Глава 8. Полови, нули и стабилност

Важно барање што се поставува пред секој управувачки систем е дека тој мора да биде стабилен. Ова значи дека секој конечен влез во системот мора да предизвика конечен излез од системот, т.е. излезот од системот не смее да расте бесконечно со изминување на времето од појавата на влезот во системот што е конечен. Оваа глава е посветена на условите што треба да бидат исполнети за да еден систем биде стабилен. За линеарни системи условите за стабилност можат да се дефинираат преку половите на преносната функција со затворена омча. Половите се корени на именителот на преносната функција на затворена омча, а нулите се корени на броителот.

8.2 Дефиниции на стабилност

Еден систем е стабилен ако секој ограничен, т.е. конечен, влез предизвикува ограничен излез. Системот не мора да е стабилен ако еден ограничен влез предизвикува ограничен излез, туку тоа мора да важи за сите ограничени влезови.

Алтернативно, еден систем е стабилен ако импулсен влез предизвикува излез што се губи (исчезнува) со тек на времето, односно добива вредност нула кога времето се стреми кон бесконечност. Ако влезот во системот е импулсен, а излезот не се стреми кон нула и не расте кон некоја бесконечна вредност, туку се стреми кон некоја ненулта конечна вредност, системот се нарекува критично или гранично стабилен.

8.3 Полови и нули

Преносната функција на затворена омча $G(s)$ на еден систем може, во општ случај, да се напише во облик

$$G(s)=\frac{K\left(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+b_{m-2}s^{m-2}+\dots\dots\dots+b_1s+b_0\right)}{\left(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\dots\dots\dots+a_1s+a_0\right)} \tag{8.1}$$

Ако се одредат корените на полиномите во броителот и именителот на преносната функција на затворена омча (8.1), може да се напише:

$$G(s)=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\dots\dots\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\dots\dots\dots(s-p_n)} \tag{8.2}$$

каде корените на броителот $z_1, z_2, \dots, z_m$ се наречени нули на системот, корените на именителот $p_1, p_2, \dots, p_n$ се наречени полови на системот, K е константа или засилување на системот.

Нули на системот се вредностите на s за кои преносната функција на затворена омча постанува нула. Полови на системот се вредностите на s за кои преносната функција на затворена омча има бесконечна вредност, т.е. вредноста на именителот постанува нула. На пример, ако преносната функција на еден систем е

$$G(s)=\frac{s-2}{s+5}$$

тогаш, броителот е $(s-2)$, и преносната функција е нула ако $(s-2)=0$, т.е. ако $s=2$. Оттука, $s=2$ е нула на системот. Со оглед дека именителот е $(s+5)$, тогаш преносната функција е бесконечност ако именителот е нула, т.е. $(s+5)=0$, односно $s=-5$. Оттука, $s=-5$ е пол на системот.

Половите и нулите можат да бидат реални или комплексни броеви. На пример, ако именителот е (s^2-6s+8), тогаш, со оглед дека $(s^2-6s+8)=(s-4)(s-2)$, половите на системот се $+4$, и $+2$. Међутоа, ако именителот беше (s^2+1), тогаш, со оглед дека $(s^2+1)=(s+j)(s-j)$, половите на системот се $+j$, и $-j$. Во општ случај половите и нулите можат да се напишат во облик

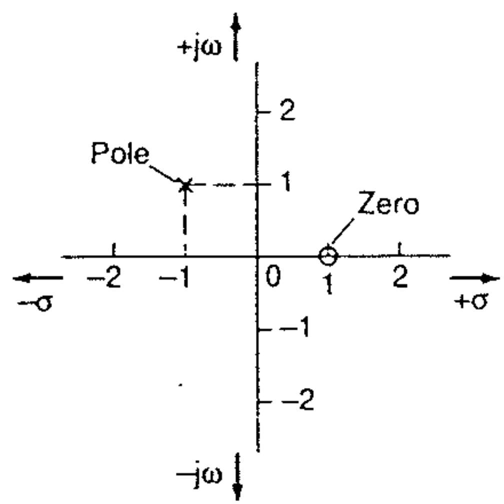
$$s=\sigma+j\omega \tag{8.3}$$

каде σ е реалниот дел, и $j\omega$ е имагинарниот дел.

Преносната функција на системот е комплетно дефинирана ако се познати вредностите на половите и нулите на системот и вредноста на засилувањето K.

