МЕХАНИКА НА ФЛУИДИ

IV семестар, 8 ECTS

Проф. д-р Зоран Марков

3. Кинематика на флуидите

Се проучуваат:

- **Геометријата**
- **Брзината**
- **Забрзувањето**

Не се проучуваат силите под чие дејство се изведува движењето!!

3. Кинематика на флуидите

3.1 Струјно поле, стационарно и нестационарно движење

- Движењето на флуидните честици се нарекува СТРУЕЊЕ
- При движењето, флуидите можат да го менуваат својот облик и волумен
- Во одреден момент секоја флуидна честица поседува одредена брзина

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)}$$

3. Кинематика на флуидите

3.1 Струјно поле, стационарно и нестационарно движење

- Струјно поле претставува просторот кај кој во секоја точка брзината е вектор определена функција од вектор положбата.
- Стационарно струење – кога брзината во некоја точка *M* не ја менува својата големина и не зависи од времето

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

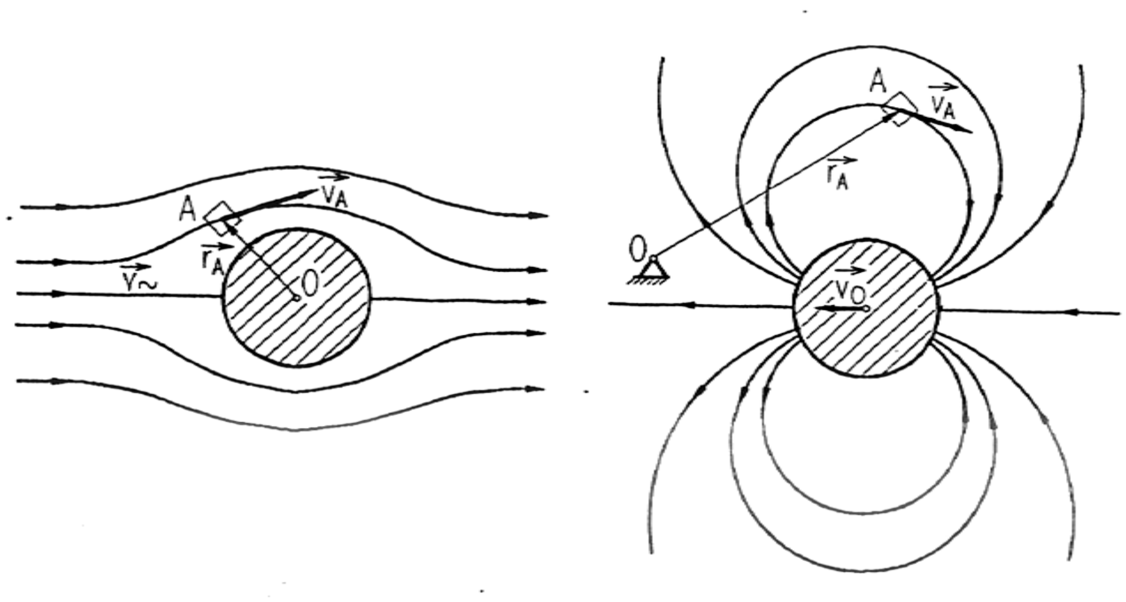
- Нестационарно струење – промена на брзината во некоја точка *M* во зависност од времето *t*

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$$

3. Кинематика на флуидите

3.1 Струјно поле, стационарно и нестационарно струење

- дали некое струење е стационарно или нестационарно зависи од изборот на координатниот систем



3. Кинематика на флуидите

3.2. Два начини на проучување на струењето

- Инерцијалните, волуменските и површинските сили може да се определат на два начина
- **Лагранжовиот пристап** – методот на динамиката на материјална точка кај круто тело, да се искористи и за решавање на проблемите при движење на флуидните честици.

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r_L}, t)$$

- Овој метод во механика на флуидите наоѓа примена само при некои фундаментални лабораториски испитувања

3. Кинематика на флуидите

3.2. Два начини на проучување на струењето

- **Ојлеровиот метод –** која и да било хидраулична големина (брзина, забрзување, притисок, густина и сл.) се однесува на определена точка , дефинирана со вектор положба $\vec{r}$ во определен момент ***t***

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, t)$$

3. Кинематика на флуидите

3.3 Тродимензионално, дводимензионално и еднодимензионално струење

- **Тродимензионално струење** – промена на хидрауличните големини во флуидниот простор од точка во точка, во зависност од сите три координати и од времето.

$$\vec{f} = \vec{f}(x, y, z, t) \qquad \vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

- **Дводимензионално струење**

- Струјната слика е иста во сите меѓусебно паралелни рамнини

$$\vec{f} = \vec{f}(x, y, t)$$

- Струјните слики се исти во сите рамнини што поминуваат низ една права линија (оска на симетрија)

$$\vec{f} = \vec{f}(r, z, t)$$

3. Кинематика на флуидите

3.3 Тродимензионално, дводимензионално и еднодимензионално струење

- **Еднодимензионално струење –** ако се знае промената на хидромеханичките големини долж некоја крива линија и ако по должина на таа линија положбата на точките е определена со патот *s*, ова струење би се определило со функцијата

$$\vec{f} = \vec{f}(s, t)$$

- Најчеста примена наоѓа при определување на струењето во цевки и канали

3. Кинематика на флуидите

3.4. Брзина. Траекторија

- Брзината е вектор кој зависи од вектор положбата во струјниот простор и од времето t

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \qquad \vec{v} = v_y\vec{i} + v_x\vec{j} + v_z\vec{k}$$

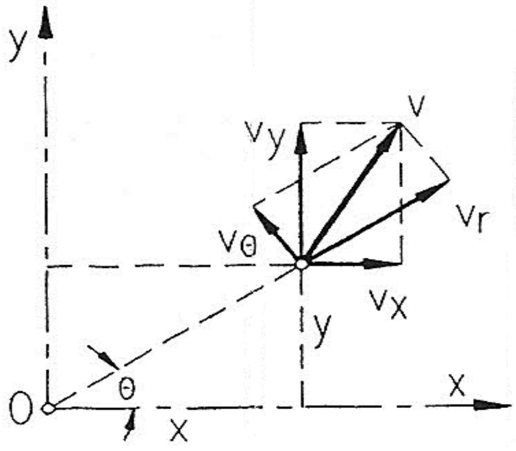
- Определени задачи може да се решат во декартов *(x,y,z)*, цилиндричен *(ρ,θ,z)* или поларен (ρ,θ,φ) координатен систем
- Интензитетот:

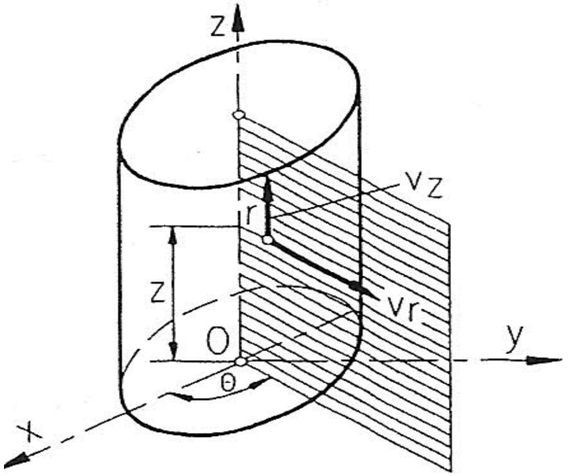
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

3. Кинематика на флуидите

3.4. Брзина. Траекторија

- При рамнинско струење, брзината има v_x и v_y во Декартов координатен систем или v_r и v_θ во поларен координатен систем, чија врска е изразена со релациите $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$





$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta \qquad v_\theta = v_y\cos\theta - v_x\sin\theta$$

$$v_x = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta \qquad v_y = v_\theta\cos\theta + v_r\sin\theta$$

3. Кинематика на флуидите

3.4. Брзина. Траекторија

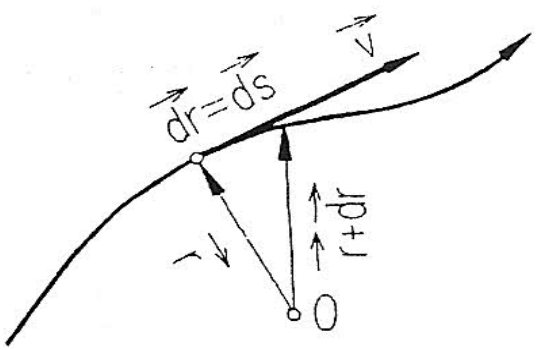
Ако елементарната флуидна честица измине пат

$$\vec{ds} = \vec{dr} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

Тогаш брзината ќе биде еднаква на:

$$\vec{v} = \frac{\vec{dr}}{dt} = \frac{\vec{ds}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Оваа равенка може да се употреби при определување на тректоријата на флуидната честица при што

