Глава 11. Фреквентен одзив

Во Глава 6 беше анализиран одзивот од еден систем кога на неговиот влез се доведе импулсна функција, отскочна функција, или нагибна функција. Во оваа Глава анализата е проширена и за случај кога на влез во системот се доведе синусоидален сигнал. Овој влез се применува за тестирање на системите и е мошне корисен извор на информации за проектирање и анализа на управувачки системи.

Поимот *фреквентен одзив* е дефиниран како стационарен одзив од еден систем кога на влез се доведе синусоидална функција, при што одзивот се набљудува за еден опсег од фреквенции на влезниот сигнал. Стационарен одзив е одзивот што останува кога сите преодни одзиви исчезнат со текот на времето. Постојат неколку методи што се користат за анализа на податоци од фреквентниот одзив од еден систем. Во оваа Глава се анализирани Бодеовиот метод и Никвистовиот метод.

11.2 Фреквентен одзив

Ако еден синусоидален влез се примени на еден линеарен систем, одзивот од системот е исто така синусоидален и има иста фреквенција. Излезот може да се разликува од влезот само по својата амплитуда и фаза. Односот на амплитудата на излезот во однос на амплитудата на влезот вообичаено се нарекува големина, или однос на амплитуди или засилување. Поместувањето на фазата на синусоидалниот излез во однос на фазата на синусоидалниот влез се нарекува фаза. Варијацијата на големината и фазата со промена на фреквенцијата е наречена *фреквентен одзив* од системот.

Преносната функција $G(s)$ на еден систем во општ случај може да се претстави со:

$$G(s)=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\ldots\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\ldots\ldots(s-p_n)} \tag{10.1}$$

каде $z_1, z_2, \ldots, z_m$ се нулите на системот, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ се половите на системот, K е константа или засилување на системот. Ако $\theta_i(s)$ е влезот во системот, тогаш излезот од системот е

$$\theta_0(s)=G(s)\theta_i(s)=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\ldots\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\ldots\ldots(s-p_n)}\theta_i(s) \tag{10.2}$$

Ако влезот е синусоидален, т.е.

$$\theta_i(t)=a\sin\omega t$$

каде a е амплитудата, и ω е аголната фреквенција на влезот во rad/s, тогаш

$$\theta_i(s)=\frac{a\omega}{\omega^2+s^2}$$

и равенката (10.2) постанува

$$\theta_0(s)=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\ldots\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\ldots\ldots(s-p_n)}\;\frac{a\omega}{\omega^2+s^2} \tag{10.3}$$

Со развој на прости дропки на изразот (10.3), и со инверзна Лапласова трансформација, одзивот од системот може да се добие во облик

$$\theta_0(t) = (\text{ч ленови од преодниот одзив}) + (\text{ч ленови од стационарниот одзив})$$

Членовите од преодниот одзив исчезнуваат (постануваат нула) со текот на времето, и стационарниот одзив (излез) од системот ќе има облик

$$\theta_0(t) = a\,|G(j\omega)|\,\sin(\omega t + \phi) \tag{10.4}$$

Стационарниот излез е синусоидален со иста аголна фреквенција ω како и влезот. $|G(j\omega)|$ е големината на преносната функција $G(s)$ кога s ќе се замени со $j\omega$. Функцијата $G(j\omega)$ е наречена функција на фреквентниот одзив во таканаречениот фреквентен домен $j\omega$. $G(j\omega)$ може да се одреди со замена на s со $j\omega$ во функцијата $G(s)$, и со преуредување на добиениот комплексен број со цел да се добијат одвоено неговиот реален и имагинарен дел, односно да се одредат големината и фазата на комплексниот број.