8.4 Пол-нула мапа

Половите и нулите на една преносна функција можат да се претставват на цртеж наречен пол-нула мапа. На слика 8.1 прикажани се оските што се користат за пол-нула мапата. Оската x е реалниот дел на полот или нулата, и оската y е имагинарниот дел. Позицијата на полот се означува со “x”, а позицијата на нулата со мало кругче “o”. Пол-нула мапата со двете оски (реална и имагинарна), т.е. со двете дименизии, е позната како $s-$рамнина. Половите и нулите на левата страна од имагинарната оска (левата страна на мапата) се сите негативни, половите и нулите на десната страна се позитивни. Половите и нулите се или реални или имагинарни - кога се појавуваат во парови како $(\sigma \pm j\omega)$.



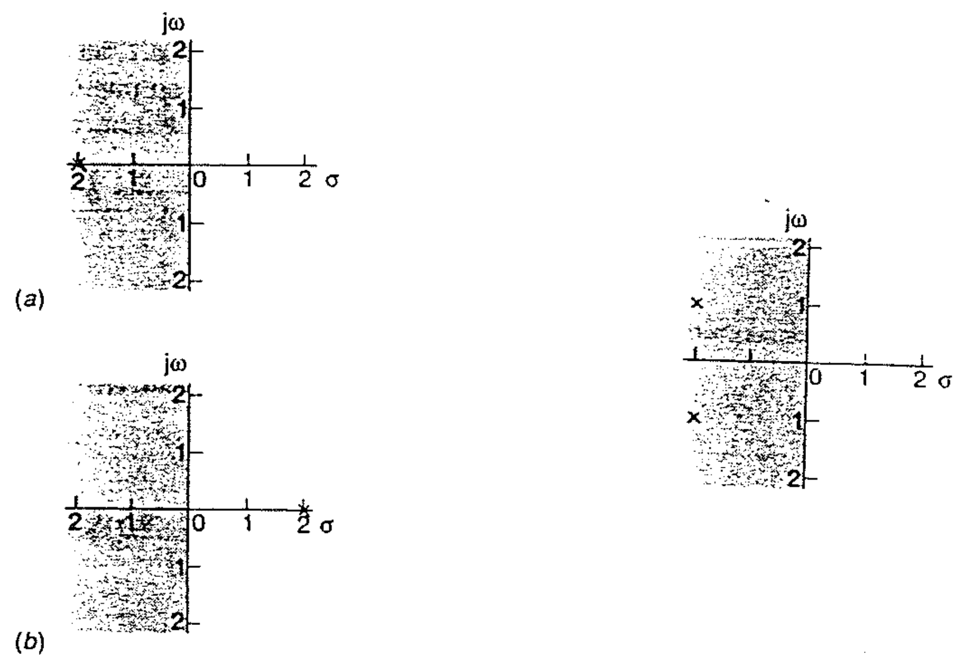
Слика 8.1. Пол-нула мапа

8.5 Стабилност и полови

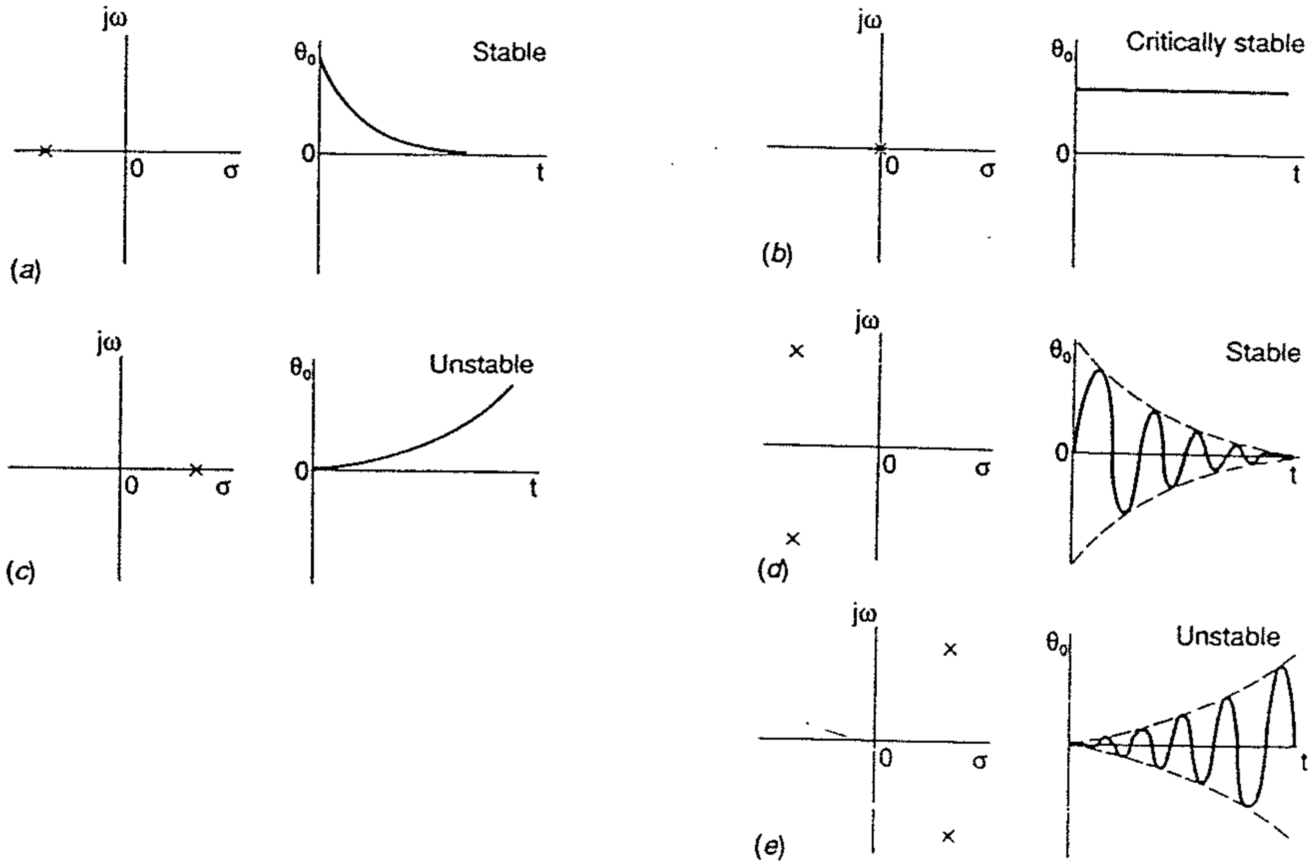
Стабилноста на еден систем може да се одреди со разгледување на промената на излезот од системот кога на влез во системот се доведе импулсна функција. Ако системот е стабилен, тогаш излезот треба да исчезнува со тек на времето, т.е. излезот треба да добие вредност нула со тек на времето. Ако системот не е стабилен, тогаш излезот ќе расте со тек на времето.

