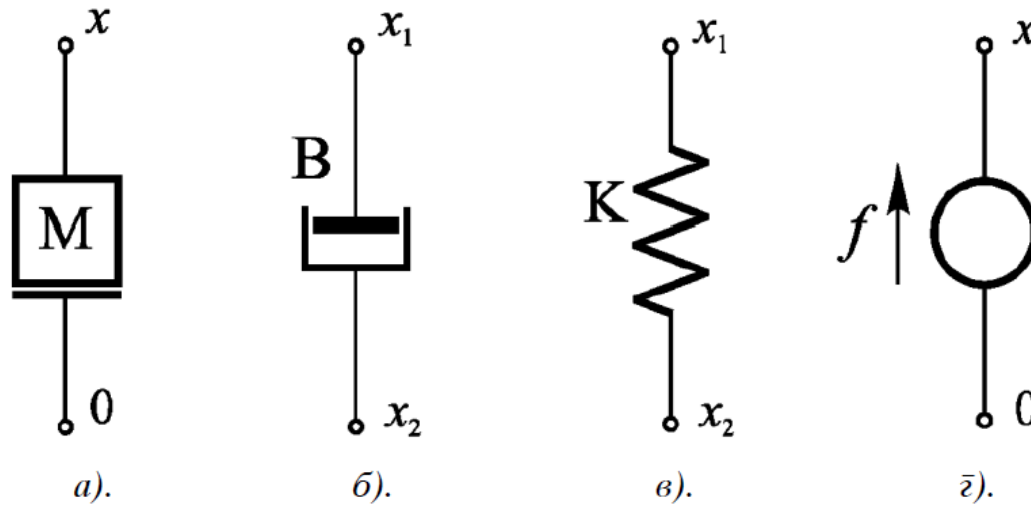


# Глава 2. Модели на системи

## -Механички системи

Постојат четири типа на елементи од кои се составени механичките транслаторни системи.



Слика 2.1. Симболи на елементите од еквивалентна механичка шема

а). Маса

б). Пружина

в). Механички отпорник

г). Извор на сила

$$f_M = M \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = M \cdot \frac{dv}{dt} = M \cdot a$$

Каде што е:

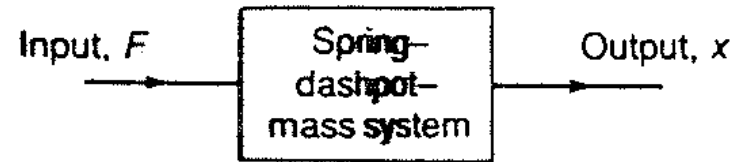
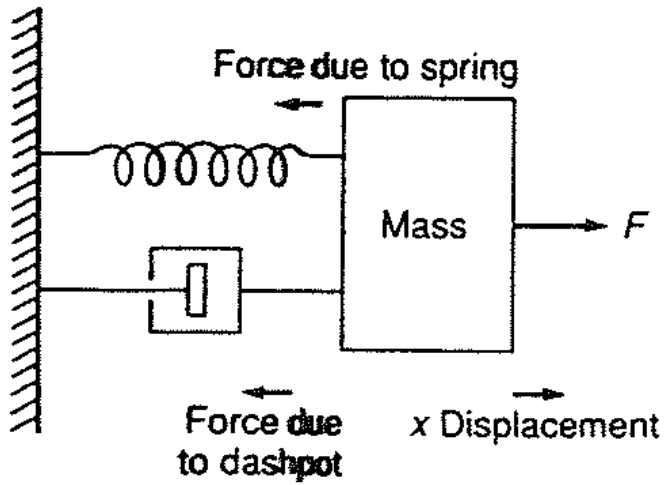
$x$  (m) - позиција на масата,

$v$  (m/s) - брзина на масата,

$a$  (m/s<sup>2</sup>) - забрзување на масата.