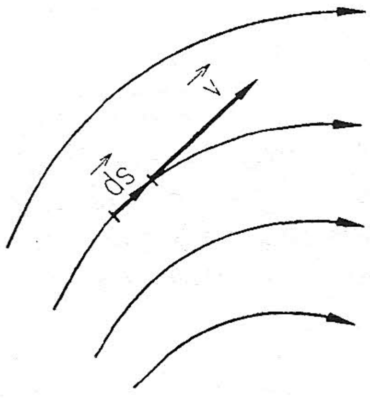


$$\vec{ds} = \vec{v}\,dt$$

3. Кинематика на флуидите

3.5 Струјници. Струјни токови

- Струјница или струјна линија е линија кај која во секоја точка правецот на брзината се совпаѓа со правецот на тангентата повлечена во таа точка.
- При стационарно струење на секоја точка и одговара брзина која не се менува во текот на времето;
- При нестационарно струење е можно во два различни моменти низ една точка во просторот да поминат две струјни линии



$$\vec{v} = \lambda \, \vec{ds}$$

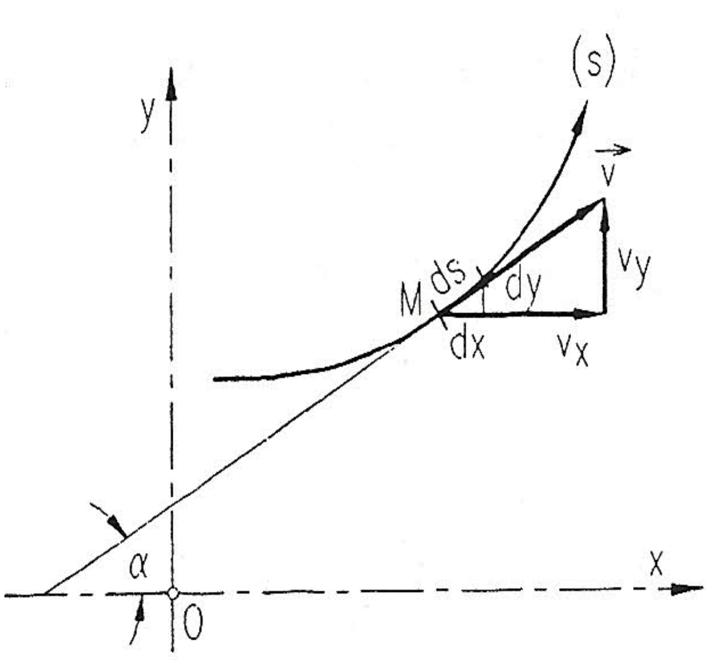
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{1}{\lambda}$$

Со решавање на овие диференцијални равенки се добиваат р-ките на струјните линии

3. Кинематика на флуидите

3.5 Струјници. Струјни токови

- Кај рамнинско струење во рамнината x0y, претставена на сликата се добива :



$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = tg\,\alpha$$

Каде α е агол каде што тангенсот на струјната линија го заклопува со позитивната страна на x-оската . Ако ни се познати v_x и v_y ,со решавање на оваа диференциална равенка може да се определи равенката на струјната линија y = y (x)

3. Кинематика на флуидите

3.5 Струјници. Струјни токови

- Често пати, кај дводимензионалните струења се воведува функција на струењето ψ(x,y), каде следат релациите:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$v_x\, dy - v_y\, dx = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0$$

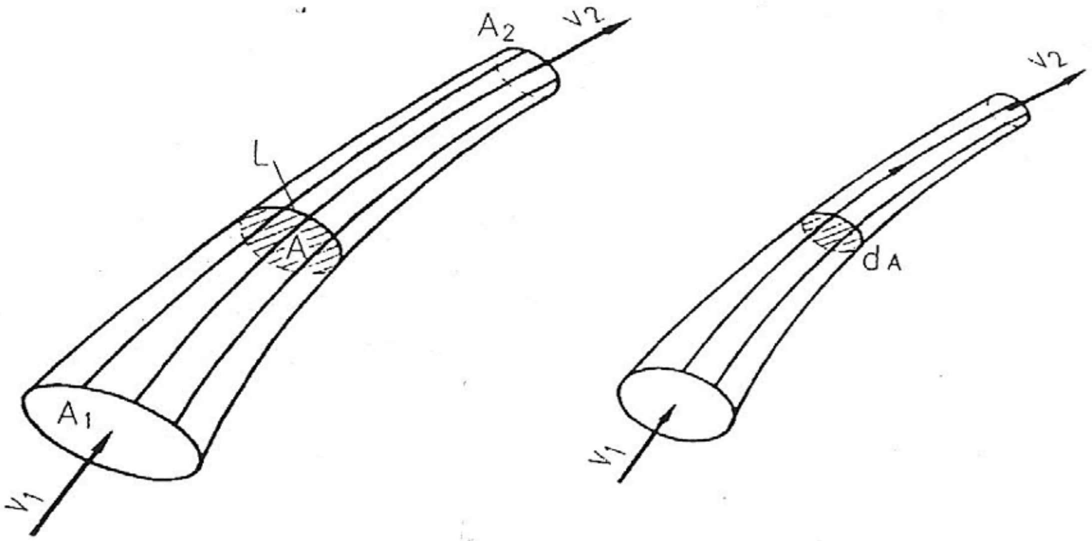
$$\psi(x, y) = \mathrm{C} = \mathrm{konst}$$

За различни вреднсти на интеграционата константа C се добиваат равенки за различни струјници.

3. Кинематика на флуидите

3.5 Струјници. Струјни токови

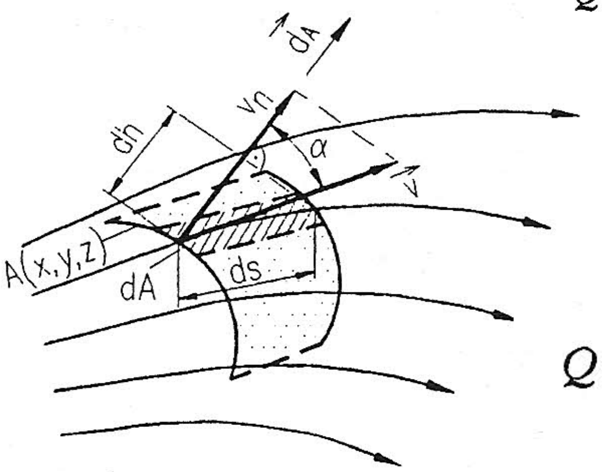
- Ако низ сите точки на една крива затворена линија L, која во просторот ограничува површина A, се повлечат сите можни струјни линии ќе се формира **струен ток.**
- Ако пресекот на струјниот ток е бесконечно мал (dA) тогаш се нарекува струјно влакно или елементаренс труен ток.



3. Кинематика на флуидите

3.6 Проток. Флукс и циркулација

- Количеството флуид кое во единица време протекува низ некоја површина во просторот се нарекува **ПРОТОК!!!**



$$Q = \int_A dQ = \int_A (\vec{v}, d\vec{A})$$

Протокот се добива ако површината се помножи со компонентата на брзината во правец на нормалата од соодветната површина

$$Q = \int_A v\, dA$$

Пресметка на протокот кога брзината е нормална по целата површина α = 90˚

$$Q = v \int_A dA = v A$$

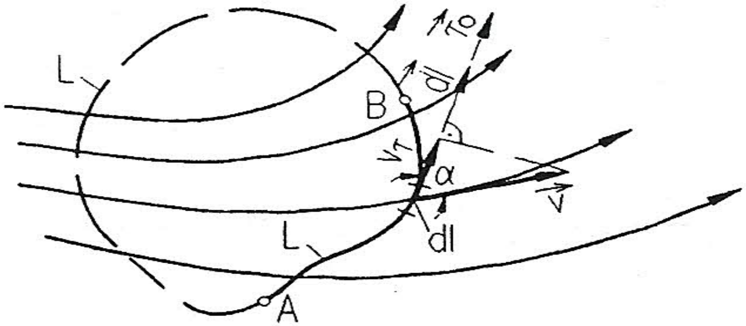
Пресметка на протокот кога брзината е константна по целата површина A

3. Кинематика на флуидите

3.6 Проток. Флукс и циркулација

- Во некој струен простор се воочува една крива линија L која сврзува две точки A и B,
- **флуксот на брзината се дефинира како:**

$$\Phi = \int_A^B (\vec{v}, \vec{dl})$$



- Доколку се интегрира по цела затворена кривата линија, тогаш, затворениот криволиниски интеграл се вика **циркулација на брзината.**

$$\Gamma = \oint_L (\vec{v}, \vec{dl})$$

3. Кинематика на флуидите

3.7 Движење и деформација на флуидната честица

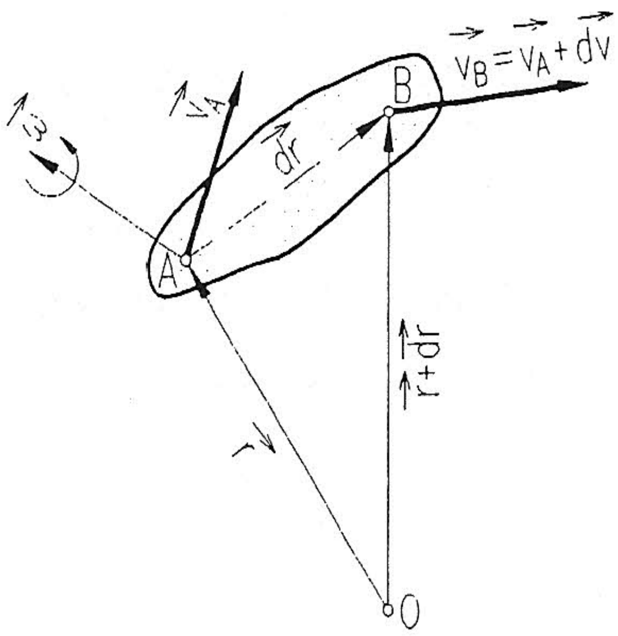
- **При движење на флуидната честица можни се следните промени:**

• Честицата може да се пренесува транслаторно
• Честицата може да се врти околу некоја моментна оска на ротација
• Флуидната честица во текот на движењето може да го промени својот облик
• Кај компресибилен флуид, флуидната честица при движење може да го промени својот волумен

3. Кинематика на флуидите

3.7 Движење и деформација на флуидната честица

При првите две промени, брзината ќе може да се определи доколку се знае брзината на друга точка и аголната брзина со која ротира честицата



