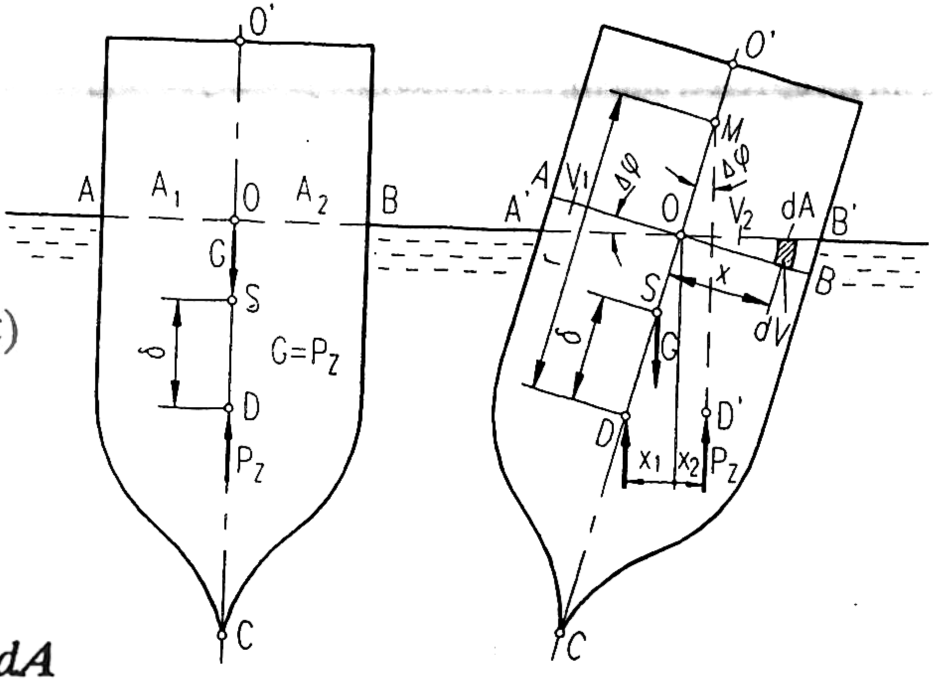
2. Статика на флуидите

2.5. Пливање на телата

Стабилност на телата при пливање

Во случај да се исполнети двата услови за пливање на телата, постојат три случаи за карактерот на рамнотежата на телото што плива:

- **Стабилна ($\delta < r$)**
- **индиферентна ($\delta = r$)**
- **лабилна ($\delta > r$)**



$$P_z x_2 = -P_z x_1 + \int_{V} \gamma \, dV \cdot x - \left(-\int_{V_1} \gamma \, dV \cdot x\right)$$

$$P_z (x_1 + x_2) = \gamma \, V (x_1 + x_2) =$$

$$= \gamma \, \Delta\varphi \, \Big(\int_{A_2} x^2 dA + \int_{A_1} x^2 dA\Big) = \gamma \, \Delta\varphi \int_{A} x^2 dA$$