На пример, нека преносната функција е

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Ако се замени $s = j\omega$, следи

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}=\frac{1}{2+j\omega}\,\frac{2-j\omega}{2-j\omega}=\frac{-j\omega+2}{\omega^2+4}=\frac{2}{\omega^2+4}-\frac{j\omega}{\omega^2+4}$$

Реалниот дел од комплексниот број е еднаков на $\frac{2}{\omega^2+4}$, и имагинарниот дел на комплексниот број е $\frac{\omega}{\omega^2+4}$. Големината $|G(j\omega)|$, т.е. модулот на комплексниот број, е квадратен корен од збирот од квадратите на реалниот и имагинарниот дел,

$$|G(j\omega)|=\sqrt{\left(\frac{2}{\omega^2+4}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega^2+4}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+4}}$$

Тангенсот од фазата ϕ, т.е. тангенсот од аргументот на комплексниот број, еднакоб на односот помеѓу имагинарниот дел на комплексниот број и неговиот реален дел, т.е.

$$tg\,\phi=\left[\frac{-\omega/(\omega^2+4)}{2/(\omega^2+4)}\right]=-\frac{\omega}{2}$$

односно

$$\phi=arctg\left(-\frac{\omega}{2}\right)$$

Наместо ознаката "$arctg$" понекогаш се користи ознаката "tg^{-1}".

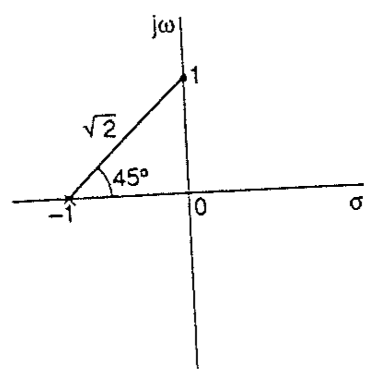
11.6 Фреквентен одзив од пол-нула мапа

Големината и фазата на $G(j\omega)$ можат да се одредат од пол-нула мапата на системот. На пример, нека системот има преносна функција

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Значи системот има пол во $s = -1$ (слика 11.1). Ако влезот во системот е синусоидален, тогаш $s = j\omega$. Со тоа се дефинира точка на $j\omega$ оската одредена со вредноста на аголната фреквенција на влезот ω. На слика 11.1 избрана е вредноста $\omega = 1$. Значи, преносната функција е

$$G(j\omega) = \frac{1}{j1+1} = \frac{1}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)\angle arctg\left(\frac{1}{1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\angle 45^\circ}$$



Слика 11.1. $G(j\omega)$

Во општ случај, ако преносната функција на системот има облик

$$G(s)=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)\ldots\ldots\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\ldots\ldots\ldots(s-p_n)}$$

процедурата е следна:

1 Внеси ги половите и нулите во пол нула мапата;
2 Одреди ја положбата на точката $s=j\omega$ (при што вредноста на ω е дадена преку влезот во системот);
3 Поврзи ги сите полови и нули со точката $s=j\omega$;
4 Одреди ги должините на отсечките што ги поврзуваат половите и нулите со точката $s=j\omega$, и аглите што овие отсечки ги градат со реалната оска;
5 Фреквентниот одзив од системот е дефиниран со

$$|G(j\omega)|=\frac{K\times(\text{производ од должините на отсечките од нулите})}{(\text{производ од должините на отсечките од половите})} \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega)=&(\text{сума од аглите од отсечките од нулите})-\\&(\text{сума од аглите од отсечките од половите})\end{aligned} \tag{10.6}$$

11.7 Фреквентен одзив за елементи во серија

Ако еден систем се состои од неколку сериски поврзани елементи, како на слика 11.2, тогаш преносната функција $G(s)$ на системот е производ од преносните функции на елементите поврзани во серија, т.е.