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{dv} \qquad \vec{dv} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{dv} = dv_x\vec{i} + dv_y\vec{j} + dv_z\vec{k}}$$

Промена v_x компонентата:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz$$

3. Кинематика на флуидите

3.7 Движење и деформација на флуидната честица

- Аголната брзина која се менува од точка во точка $\vec{\omega} = \vec{\omega}(x, y, z)$
- Релативната брзина (на пример на точката B во однос на точката A) се добива како:

$$d\vec{v} = [\vec{\omega}, d\vec{r}]$$

- Апсолутната брзина на точката B:

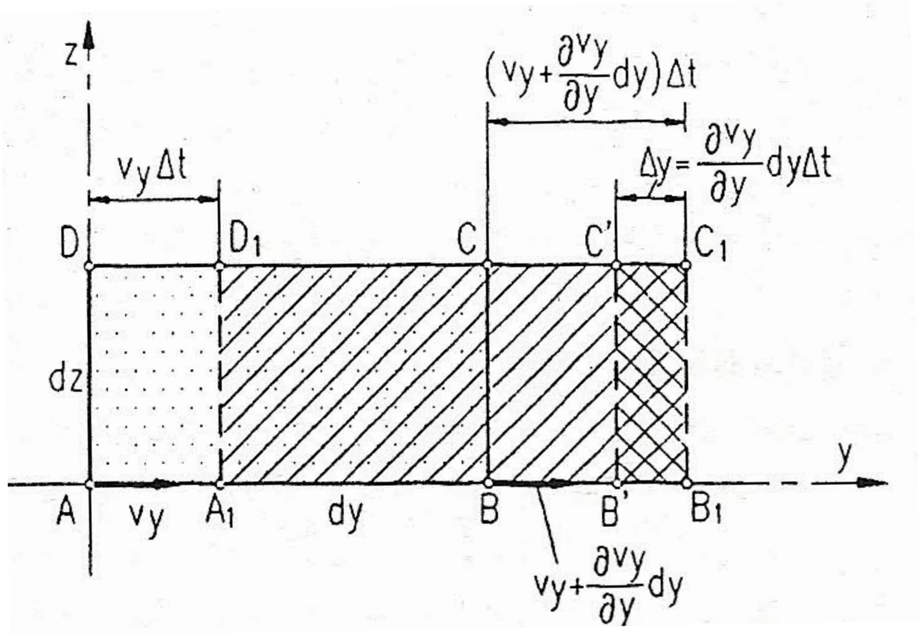
$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, d\vec{r}]}$$

$$d\vec{v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = [\vec{\omega}, d\vec{r}]$$

3. Кинематика на флуидите

3.7 Движење и деформација на флуидната честица

- Кај флуидите релативното движење на една точка во однос на друга (на пример B во однос на A) може да настане и поради промената на обликот и волуменот на флуидната честица



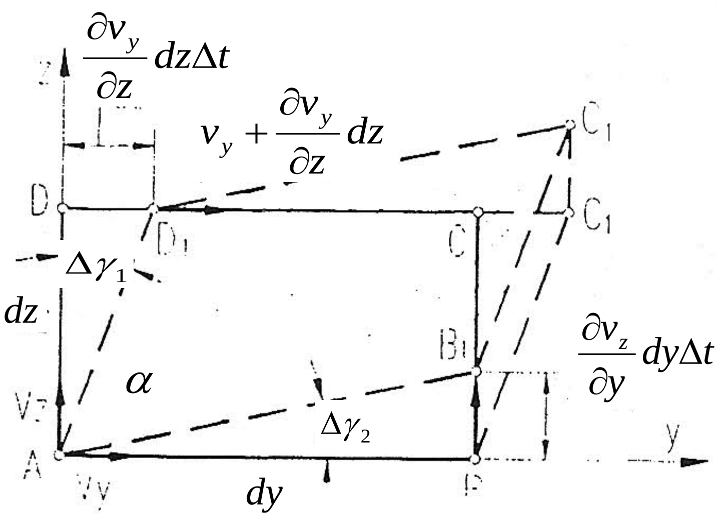
При промена на волуменот, точката B се оддалечува од A, движејќи се со релативна брзина, која уште се нарекува брзина од деформација на волуменот:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial v_y}{\partial y} dy}$$

3. Кинематика на флуидите

3.7 Движење и деформација на флуидната честица

- Промена на релативната брзина, при поромена на обликот на флуидната честица



Поради лесната деформабилност на флуидната честица, точката D и B ќе се поместат во однос на A за два различни агли, со аголни брзини:

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{\Delta\gamma_1}{\Delta t} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \qquad \dot{\gamma}_2 = \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

Ако збирот на аглите $\Delta\gamma_1$ и $\Delta\gamma_2$ е различен од нула α≠90˚, тогаш како последица настанала деформација на обликот.
Ротација на флуидната честичка околу точката A (x-оската) со аголна брзина:

$$\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

3. Кинематика на флуидите

3.7 Движење и деформација на флуидната честица

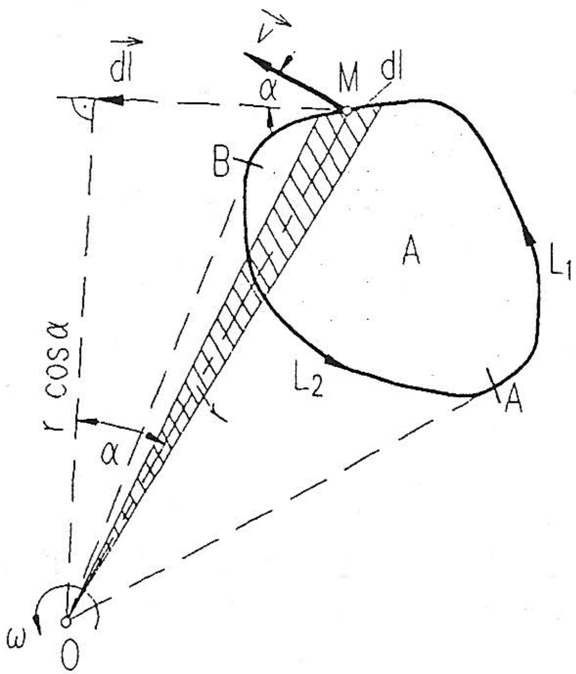
- Брзина на закосување на страните (половина од аголната брзина околу точката А)
- **Брзина на деформација на обликот (*С во однос на А*)**
- Во случај на компресибилен флуид се јавува дополнителна релативна брзина од деформација која е збир од брзината на деформација на волуменот и обликот

$$\vec{w} = \vec{w}_v + \vec{w}_f$$

3. Кинематика на флуидите

3.8 Врска помеѓу аголната брзина и циркулацијата

- Аголната брзина се однесува на елементарна флуидна честица, и е функција од времето и положбата на честицата $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{r}, t)$



- Брзината на било која точка M од кривата линија е v=r·ω, чиј правец лежи нормално на OM и зафаќа агол α

$$(\vec{v}, \vec{dl}) = v\,dl\cos\alpha = \omega r\,dl\cos\alpha \qquad 2\,dA = r\,dl\cos\alpha$$

Циркулација Γ по затворена линија L:

$$\Gamma = \oint_L (\vec{v}, \vec{dl}) = \int_{A(L_1)}^{B} (\vec{v}, \vec{dl}) - \int_{A(L_2)}^{B} (\vec{v}, \vec{dl}) = 2\omega \left(\int_{A(L_1)}^{B} dA - \int_{A(L_2)}^{B} dA \right)$$

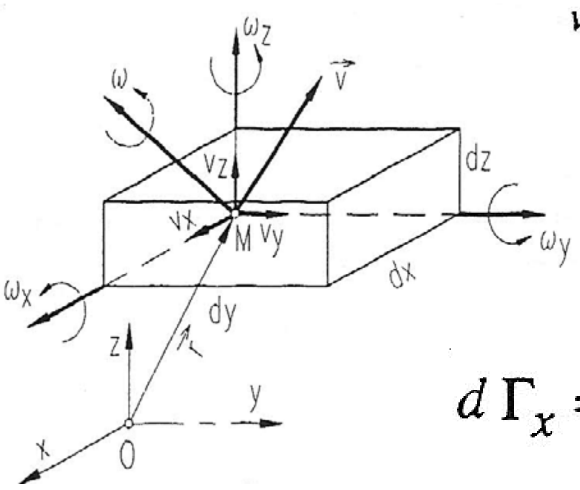
Циркулација Γ по затворена линија L, каде ограничува елементарна површина dA:

$$\boxed{d\Gamma = 2\,\omega\,dA}$$

3. Кинематика на флуидите

3.9 Вртеж. Ротор на брзина

- Врската помеѓу брзината *v* и аголната брзина *ω* на една флуидна честица, ќе се определи претставувајќи ја честицата како правоаголен паралелопипед. За точката М следи:



$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \qquad \vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