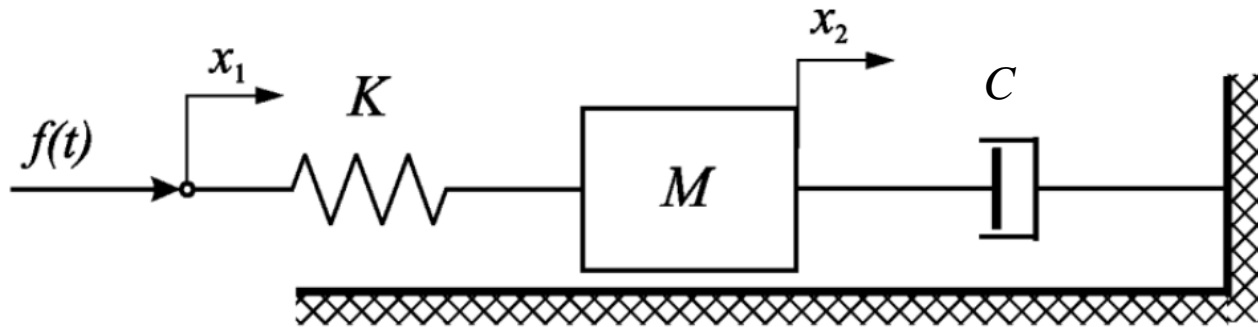
$$f_B = B \cdot (v_1 - v_2) = B \cdot \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right)$$

$$f_K = K(x_1 - x_2)$$



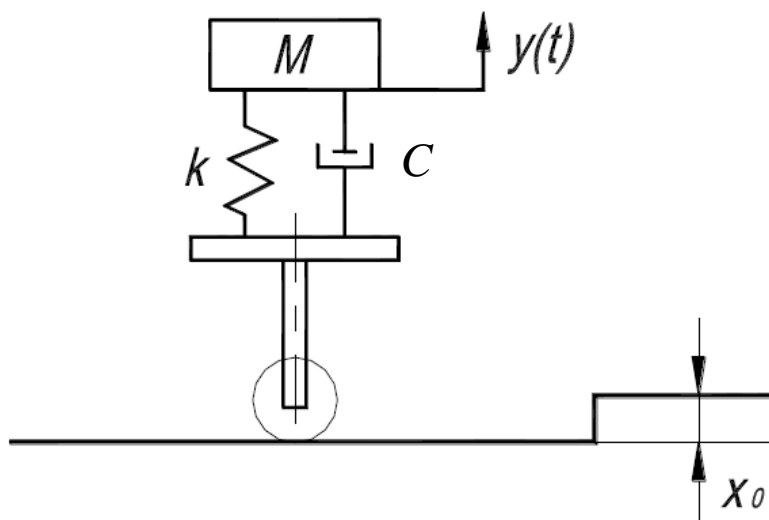
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F$$

**Задача** За механичкиот систем прикажан на слика да се нацрта еквивалентната механичка шема и да се напише математичкиот модел на системот, ако промената на силата е влезна големина:  $f(t) \equiv x(t)$ , а промената на позицијата на масата е излезна големина:  $x_2(t) \equiv y(t)$ .



**Задача** На слика е прикажан упростен модел на едно возило. Возилото се движи долго време по рамен пат со константна брзина и во моментот  $t = 0$  наидува на нерамнина на патот.

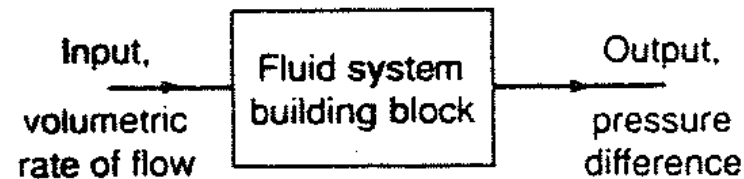
Да се определи математичкиот модел на возилото со кој се опишува вертикалното поместување на возилото -  $y(t)$  во зависност од промената на профилот на патот -  $x(t)$ , ако е дадено:  $M = 1000 \text{ (kg)}$ ,  $B = 12 \cdot 10^3 \text{ (Ns/m)}$ ,  $K = 20 \cdot 10^3 \text{ (N/m)}$ .