Може да се заклучи дека кога влез во еден систем е единечна импулсна функција, излезот е во облик на збир од експоненцијални членови. Ако само еден од овие експоненцијални членови експоненцијално расте, т.е. има експонент со поситивна функција од t (на пример e^{2t}), тогаш излезот континуирано расте со тек на времето и системот е нестабилен. Ова се случува ако било кој од половите има позитивен реален дел, односно ако во именителот на преносната функција е вклучен член $(s-a)$. Ако во именителот се вклучени пар полови со имагинарен дел $\pm j\omega$, тогаш излезот е секогаш осцилаторен (на пример системот со преносна функција (8.6)). Во овој случај системот е стабилен ако реалниот дел од парот полови е негативен, односно системот не е стабилен ако реалниот дел е позитивен.

Значи еден систем е стабилен ако сите полови на преносната функција се во левата половина од пол-нула мапата. Ако само еден пол е во десната половина, системот е нестабилен. Системот е критично стабилен ако еден или повеќе полови лежат на вертикалната оска на пол-нула мапата, т.е. имаат реален дел еднаков на нула, и ниеден пол не лежи во десната половина. На слика 8.2 прикажани се пол-нула мапите за трите системи со преносни функции (8.4), (8.5) и (8.6), и на слика 8.3 прикажани се излези за различни положби на половите кога влезот е импулсна функција. На сликата е прикажана само локацијата на половите, а не и на нулите, заради тоа што за одредување на стабилноста на системот важна е локацијата на половите на системот, додека локацијата на неговите нули е ирелевентна.