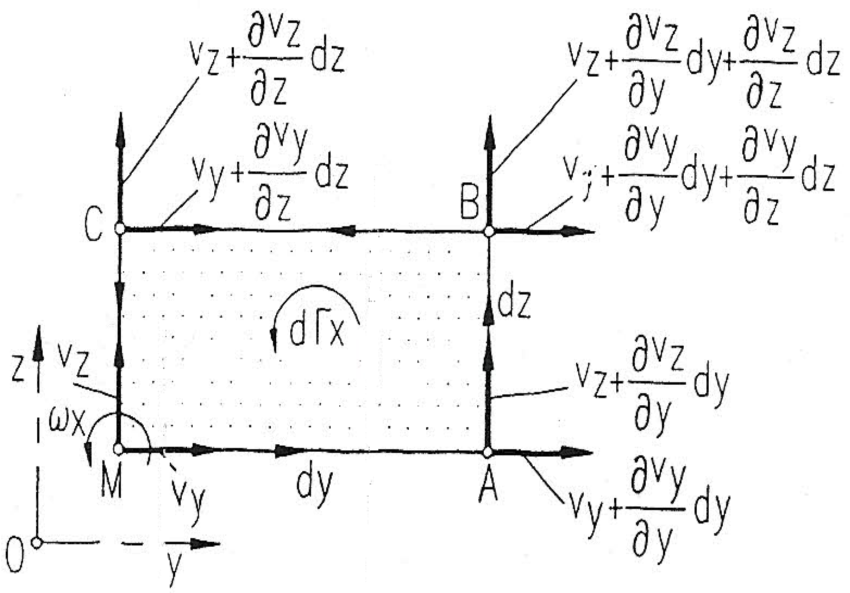
Кога елементарната честица ќе се проектира во *y0z* рамнината, се добива циркулацијата:

$$d\,\Gamma_x = 2\,(\vec{\omega}_x, d\vec{A}_x) = 2\,\omega_x\, dA_x \cos 0^o = 2\,\omega_x\, dA_x$$

3. Кинематика на флуидите

3.9 Вртеж. Ротор на брзина

- Циркулацијата по затворената линија MABC ќе биде:



$$d\,\Gamma_x = 2\,(\vec{\omega}_x, d\vec{A}_x) = 2\,\omega_x\, dA_x \cos 0^o = 2\,\omega_x\, dA_x$$

$$\boxed{d\,\Gamma_x = \oint_{MABC} (\vec{v},\ d\vec{l}\,)}$$

3. Кинематика на флуидите

3.9 Вртеж. Ротор на брзина

- Брзината проектирана и во останатите три точки ќе биде:
- Во точка A: $v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy$ и $v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy$
- Во точка B: $v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz$ и $v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz$
- Во точка C: $v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz$ и $v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz$

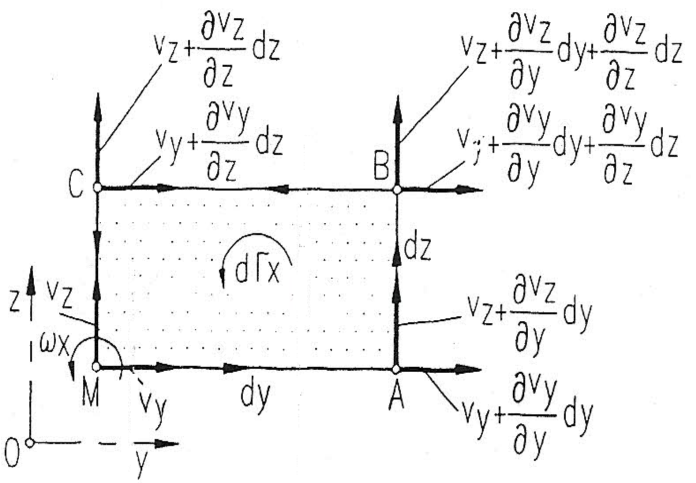
3. Кинематика на флуидите

3.9 Вртеж. Ротор на брзина

- Изразена преку средните брзини, циркулацијата по затворена крива линија MABC ќе биде:

$$d\,\Gamma_x = \oint(\vec{v}\,,\,\vec{dl}\,) = \bar{v}_{MA_y}\,\overline{MA}\,\cos\,0^o + \bar{v}_{AB_z}\,\overline{AB}\,\cos\,0^o\,.$$

$$+\,\bar{v}_{BC_y}\,\overline{BC}\cos\pi\,+\bar{v}_{CM_z}\,\overline{CM}\cos\pi$$



- По средувањето:

$$d\,\Gamma_x = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dz\,dy = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dA_x$$

$$d\,\Gamma_x = 2\,(\vec{\omega}_x, \vec{dA}_x) = 2\,\omega_x\,dA_x\cos 0^o = 2\,\omega_x\,dA_x$$

3. Кинематика на флуидите

3.9 Вртеж. Ротор на брзина

- Зависноста помеѓу компонентата на аголната брзина ω_x и промената на брзината (аналогно и за другите компоненти):

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

- Од $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ и после средување, се добива детерминанта, која според теоријата претставува ротор на брзината:

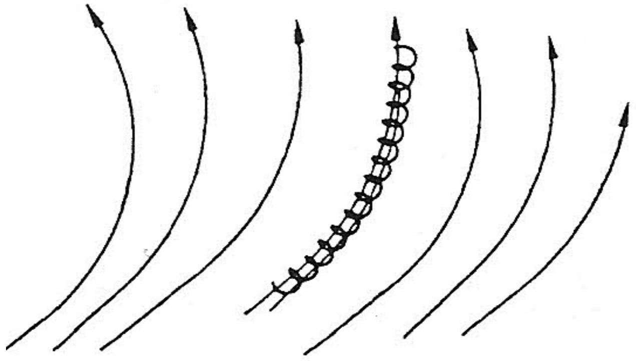
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

3. Кинематика на флуидите

3.9 Вртеж. Ротор на брзина

- Зависноста на векторот на аголната брзина од промената на брзината:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}$$



- Во механика на флуидите
  е познат и под поимот вртлог (вртеж)

- За роторот на брзината, кој претставува двојна вредност на вртежот, се добива:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$$

3. Кинематика на флуидите

3.10 Брзина на деформација

- Брзината од деформацијата $\vec{w} = d\vec{v} - [\vec{\omega}, d\vec{r}]$ може да се изрази и преку промената на брзината.
- Нејзините компоненти во правец на оските: $\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$
- Доколку сите членови се проектираат на x-оската:

$$(d\vec{v}, \vec{i}) = dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$([\vec{\omega}, d\vec{r}], \vec{i}) = (\omega_y dz - \omega_z dy) = \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ dy & dz \end{vmatrix}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{w_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) d_z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) dy}$$

$$\vec{w} = \vec{w}_v + \vec{w}_f$$

3. Кинематика на флуидите

3.10 Брзина на деформација

- Аналогно за другите компоненти на брзината од деформација

$$w_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx$$

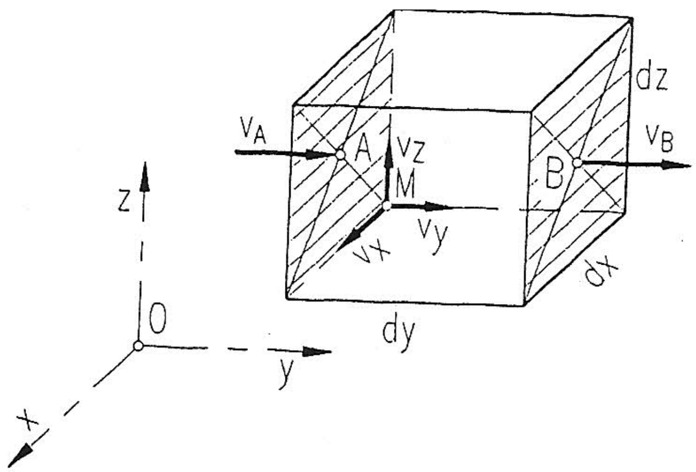
$$w_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dy$$

- Првите членови од р-ките е брзина од деформација на волумен, а другите два на обликот.

3. Кинематика на флуидите

3.11 Равенка на континуитет

- Равенката на континуитетот, всушност го изразува законот за одржување на материјата
- Со определување на средните брзини што владеат во тежиштата на страните од некој дефиниран простор (пр. призма), ќе може да се определи целокупното количество на флуид што влегува или излегува во единица време



• во правец на Y – оската:

$$v_A = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{dx}{2} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{dz}{2}$$

$$v_B = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{dx}{2} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\frac{dz}{2}$$

3. Кинематика на флуидите

3.11 Равенка на континуитет

- При некомпресибилен флуид:

- Во единица време ќе истекува вишок волуменски проток:

$$\delta Q_y = (v_B - v_A)\,dx\,dz \quad \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right]$$

т.е

$$\delta Q_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \frac{\partial v_y}{\partial y}\,dV$$

- На сличен начин би се определиле x и z-оската:

$$\delta Q_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dV \qquad \delta Q_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}\,dV$$

- Вкупното количество флуид што истекува:

$$\delta Q = \delta Q_x + \delta Q_y + \delta Q_z$$

т.е

$$\delta Q = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dV$$

- Континуитетот ќе биде обезбеден ако:

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \qquad \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0}$$

3. Кинематика на флуидите

3.11 Равенка на континуитет

- При анализа на компресибилен флуид, треба да се смета со протокот на маса, бидејќи доаѓа и до промена на густината ρ.
- Во правец на x-оската, вишокот на маса што ќе истекува во единица време:

$$\delta Q_{inx} = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV \quad \left| \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right|$$

- Кај компресибилниот флуид, континуитетот ќе биде обезбеден доколку е исполнет условот: $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0}$$

Р-ка на континуитет во диференциален облик за нестационарно струење

3. Кинематика на флуидите

3.12 Извори и понори

- **Струењата кај кои во определени точки или делови од струјниот простор се создава ”вишок” на флуид, се викаат извори**
- **Струења кај кои во определени точки или делови од флуидниот простор може да се губи одредено количество флуид, се викаат вирови или понори**
- **Континуитетот на струењето може да биде обезбеден и кога:**

$$\boxed{\delta Q = dV \, div \, \vec{v} \neq 0}$$

3. Кинематика на флуидите

3.12 Извори и понори

- Кај изворите: $\delta Q = dV \, div \, \vec{v} > 0$
- Кај понорите: $\delta Q = dV \, div \, \vec{v} < 0$