# Глава 2. Модели на системи

## -Хидраулични системи

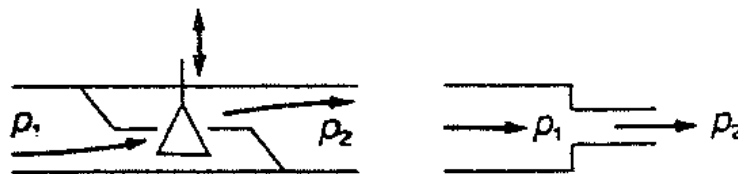
Влез во хидрауличниот систем е волуменскиот проток  $q$ , а излез е разликата во притисоците  $(p_1 - p_2)$  - слика 2.6. Кај хидрауличните системи постојат три основни градбени блокови: **хидраулична отпорност**, **хидраулична капацитивност** и **хидраулична инертност**.



Хидрауличната отпорност е отпорот на протокот на флуид што се јавува како резултат на протекувањето на флуидот низ вентили или промени на дијаметарот на цевката (слика 2.7). Зависноста помеѓу волуменскиот проток на флуид  $q$  низ отпорниот елемент и резултирачката разлика на притисоци ( $p_1 - p_2$ ) е

$$p_1 - p_2 = Rq \quad (2.13)$$

каде  $R$  е константа наречена хидрауличен отпор. Со зголемување на отпорот се зголемува и разликата на притисоците при еден ист проток.

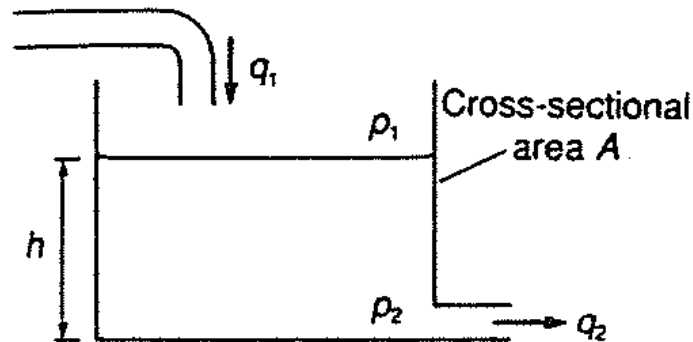


Хидрауличната капацитивност е поим што се користи за да се опише потенцијалната енергија што ја има течноста. На пример, висината на течноста во еден резервоар (слика 2.8), т.е. таканаречената притисна висина, е еден облик на таква потенцијална енергија на течноста. За ваква капацитивност, брзината на промена на волуменот на течноста  $V$  во резервоарот, т.е.  $dV/dt$ , е еднаква на разликата помеѓу волуменскиот проток на течност што влегува во резервоарот  $q_1$  и волуменскиот проток на течност што излегува од резервоарот:

$$q_1 - q_2 = \frac{dV}{dt}$$

Но  $V = Ah$ , каде  $A$  е површината на нивото на течност во резервоарот,  $h$  е висината на течноста во резервоарот. Оттука

$$q_1 - q_2 = \frac{d(Ah)}{dt} = A \frac{dh}{dt}$$





Разликата помеѓу притисокот на течноста на влез во резервоарот (притисок што владее на површината на резервоарот) и притисокот на излез од резервоарот изнесува  $p$ , каде

$$p = \rho g h$$

каде  $\rho$  е густината на течноста и  $g$  е земјиното забрзување. Значи ако се работи за некомп्रेसибилан флуид (течност),  $\rho = \text{const.}$ , и важи

$$q_1 - q_2 = A \frac{d\left(\frac{p}{\rho g}\right)}{dt} = \frac{A}{\rho g} \frac{dp}{dt}$$