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)G_3(s).........$$

Функцијата на френкветниот одзив се добива кога се замени $s=j\omega$,

$$G(j\omega)=G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega).........$$

Со оглед дека

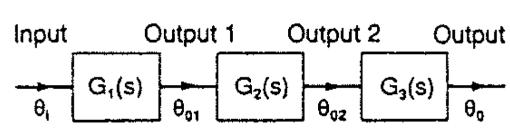
$$G_1(j\omega)=|G_1(j\omega)|\angle\phi_1 \qquad G_2(j\omega)=|G_2(j\omega)|\angle\phi_2 \qquad G_3(j\omega)=|G_3(j\omega)|\angle\phi_3$$

може да се напише

$$|G(j\omega)|=|G_1(j\omega)|\,|G_2(j\omega)|\,|G_3(j\omega)|......... \qquad (10.7)$$

и

$$\phi=\phi_1+\phi_2+\phi_3.......... \qquad (10.8)$$



Бодеовите дијаграми се всушност два дијаграми, еден за големината нацртана во однос на фреквенцијата, и еден за фазниот агол нацртан во однос на фреквенцијата . Големината и фазата се цртаат со користење на логаритамска поделба.

За систем со преносна функција што вклучува повеќе членови, равенката (10.7) индицира дека резултантната големина е производ од големините на конститутивните елементи, т.е.

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)|\,|G_2(j\omega)|\,|G_3(j\omega)|.........$$

Ако оваа равенка се логаритмира со основа 10, се добива

$$\lg|G(j\omega)| = \lg|G_1(j\omega)| + \lg|G_2(j\omega)| + \lg|G_3(j\omega)|......... \qquad (10.9)$$

Од равенка (10.9) може да се заклучи дека цртањето на дијаграмот на $\lg|G(j\omega)|$ во однос на фреквенцијата всушност значи собирање на поединечните големини на членовите во преносната функција. На пример, ако треба да се одреди Бодеовиот цртеж за

$$G(j\omega) = \frac{5(1+j\omega)}{2+j\omega}$$

тогаш можат да се нацртаат одвоено дијаграмите за елементот 5, елементот $(1+j\omega)$ и елементот $1/(2+j\omega)$, и потоа да се соберат.

Вообичаено големината се изразува во децибели (dB):

$$\text{Големина во } dB = 20\lg\left|G(j\omega)\right|$$

Значи ако $\left|G(j\omega)\right| = 2,$ тогаш, со оглед дека $20\lg 2 = 20$, големината е 20 dB.

Равенката (10.8) индицира дека резултантниот фазен агол е сума од фазните агли на поедините елементи нацртани одвоено. Скалата на фреквенции при цртањето на големината и фазата е логаритамска со цел да се опфати поширок опсег на фреквенции и да се добијат прави линии во Бодеовите дијаграми.

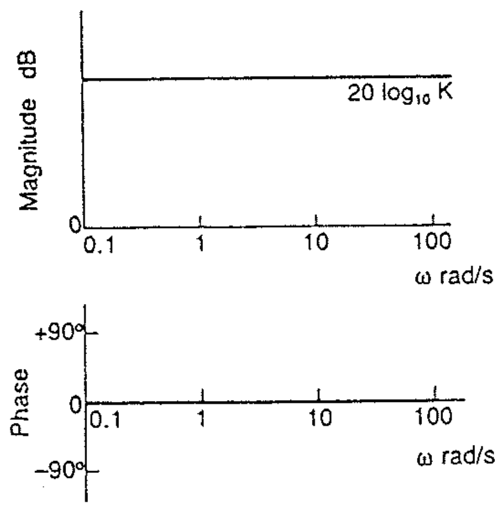
Со оглед дека Бодеови дијаграми за еден систем можат да се добијат преку собирање на Бодеовите дијаграми на поединечните елементи што го сочинуваат системот, корисно е да се разгледаат Бодеовите дијаграми на елементи што вообичаено се среќаваат во управувачките системи. Основните елементи се следни.

- Константно засилување $G(s) = K$:

Големината во децибели е

$$|G(j\omega)| = 20\lg K$$

и фазата е нула за сите фреквенции (слика 11.3).