- Специфична производност на изворот односно на понорот:

$$div \, \vec{v} = \frac{\delta Q}{dV} = \frac{d(dV)}{dV \, dt} = \varepsilon = \frac{\delta V}{dV \, dt}$$

3. Кинематика на флуидите

3.13 Забрзување

- Забрзувањето е промена на брзината во текот на времето, векторска е големина и се однесува на секоја флуидна честица:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

- Во ова поглавје ќе бидат претставени:
  - Еднодимензионално струење
  - Тродимензионално струење
  - Рамнинско струење
  - Струење по должина на струјница што ротира

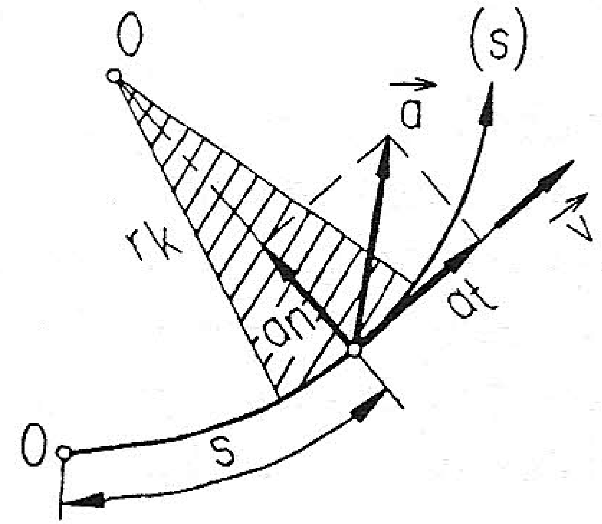
3. Кинематика на флуидите

3.13 Забрзување

- **Еднодимензионално струење**

- Движејќи се по должина на струјницата *s* тоталната брзина на флуидната честица е:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial s} ds$$



- Изминатиот пат е $ds = v\,dt$, забрзувањето при нестационарно струење ќе биде:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}$$

- При стационарно струење: $\partial v / \partial t = 0$

$$\boxed{a = v\frac{dv}{ds}}$$

3. Кинематика на флуидите

3.13 Забрзување

- **Тродимензионално струење**

- При тродимензионално струење брзината е функција од положбата на набљудуваната точка $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(x, y, z, t)$
- Тоталната брзина:

$$d\vec{v} = dv_x \vec{i} + dv_y \vec{j} + dv_z \vec{k}$$

- Соодведно на ова, забрзувањето се пресметува како:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}}$$

3. Кинематика на флуидите

3.13 Забрзување

- Тродимензионално струење

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta{}^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{v_r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

3. Кинематика на флуидите

3.13 Забрзување

- **Рамнинско струење**

- При ова струење $V_z = 0$, секој извод по z ќе биде нула, забрзувањето во рамнината $x0y$ ќе изнесува:

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

- **За стационарно струење:**

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ a_y &= v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{aligned}}$$

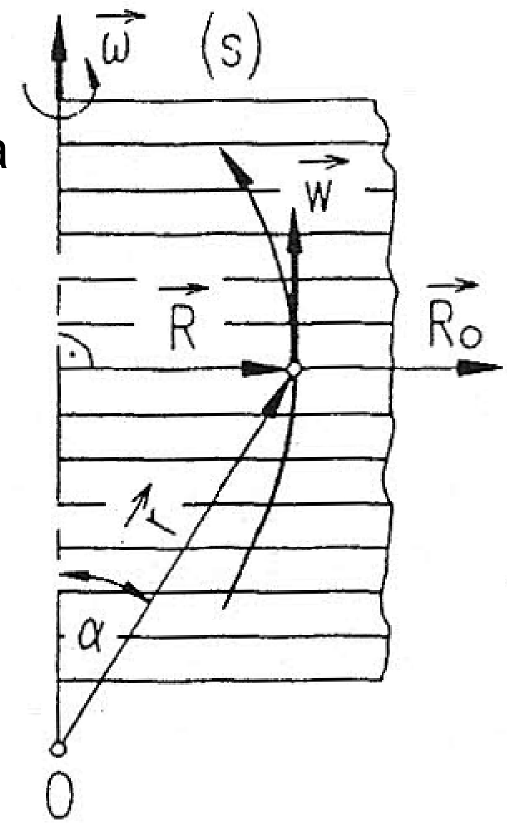
- **Соодветно во други координатни системи!!!**

3. Кинематика на флуидите

3.13 Забрзување

➢ **Струење по должина на струјница што ротира**

Ова струење се појавува најчесто кај турбомашините, како резултат на движењето на флуидните честици по должина на струјницата *s* со релативна брзина *w*, едновремено ротирајќи околу оската на ротација заедно со струјната линија.



$$\boxed{u = R\omega = r\,\omega \sin\alpha}$$

$$\vec{u} = [\vec{\omega}, \vec{r}\,] = R\,\omega\,\vec{u}_o$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}}$$

3. Кинематика на флуидите

3.13 Забрзување

- **Струење по должина на струјница што ротира**

При вакво струење, забрзувањето е последица на **промената на релативната брзина по времето**, појавата на **релативно забрзување**, односно центрипетално забрзување (заради ротацијата) и Кориолисово забрзување (релативното движење при едновремена ротација):

$$\vec{a}_c = -[\vec{\omega}, \vec{u}] = -[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] \qquad \vec{a}_{ko} = 2[\vec{\omega}, \vec{w}]$$

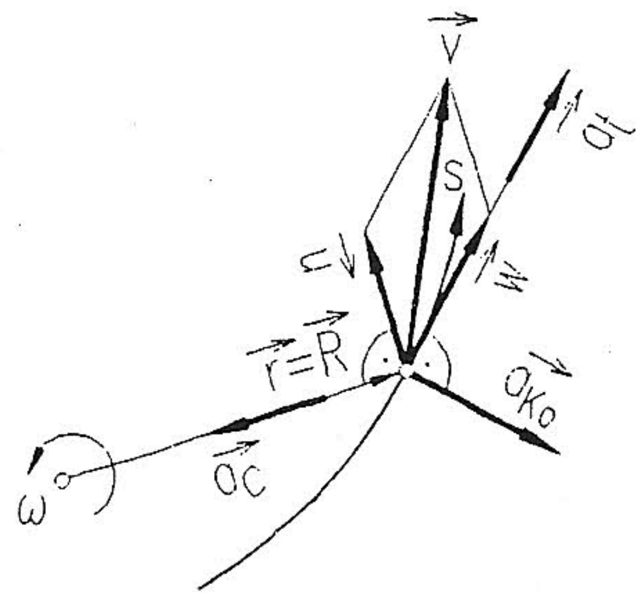
$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{w}}{dt} + \vec{a}_c + \vec{a}_{ko}}$$

3. Кинематика на флуидите

3.13 Забрзување

- **Струење по должина на струјница што ротира**

- Во специјален случај, кога струењето е рамнинско и оската на ротација е нормална на рамнината на струењето, забрзувањето е:



$$\vec{a}_c = -R\omega^2\vec{R}_o = -\omega^2\vec{R} = -\omega^2\vec{r}$$

$$(\vec{a}_{ko}, \vec{\omega}) = (\vec{a}_{ko}, \vec{w}) = (\vec{a}_{ko}, \vec{ds}) = 0$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{w}}{dt} - \omega^2\vec{r} + 2[\vec{\omega}, \vec{w}]}$$

МЕХАНИКА НА ФЛУИДИ
IV семестар, 8 ECTS
Проф. д-р Зоран Марков

4. Динамика на идеален флуид

4.1. Сили што дејствуваат на идеален флуид во движење

На флуидна честица со маса *dm* при струење на идеален флуид дејствуваат:

- **Инерцијални сили (Њутнов закон)**
- **Површински сили: само нормални сили на притисок, нема триење кај идеален флуид**
- **Волуменски сили**

4. Динамика на идеален флуид

4.1. Сили што дејствуваат на идеален флуид во движење

Инерцијални сили:

$$dm = \rho\, dV = \rho\, dx\, dy\, dz$$

$$d\vec{J} = -\,dm\,\vec{a} = -\,dm \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

Сведени на единица маса:

$$\boxed{J = \frac{d\vec{J}}{dm} = -\frac{d\vec{v}}{dt} = -\,\vec{a}}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.1. Сили што дејствуваат на идеален флуид во движење

Површински сили:

$$dP_x = -\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial x}dV$$

$$dP_y = -\frac{\partial p}{\partial y}dV$$

$$dP_z = -\frac{\partial p}{\partial z}dV$$

$$d\vec{P} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)dV \qquad d\vec{P} = -\,grad\,p\,dV = -\frac{dm}{\rho}\,grad\,p$$

Сведена на единица маса:

$$\boxed{\vec{P} = \frac{d\vec{P}}{dm} = \frac{d\vec{P}}{\rho\,dV} = -\frac{1}{\rho}grad\,p}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.1. Сили што дејствуваат на идеален флуид во движење

Волуменски сили (сведени на единица маса):

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

Даламберов принцип за динамичка рамнотежа:

$$-\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{1}{\rho}\,grad\,p + \vec{R} = 0$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} - \frac{1}{\rho}\,grad\,p}$$

Векторски облик на основната равенка за струење на идеален флуид

(Скаларната форма зависи од видот на струењето и изборот на К.С.)