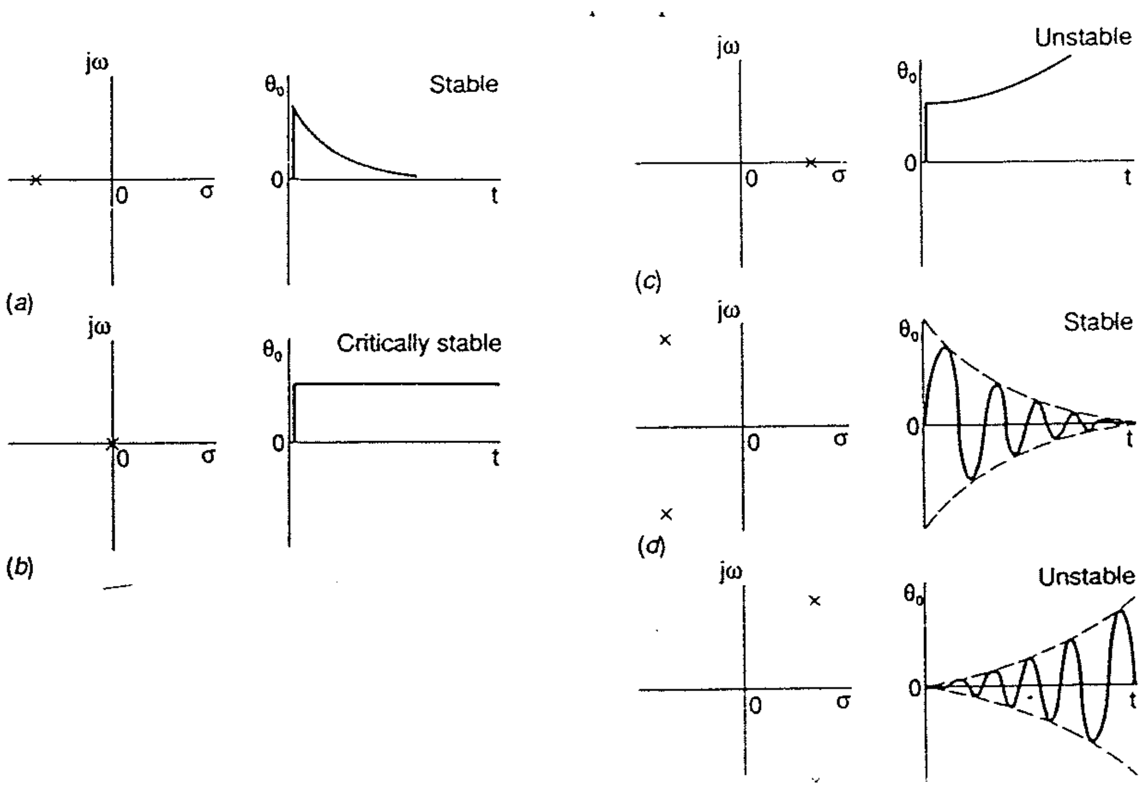


Слика 8.2. Пол нула мапи, и стабилност (стабилните области се затемнети)
a) пол во -2, нема нули, стабилен систем; b) пол во +2, нема нули, нестабилен систем; c) полови во $(-2 \pm j1)$, нема нули, стабилен систем.



Слика 8.3. Излези за различни положби на половите за импулсен влез

На сличен начин може да се спроведе анализа на стабилноста на еден систем кога влез во системот е отскочна функција. Во овој случај влезот е ограничен и системот е стабилен ако и излезот е ограничен. На слика 8.4 прикажани се излези за различни положби на половите кога влезот е отскочна функција.



Слика 8.4. Излези за различни положби на половите за отскочен влез

8.6 Ротов критериум за стабилност

Стабилноста на еден систем даден преку неговата преносна функција се одредува со проверка дали некој од корените на именителот на преносната функција на системот има позитивен реален дел. Меѓутоа корените не можат лесно да се одредат ако именителот е од облик

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots\dots\dots + a_1 s + a_0 \tag{8.7}$$

и n е поголемо од 3 или 4. Во овој случј се применува Ротовиот критериум за стабилност.

Прв тест е испитување на коефициентите во именителот на преносната функција (равенка (8.4)). Ако сите коефициенти се присутни (т.е. ниеден од нив не е нула), и сите се позитивни, тогаш е можно системот да биде стабилен. Ако било кој коефициент е негативен, тогаш системот е сигурно нестабилен. Ако било кој од коефициентите е нула, тогаш, во најдобар случај, системот е критично (гранично) стабилен. На пример, ако именителот има облик $\left(s^3 + 2s^2 + 3s + 1\right)$, системот може да биде стабилен затоа што сите коефициенти во полиномот во именителот се присутни и сите се позитивни. Меѓутоа, ако именителот има облик $\left(s^3 - 2s^2 + 3s + 1\right)$, системот е нестабилен затоа што постои негативен коефициент. Ако именителот има облик $\left(s^3 + 2s^2 + 3s\right)$, слободниот член недостасува, и системот, во најдобар случај, може да биде стабилен критично (гранично) стабилен.