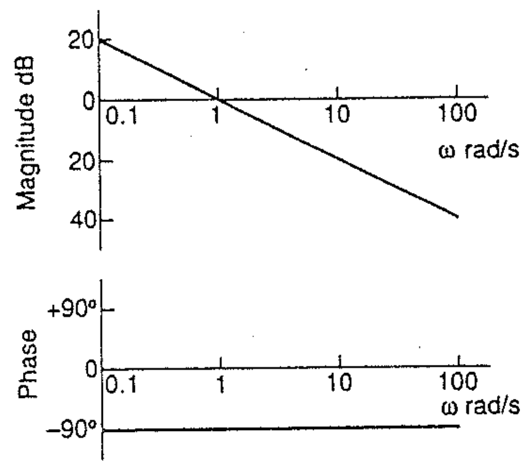
Слика 11.3. Бодеови дијаграми за константно засилување

- Пол во координатниот почеток $G(s)=\frac{1}{s}$:

Големината во децибели е

$$\left|G(j\omega)\right| = -20\lg\omega$$

и фазата е константна и еднаква на -90° за сите фреквенции (слика 11.4):



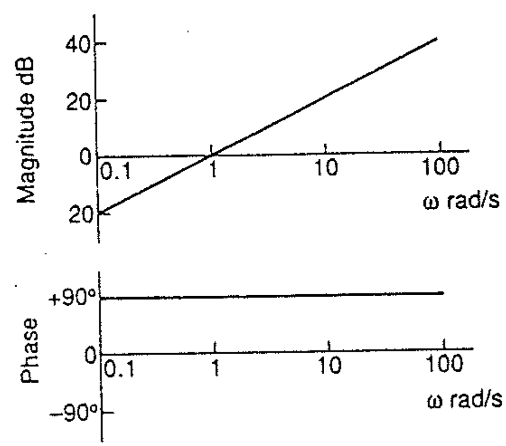
Слика 11.4. Бодеови дијаграми за пол во координатниот почеток

- Нула во координатниот почеток $G(s)=s$:

Големината во децибели е

$$|G(j\omega)|=20\lg\omega$$

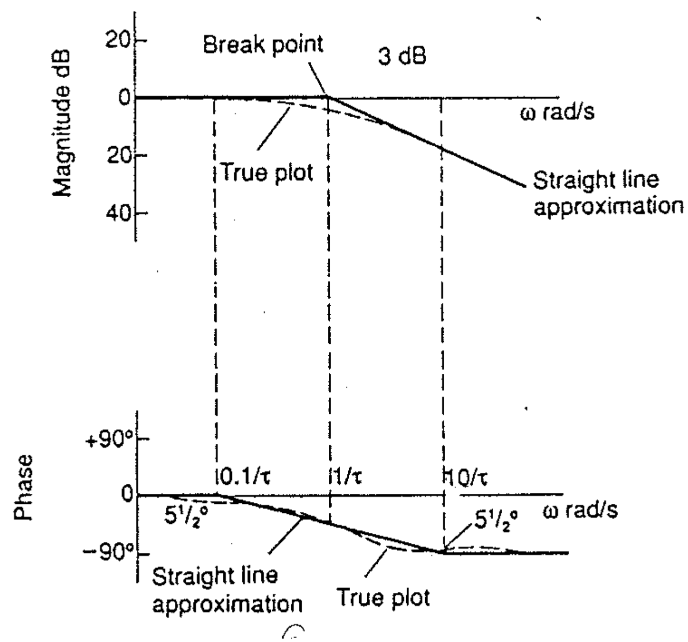
и фазата е константна и еднаква на 90° за сите фреквенции (слика 11.5):



Слика 11.5. Бодеови дијаграми за нула во координатниот почеток

- Реален пол $G(s)=\dfrac{\omega}{s+\omega}$:

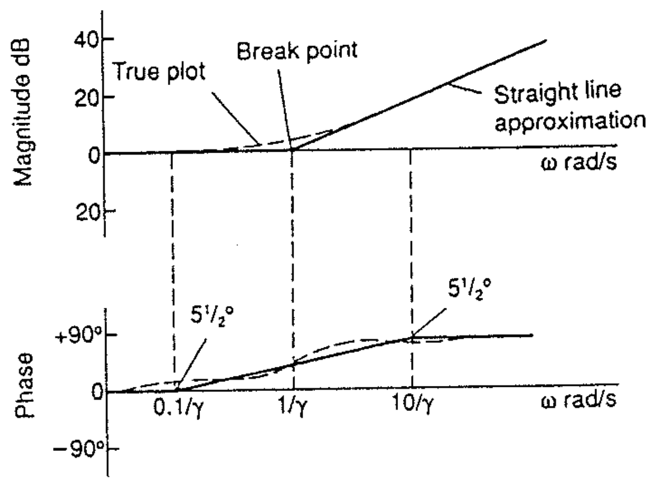
Големината во децибели е нула се до фреквенцијата ω и потоа опаѓа по 20 dB по секоја декада. Фазата е нула се до вредноста 0.2ω, потоа опаѓа до вредност -90° за фреквенција 5ω, и за фреквенции над 5ω фазата е -90° (слика 11.6):



Слика 11.6. Бодеови дијаграми за реален пол

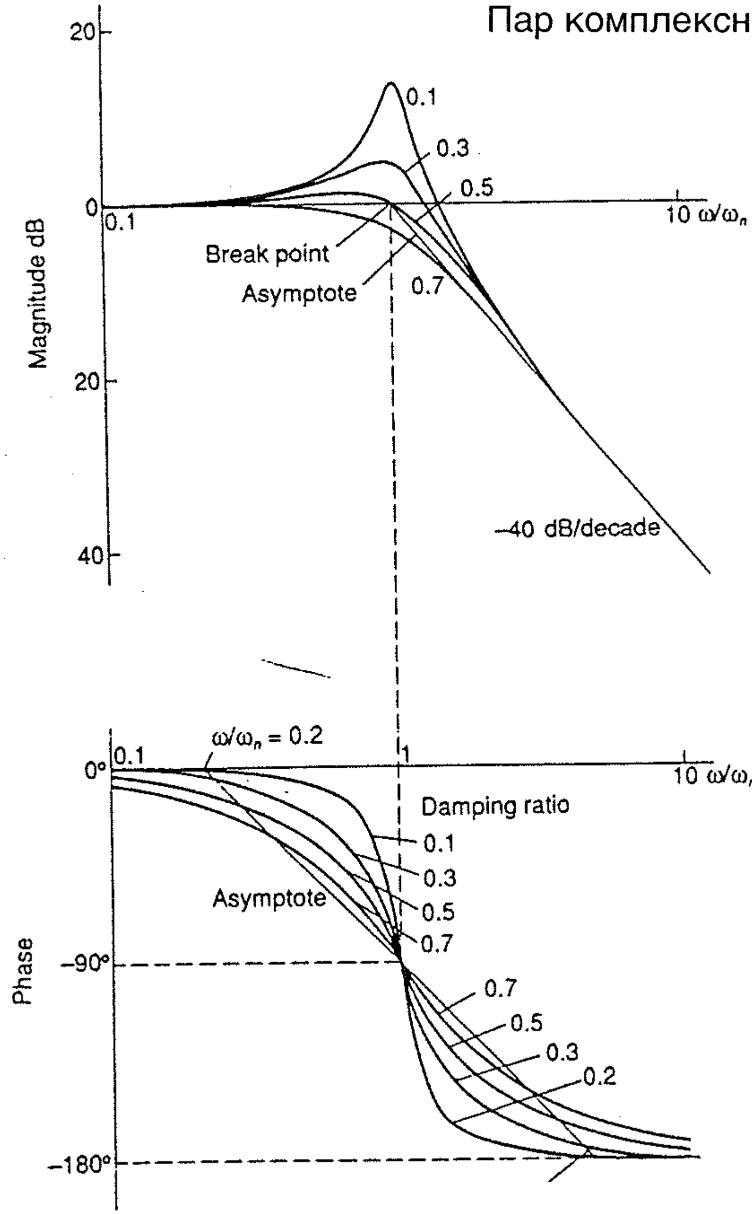
- Реална нула $G(s)=\dfrac{(s+\omega)}{\omega}$:

Големината во децибели е нула се до фреквенцијата ω и потоа расте по 20 dB по секоја декада. Фазата е нула се до вредноста 0.2ω, потоа расте до вредност $+90^\circ$ за фреквенција 5ω, и за фреквенции над 5ω фазата е $+90^\circ$ (слика 11.7):



Слика 11.7. Бодеови дијаграми за реална нула

Пар комплексни полови $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$:



Пар комплексни нули $G(s)=\dfrac{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{\omega_n^2}$:

11.9 Спецификација на перформанси

Резонантниот врв M_p е дефиниран како максимална вредност на големината $|G(j\omega)|$ (слика 11.9). Фреквенцијата ω_p при која настанува резонантниот врв е наречена резонантна фреквенција. Поголема вредност на резонантниот врв M_p одговара на поголема вредност на максималниот прескок на системот, односно на помала вредност на коефициентот на пригушување на системот (види слика 11.8).

Фреквентниот опсег е дефиниран како опсегот на фреквенции помеѓу кои големината не паѓа под -3 dB. За системот чии Бодеови дијаграми се дадени на слика 11.9, фреквентниот опсег е помеѓу фреквенцијата 0 и фреквенцијата за која големината опаѓа под -3 dB. Со оглед дека

$$20\lg G(j\omega) = -3 \qquad (10.10)$$

значи $G(j\omega) = 0.707$, т.е. тоа е вредност на функцијата на фреквентниот одзив што е гранична за определување на фреквентниот опсег.

11.11 Критично засилување и критична фаза

Критичното засилување е еднакво на факторот со кој засилувањето на системот, т.е. модулот, може да се зголеми пред да се појави нестабилност во системот. Значи, согласно со Никвистовиот критериум за стабилност, критичното засилување е износот за кој модулот (големината) што одговара на фазен агол од 180° може да се зголеми до постигнување на критичната вредност 1 (слика 11.15).

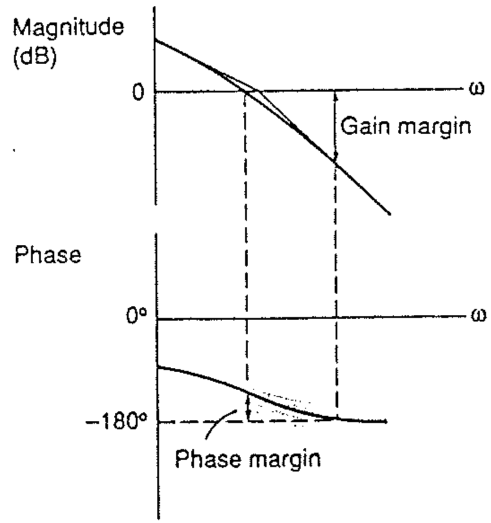
$$1 = \text{критично засилување} \ \times \ \left|G(j\omega)\right|\Big|_{\phi=180^\circ} \qquad (11.20)$$

Вообичаено е критичното засилување да се изразува во децибели на следниот начин

$$\text{Критично засилување} = 20\,\mathbf{lg}\,1 - 20\,\mathbf{lg}\,\left|G(j\omega)\right|\Big|_{\phi=180^\circ}$$

$$\text{Критично засилување} = -\left|G(j\omega)\right|\Big|_{\phi=180^\circ} \qquad (11.21)$$

На сликата 11.17 прикажани се критичното засилување и критичната фаза за систем дефиниран преку Бодеови дијаграми.



Слика 11.17. Критично засилување и критична фаза од Бодеови дијаграми

Одреди го стационарниот одзив од систем со преносна функција

$$G(s) = \frac{4}{s+1}$$

Θ_i=2sin(3t+ 60^o)

$$G(s) = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+2}$$

Θ_i=10sin2t

Нацртај ги асимптотските Бодеови дијаграми за системите што ги имаат следните преносни функции

$$G(s) = \frac{2{,}5}{s(s^2+3s+25)}$$