4. Динамика на идеален флуид

4.2. Тродимензионално и рамнинско струење

Скаларен облик:

Волуменски сили кои имаат потенцијал на силата *U(x,y,z)*:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{k} = grad\, U}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.2. Тродимензионално и рамнинско струење

Скаларен облик:

Инерцијални сили:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Компоненти на површински сили:

$$grad\ p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.2. Тродимензионално и рамнинско струење – Ојлерови равенки

Скаларен облик (три скаларни равенки) на основната равенка за струење на идеален флуид во Декартови координати:

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv_y}{dt}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{dv_z}{dt}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Равенка на континуитет во скаларен облик:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0$$

4 парцијални диференцијални равенки – Ојлерови равенки за струење на идеален флуид!!!!

4. Динамика на идеален флуид
4.2. Тродимензионално и рамнинско струење

За баротропен флуид:

$$\rho = \rho(p) \quad , \quad \text{на пример } \frac{p}{\rho^{x}} = \text{konst.}$$

Во тој случај се добиваат 5 равенки со кои се определуваат:

$$v_x = v_x(x, y, z, t) \;, \quad v_y = v_y(x, y, z, t) \;, \quad v_z = v_z(x, y, z, t)$$

$$p = p(x, y, z, t) \;, \quad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

Теоретски решлив систем! Кога и како е можна интеграција?!

За стационарно струење отпаѓаат сите парцијални изводи по времето!!

4. Динамика на идеален флуид

4.2. Тродимензионално и рамнинско струење

Во цилиндрични координати:

$$grad\ U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{r}_o + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{\theta}_o + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$grad\ p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{r}_o + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{\theta}_o + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$$

- **За стационарно и рамнинско струење во *x0y* рамнина:**

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0$$

- **За некомпресибилен флуид (ρ=*const*) се менува само равенката на континуитетот:**

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

4. Динамика на идеален флуид

4.3. Еднодимензионално струење под дејство на гравитација

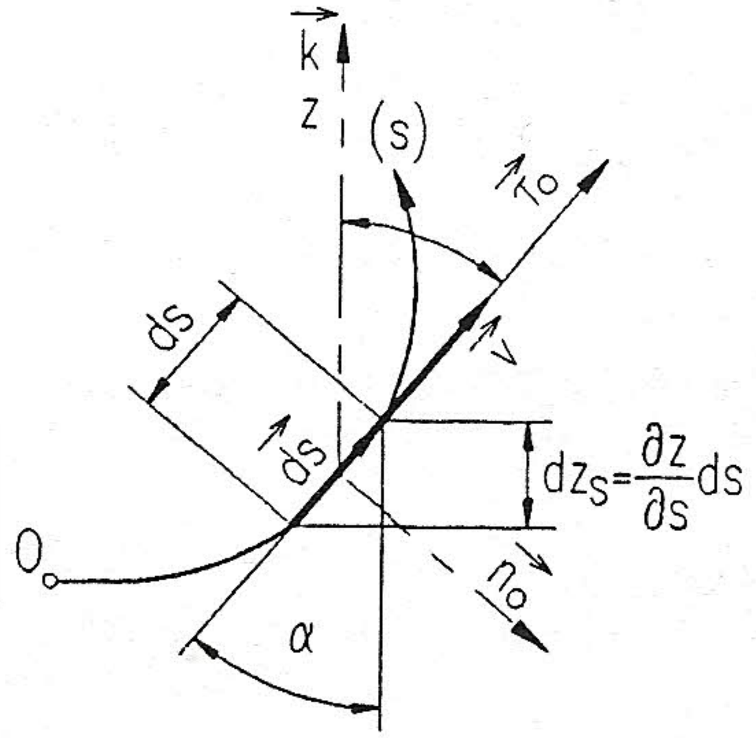
Компонентите на волуменската сила се:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = X = Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = -g = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{dz}, \quad U = -gz + U_o$$

$$\vec{R} = Z\vec{k} = -g\vec{k} = grad\ U$$

Равенката на струење во векторски облик:

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = -g\vec{k} - \frac{1}{\rho} grad\ p = grad\ U - \frac{1}{\rho} grad\ p}$$



4. Динамика на идеален флуид

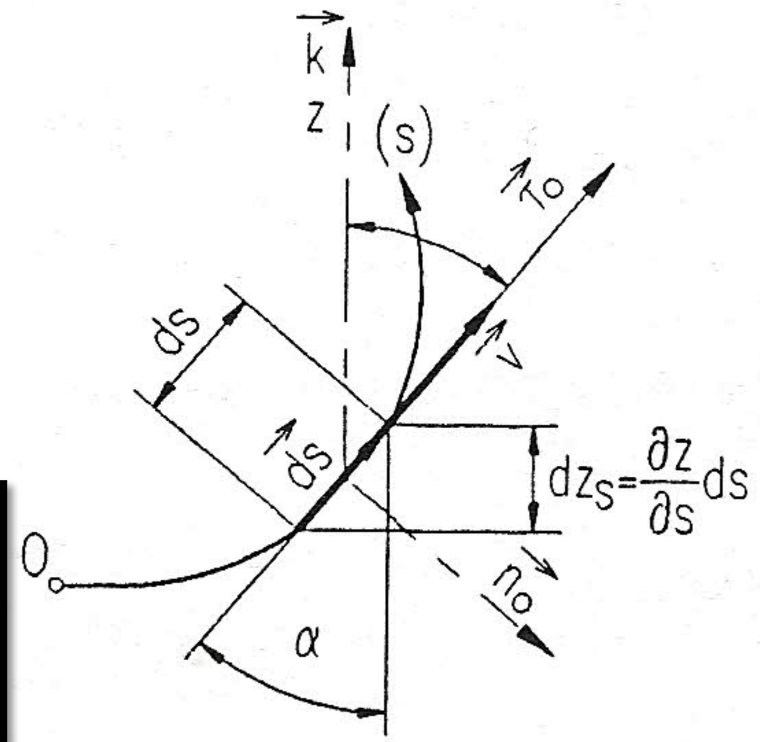
4.3. Бернулиева равенка

Анализа на сили во правец на тангента на струјница и нормално на неа:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{s}\right) = \left(grad\ U, d\vec{s}\right) - \frac{1}{\rho}\left(grad\ p, d\vec{s}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}ds + v\frac{\partial v}{\partial s}ds + g\frac{\partial z}{\partial s}ds + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}ds = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}ds + ds\left(\frac{v^2}{2} + gz + \int\frac{dp}{\rho}\right) = 0$$



Бернулиева равенка за нестационарно струење на идеален компресибилен флуид по должина на струјница:

$$\boxed{\int_0^s \frac{\partial v}{\partial t}ds + \frac{v^2}{2} + gz + \int\frac{dp}{\rho} = konst.}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.3. Бернулиева равенка

$$\int_0^s \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v^2}{2} + gz + \int \frac{dp}{\rho} = konst.$$

За некомпресибилен флуид (ρ=*const*):

$$\int_0^s \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = konst.$$

За стационарно струење:

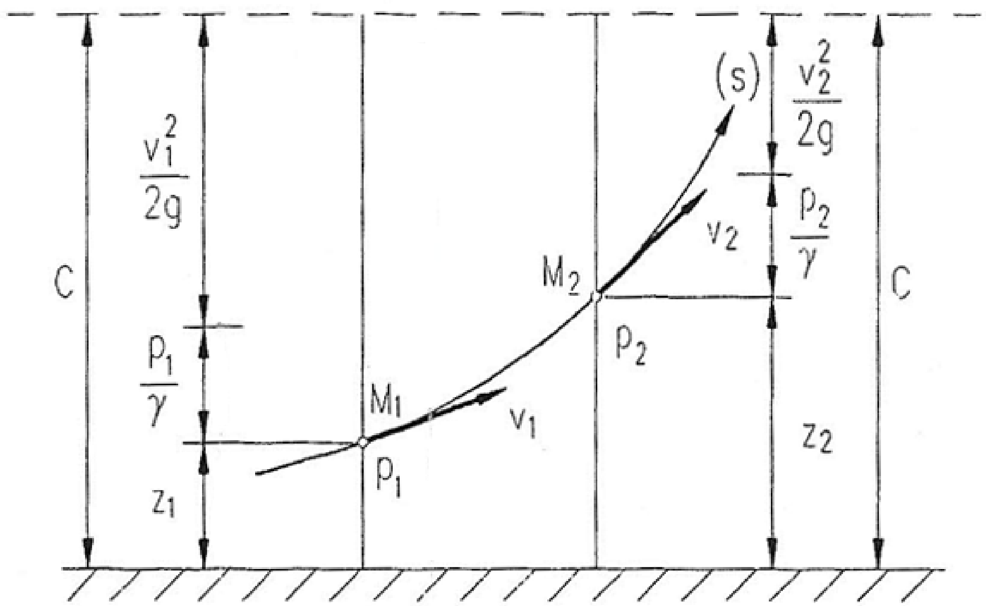
$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = konst.$$

$$\boxed{\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = konst. \quad \text{т.е.} \quad \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = konst.}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.3. Бернулиева равенка

Бернулиева равенка помеѓу две точки на струјницата:



$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = konst. = C$$

4. Динамика на идеален флуид

4.3. Бернулиева равенка

Рамнотежа на силите во правец на нормалата:

$$-\frac{v^2}{r_k}dn+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}dn+g\frac{\partial z}{\partial n}dn=0$$

За струјниците со $r_k=\infty$ (права линија), за некомпресибилен флуид се добива:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}dn+g\frac{\partial z}{\partial n}dn=0\,,\quad d_n\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)=0\,,\quad \text{т.е.}\quad p+\gamma z=konst.$$

За струење во хоризонтална рамнина:

$$dz_n=\frac{\partial z}{\partial n}dn=0$$

А прирастот на притисокот по нормалата: $dp_n=\rho\frac{v^2}{r_k}dn\,,\quad \frac{dp_n}{dn}=\rho\frac{v^2}{r_k}$