Хидрауличната капацитивност е дефинирана како

$$C = \frac{A}{\rho g} \tag{2.14}$$

Значи

$$q_1 - q_2 = C \frac{dp}{dt} \tag{2.15}$$

Хидрауличната инертност е поим што е еквивалентен со поимот индуктивност кај електричните системи или со пружината кај механичките системи. За да се забрза флуидот и со тоа да се зголеми неговата брзина потребна е сила. Нека се разгледа течноста со маса  $m$  (слика 2.9). Резултантната сила што делува на течноста е

$$F_1 - F_2 = p_1 A - p_2 A = (p_1 - p_2) A$$

каде  $(p_1 - p_2)$  е разликата помеѓу притисоците и  $A$  е површината на попречниот пресек. Оваа резултантна сила предизвикува забрзување  $a$  на течноста со маса  $m$ , и оттука

$$(p_1 - p_2) A = m a = m \frac{dv}{dt}$$

каде  $v$  е брзината на движење на течноста со маса  $m$ .

Масата течност има волумен  $AL$ , каде  $L$  е растојанието помеѓу точките во кои се мерат притисоците  $p_1$  и  $p_2$ . Ако течноста има густина  $\rho$ , тогаш  $m = AL\rho$ , и

$$(p_1 - p_2) A = AL\rho \frac{dv}{dt}$$

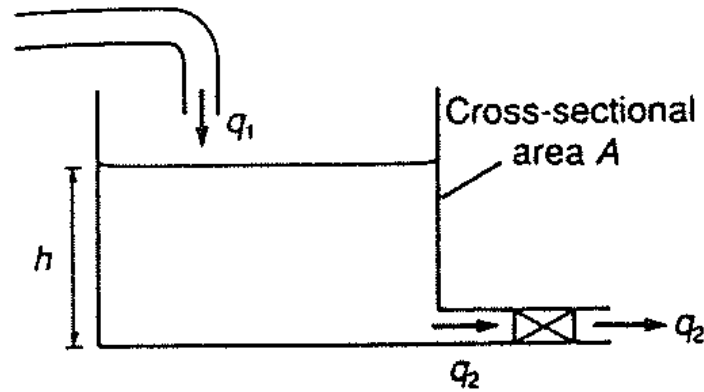
Но волуменскиот проток е  $q = Av$ , и оттука