За системи кои го задоволуваат првиот тест (имаат полином во именителот на преносната функција во кој сите коефициенти се позитивни) се спроведува вториот тест за испитување на стабилноста. Коефициентите на полиномот (8.7) се пишуваат во т.н. Ротова табела. Првите два реда од Ротовата табела се:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}

Следните редови од Ротовата табела се одредуваат од елементите во првите два реда се до редот s^0. Ротовата табела за систем од n-ти ред, т.е. за полином од n-ти степен (р-ка (8.7)) во именителот на преносната функција има вкупно $(n+1)$ редови:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3
....	....	....	....
....	....	....	....
....	....	....	....
s^2	x_1	x_2	x_3
s^1	y_1	y_2	
s^0	z_1		

Елементите во третиот ред се одредуваат преку елементите во првите два реда на следниот начин

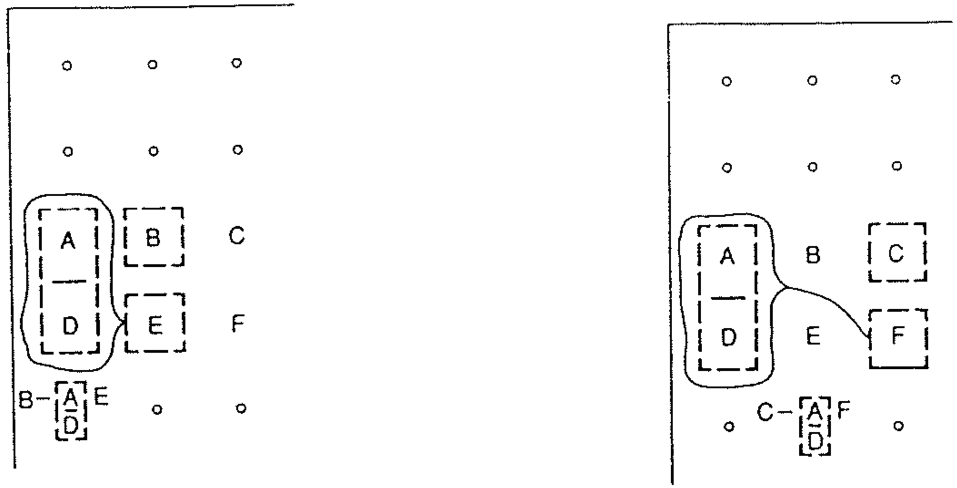
$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-3} \tag{8.8}$$

$$b_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-5} \tag{8.9}$$

Елементите во четвртиот ред се одредуваат преку елементите во претходните два реда на следниот начин

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_2 \qquad c_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_3 \tag{8.10}$$

Еден начин за полесно памтење на овие правила за одредување на елементите во Ротовата табела е прикажан на слика 8.5.



Слика 8.5. Одредување на елементите во Ротовата табела

По пополнувањето на целата Ротова табела се врши проверка на елементите од првата колона на табелата. Ако сите елементи во првата колона имаат ист знак, тогаш корените на полиномот (8.7) имаат негативни реални делови, и лежат во левата половина на пол-нула мапата. Тоа значи дека системот е стабилен ако сите елементи во првата колона имаат ист знак. Ако постои промена на знакот на елементите во првата колона, тогаш бројот на корени со позитивен реален дел (што го прават системот нестабилен) е еднаков со бројот на промени на знакот. Ако во првата колона се појави нула, тогаш таа се заменува со некој бесконечно мал позитивен број ε, по што процедурата на одредување на следните елементи и на стабилноста на системот продолжува на ист начин како и во случај на ненулти елементи во првата колона.

Со Ротова табела одреди ја стабилноста на системите што ги имаат следните именители во своите преносни функции:

$$G(s)=\frac{2s+1}{s^4+2s^3+3s^2+4s+1} \qquad G(s)=\frac{2s+1}{s^4+s^3+s^2+4s+1}$$

$$s^3+4s^2+8s+K$$

За системот на сликата да се одредат вредностите на **K** за кои ќе биде стабилен.