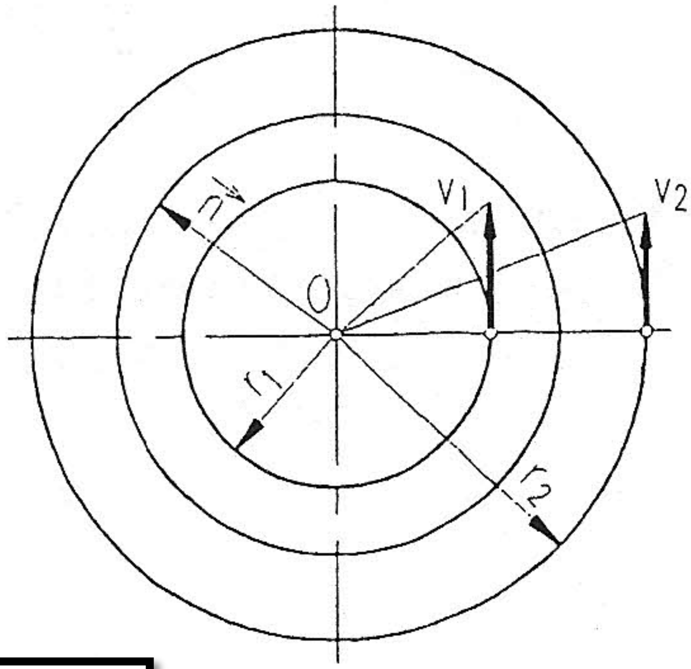
4. Динамика на идеален флуид

4.3. Бернулиева равенка

Во случај на струење на некомпресибилен флуид по концентрични кругови:

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$-\frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + g\frac{\partial z}{\partial r} = 0$$



Од Бернулиевата равенка:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + v\frac{\partial v}{\partial r} + g\frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

$$v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v^2}{r}, \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dr}{r}$$

После интегрирање:

$$\boxed{v\,r = konst.}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.4. Струење по должина на струјница што ротира

Тоталното забрзување изнесува:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{w}}{dt} - \omega^2\vec{r} + 2\,[\vec{\omega}\,,\ \vec{w}]$$

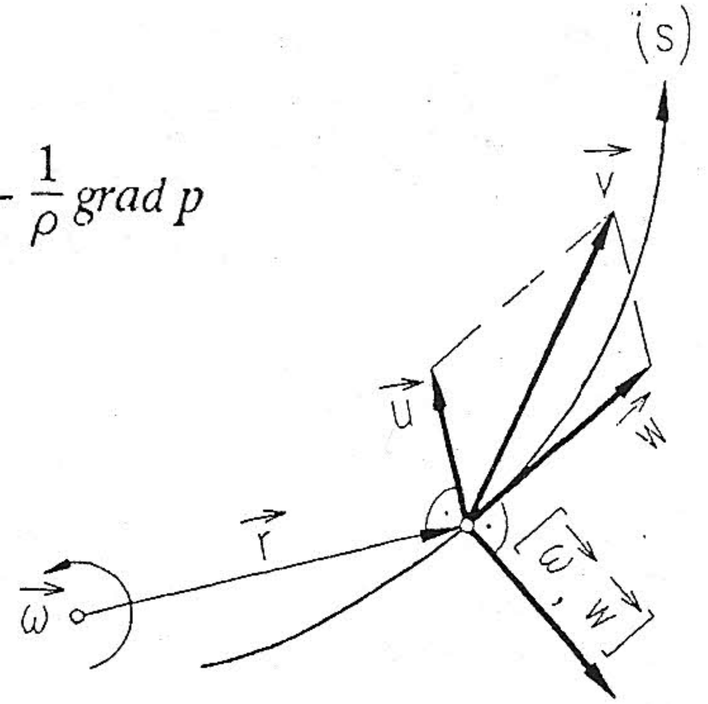
Општата векторска равенка на струењето:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} - \omega^2\vec{r} + 2\,[\vec{\omega}\,,\vec{w}] = \vec{R} - \frac{1}{\rho}\,grad\,p$$

После замени и интегрирање –

Бернулиева равенка:

$$\boxed{\frac{w^2}{2} - U + \int\frac{dp}{\rho} - \frac{u^2}{2} = C = konst.}$$



4. Динамика на идеален флуид

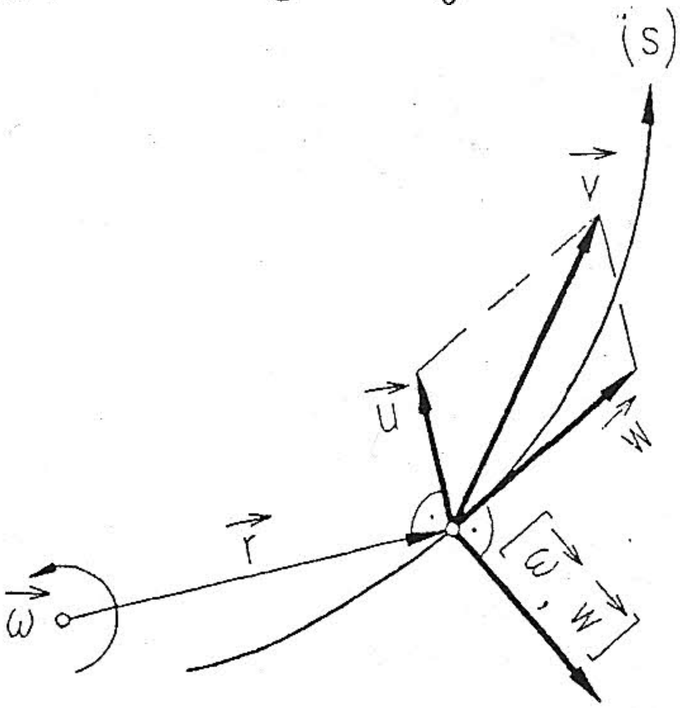
4.4. Струење по должина на струјница што ротира

За струење под дејство на Земјина тежа:

$$X = Y = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dU}{dz} = -g, \quad U = -gz + U_0$$

$$\boxed{\frac{w^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + gz - \frac{u^2}{2} = C}$$

(Бернулиева равенка на компресибилен флуид за струјница што ротира со константна аголна брзина)



$$\boxed{\frac{p}{g\rho} + z + \frac{w^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} = C}$$

(за некомпресибилен)

4. Динамика на идеален флуид

4.5. Вртежно и потенцијално струење

Ојлеровите равенки за струење на идеален флуид не може да се интегрираат во општ случај!!!

Бернулиевата равенка претставува решение на овие равенки во специјален случај!

Можни упростувања за решавање на Ојлеровите равенки:

- **Стационарно струење (**$\partial\rho / \partial t = 0$ **и** $\partial\vec{v} / \partial t = 0$ **)**
- **Безвртежни струења – потенцијални струења:**

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0\,, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$$

4. Динамика на идеален флуид

4.6. Потенцијал на брзината

Услов што дефинира потенцијално струење:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0 = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

Се сведува на 3 скаларни равенки:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0$$

Од каде се добиваат равенките кои дефинираат едно потенцијално струење:

$$\boxed{\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.6. Потенцијал на брзината

Се заклучува дека кај потенцијалните струења мора да постои некоја скаларна функција *φ = φ (x, y, z, t)* која се определува од следните услови:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x \;, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y \;, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = v_x\, dx + v_y\, dy + v_z\, dz$$

Со диференцирање се добива:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \;, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}}$$

(услов за потенцијално струење)

4. Динамика на идеален флуид

4.6. Потенцијал на брзината

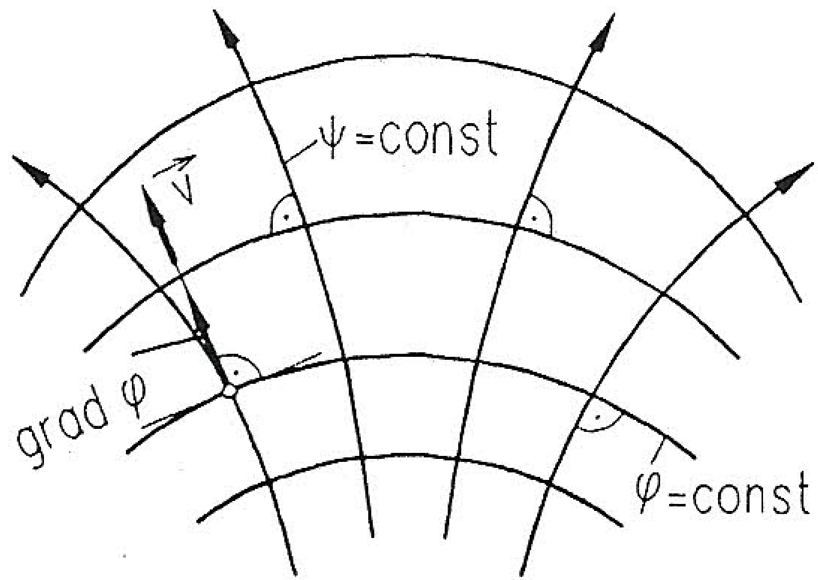
Скаларната функција ***φ* = *φ* (*x, y, z, t*)** се нарекува **функција на потенцијалот на брзината (потенцијал на брзината)!!**

Проблемот на проучувањето на потенцијалните струења се сведува на проучување само на оваа функција – преку неа се определуваат и компонентите на брзината!

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\operatorname{grad}\varphi = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{v}$$



Површините *φ* = *φ* (*x, y, z, t*)=*const.* се еквипотенцијални површини!