$$(p_1 - p_2) A = L\rho \frac{dq}{dt} = I \frac{dq}{dt} \quad (2.17)$$

каде хидрауличната инертност е дефинирана како

$$I = \frac{L\rho}{A} \quad (2.18)$$

$$q_1 - q_2 = C \frac{dp}{dt}$$



$$p = Rq_2$$

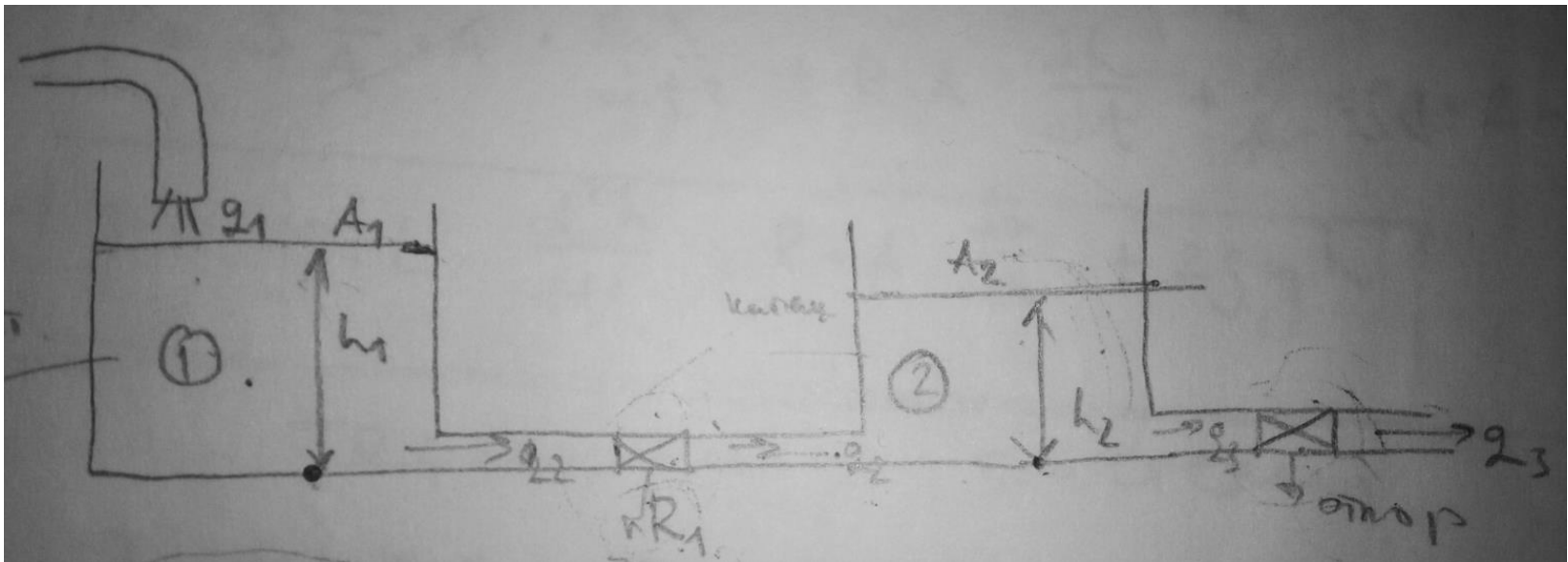
$$p = \rho g h$$

$$q_1 - \frac{p}{R} = C \frac{dp}{dt}$$

$$q_1 - \frac{h\rho g}{R} = C \frac{d(h\rho g)}{dt}$$

$$q_1 = A \frac{dh}{dt} + \frac{\rho g h}{R}$$

- На сликата е прикажан хидрауличен систем. Да се напишат релациите кои опишуваат како се менува висината на течноста во двата резервоари во текот на времето. Да се занемари инерцијата.



# Глава 2. Модели на системи

## -Термодинамички системи

Постојат два основни градбени блокови за термичките системи: **термичка отпорност** и **термичка капацитивност**. Проток на топлина помеѓу две точки постои само ако постои разлика во температурите помеѓу нив. Термичката отпорност  $R$  се дефинира на следниот начин. Ако  $q$  е протокот на топлина и  $(T_1 - T_2)$  е температурната разлика, тогаш

$$q = \frac{(T_2 - T_1)}{R} \quad (2.20)$$

Вредноста на отпорноста зависи од начинот на преносот на топлина. Ако топлината се пренесува со кондукција (спроведување) на топлината низ цврсто тело, тогаш за едномерна кондукција важи

$$q = Ak \frac{(T_2 - T_1)}{L}$$

каде  $A$  е плоштината на пресечната површина на материјалот преку кој се спроведува топлината,  $k$  е термичката кондуктивност,  $L$  е должината на материјалот помеѓу точките чии температури се  $T_1$  и  $T_2$ .

Термичката капацитивност е мерка за акумулацијата на внатрешна енергија во еден систем. Значи ако протокот на топлина во еден систем е  $q_1$ , а протокот на топлина што излегува надвор од системот е  $q_2$ , тогаш

$$\text{Промена на внатрешната енергија} = q_1 - q_2$$

Пораст на внатрешната енергија значи и пораст на температурата. Со оглед дека

Промената на внатрешната енергија =  $mc \times$  (брзина на промена на температурата)

каде  $m$  е масата и  $c$  е специфичната топлотна капацитивност, следи

$$q_1 - q_2 = mc \frac{dT}{dt}$$

каде  $\frac{dT}{dt}$  е брзината на промена на температурата. Оваа равенка може да се напише како

$$q_1 - q_2 = C \frac{dT}{dt} \quad (2.23)$$

каде

$$C = mc \quad (2.24)$$

е термичката капацитивност.

- На сликата е прикажан термички систем кој се состои од две простории. Во првата просторија има греалка која емитува топлина  $q$ . Ако температурата во првата просторија е  $T_1$  во втората  $T_2$  и во околината е  $T_3$  при што  $T_1 > T_2 > T_3$ . Да се напишат релациите кои опишуваат како се менуваат температурите во двете простории во текот на времето. Сидовите имаат иста отпорност и занемарлива капацитивност.