2. Статика на флуидите

2.5. Пливање на телата

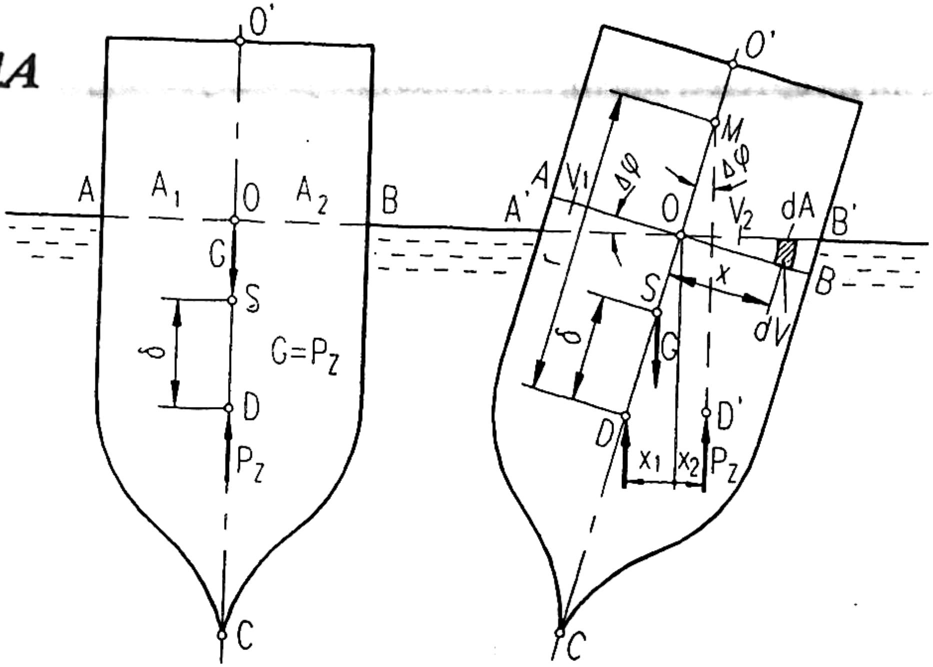
Стабилност на телата при пливање

$$P_z\,(x_1 + x_2) = \gamma\,V(x_1 + x_2) =$$

$$= \gamma\,\Delta\varphi\,(\int_{A_2} x^2\,dA + \int_{A_1} x^2\,dA) = \gamma\,\Delta\varphi \int_{A} x^2\,dA$$

$$x_1 + x_2 = r\sin\Delta\varphi \qquad x_1 + x_2 = r\,\Delta\varphi$$

$$r = \frac{J_{yo}}{V}$$



Најмал момент на инерција (најмал метацентричен пречник) има околу надолжната оска на телата што пливаат!!

2. Статика на флуидите

2.5. Пливање на телата

Стабилност на телата при пливање

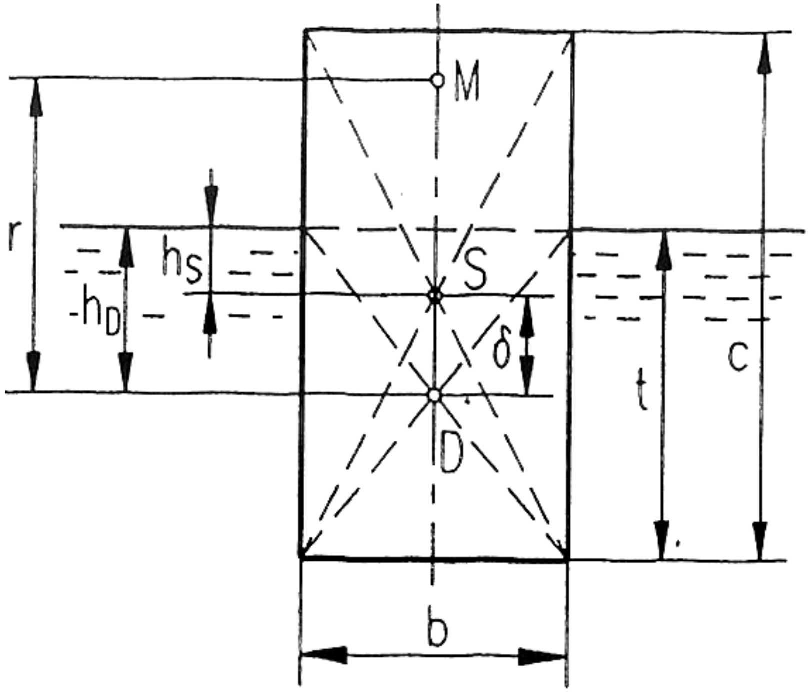
Длабочина на пливањето:

$$t = \frac{\gamma_s}{\gamma_F}\ c = \frac{\rho_s}{\rho_F}\ c$$

Од условот *r* >δ :

$$\frac{b}{c} > \sqrt{6\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\left(1-\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\right)} = f_1\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\right)$$

$$\frac{b}{c} < \frac{1}{\sqrt{6\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\left(1-\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\right)}} = f_2\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\right)$$



2. Статика на флуидите

2.5. Пливање на телата

Стабилност на телата при пливање

$$\frac{b}{c} > \sqrt{6\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\left(1-\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\right)} = f_1\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\right) \qquad \frac{b}{c} < \frac{1}{\sqrt{6\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\left(1-\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\right)}} = f_2\left(\frac{\gamma_s}{\gamma_F}\right)$$