4. Динамика на идеален флуид
4.7. Диференцијални равенки за потенцијално струење

Првата Ојлерова равенка за идеален флуид:

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$\pm\left(v_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{dt} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$\boxed{X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial x} - 2\omega_z v_y + 2\omega_y v_z}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.7. Диференцијални равенки за потенцијално струење

За потенцијално струење:

$$\vec{\omega} = 0, \text{ т.е. } \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

За Ојлеровите равенки се добива:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial y} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.7. Диференцијални равенки за потенцијално струење

За струење под дејство на конзервативни сили:

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \mathrm{grad}\, U$$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

И со воведување на функција на генерализиран притисок *P=P(x,y,z)*:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \quad \text{т.е.} \quad P = \int \frac{dp}{\rho}$$

4. Динамика на идеален флуид
4.7. Коши-Лагранжова равенка

Се добива следниот систем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U\right) = 0$$

$$\boxed{\int \frac{dp}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U = F(t)}$$

Коши-Лагранжова равенка

(решение на Ојлеровите диф. равенки за потенц. струење на компресибилен флуид под дејство на конзервативни сили)

4. Динамика на идеален флуид

4.7. Бернулиева равенка

При стационарно струење, Коши-Лагранжовата равенка преминува во Бернулиева равенка:

$$\boxed{\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U = konst.}$$

Оваа форма на Бернулиевата равенка (добиена со интергрирање на Ојлеровите диф. равенки) важи за целиот струен простор (не како претходно, само за една струјница)!!

4. Динамика на идеален флуид

4.8. Флукс и циркулација кај потенцијалното струење

Флукс по должина на крива линија *AB*:

$$\Phi = \int_A^B (\vec{v}, d\vec{l}) = \int_A^B (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$\Phi = \int_A^B (v_x dx + v_y dy + v_z dz)$$

При потенцијално струење постои потенцијал на брзината φ:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$

4. Динамика на идеален флуид

4.8. Флукс и циркулација кај потенцијалното струење

Со оглед на тоа дека важи:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

Флуксот изнесува:

$$\Phi = \int_A^B \left(d\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt\right)$$

$$\Phi = (\varphi_B - \varphi_A) - \int_A^B \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt$$

При стационарно струење ($\partial\varphi / \partial t = 0$)

$$\boxed{\Phi = \varphi_B - \varphi_A}$$

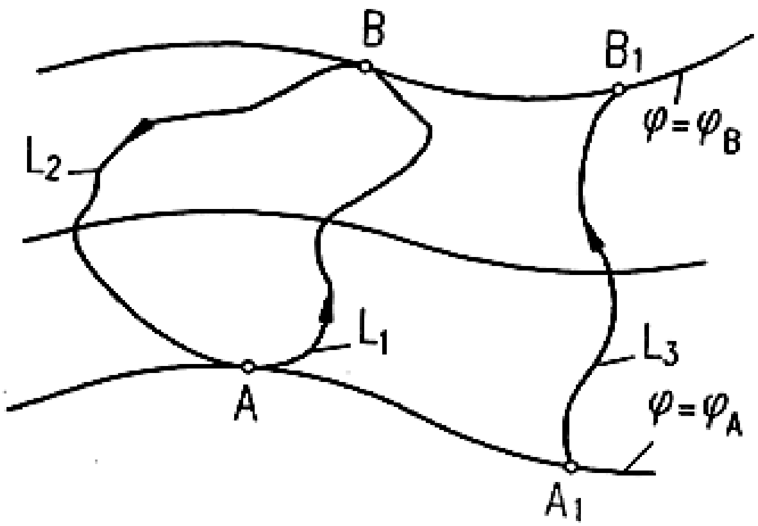
4. Динамика на идеален флуид

4.8. Флукс и циркулација кај потенцијалното струење

Флуксот на брзината

$$\Phi = \varphi_B - \varphi_A$$

по должината на било која крива линија е еднаков на разликата на потенцијалот на брзината во крајните точки (не зависи од обликот на линија):



$$\Phi = \varphi_B - \varphi_A = \varphi_{B_1} - \varphi_{A_1}$$

Циркулација кај стационарно потенцијално струење:

$$\Gamma = \oint_A^{B \to A} (\vec{v}, d\vec{l}) = \varphi \Big|_A^{B \to A} = \varphi_{B \to A} - \varphi_A = 0$$

4. Динамика на идеален флуид

4.9. Струење на некомпресибилен флуид

Равенка на континуитет кај некомпресибилен флуид:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0}$$

Преку φ :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \Delta\varphi = 0$$

(Лапласова диференцијална равенка)

Коши-Ланграножовата равенка:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] = U - \frac{p}{\rho}$$

(упростување во однос на Ојлерови равенки – се определуваат две скаларни големини: потенцијал на брзината φ и притисок p)

4. Динамика на идеален флуид

4.9. Струење на некомпресибилен флуид

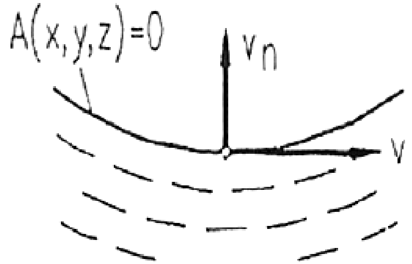
Почетни и гранични услови на функцијата на потенцијалот на брзината:

- **При струење на изолиран флуид – на неговите гранични површини притисокот во секоја точка мора да е $p = 0$**
- **Ако флуидот е во контакт со атмосферата, притисокот на слободната (граничната) површина е атмосферски $p = p_{at}$**
- **Во некои случаи однапред е определена функцијата на притисокот на граничната површина $p = p_0 = p_0(x, y, z, t)$**

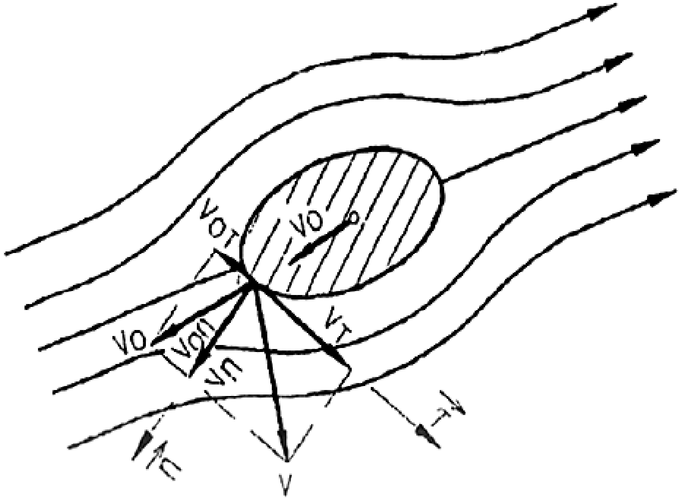
4. Динамика на идеален флуид

4.9. Струење на некомпресибилен флуид

Почетни и гранични услови на функцијата на потенцијалот на брзината:



- **При струење на изолиран флуид – на неговите гранични површини компонентата на брзината во правец на нормалата на слободната површина е еднаква на нула**
- **Кога флуидот е во допир со круто тело кое се движи со брзина v_0, нормалната компонента v_n на флуидната честица која е во допир со телото, секогаш мора да е еднаква на брзината на материјалната точка од крутото тело со која е во допир $v_{0n} = v_n$**

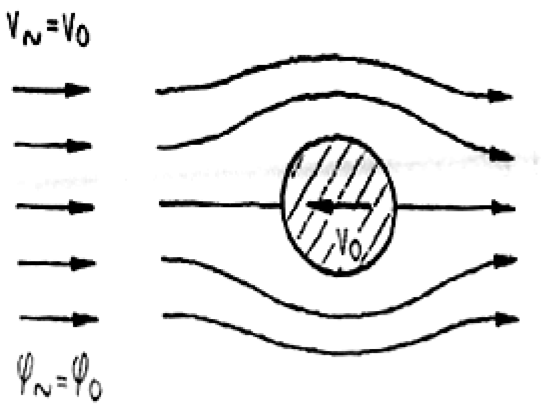


4. Динамика на идеален флуид

4.9. Струење на некомпресибилен флуид

Почетни и гранични услови на функцијата на потенцијалот на брзината:

- **Тангенцијалните и резултантните брзини се еднакви помеѓу себе само при струење на вискозен флуид (флуидната честица се лепи за цврстото тело)**
- **На бесконечна оддалеченост не се чувствува телото што се движи во флуидниот простор, т.е. брзината и потенцијалот на брзината се еднакви на тие на телото, но со спротивна насока**



4. Динамика на идеален флуид

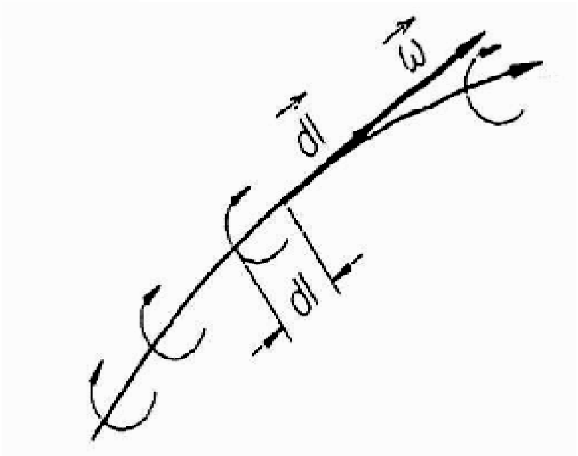
4.10. Вртежно струење

Елементарните честици при струењето се вртат околу својата моментна оска со аголна брзина, еднаква на вртежот.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(x, y, z, t) = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \neq 0 \qquad \vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\, \vec{v} \neq 0$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(x, y, z, t) = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \neq 0$$

$$\vec{\omega} = \lambda \vec{dl} \qquad \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} = \frac{1}{\lambda}$$



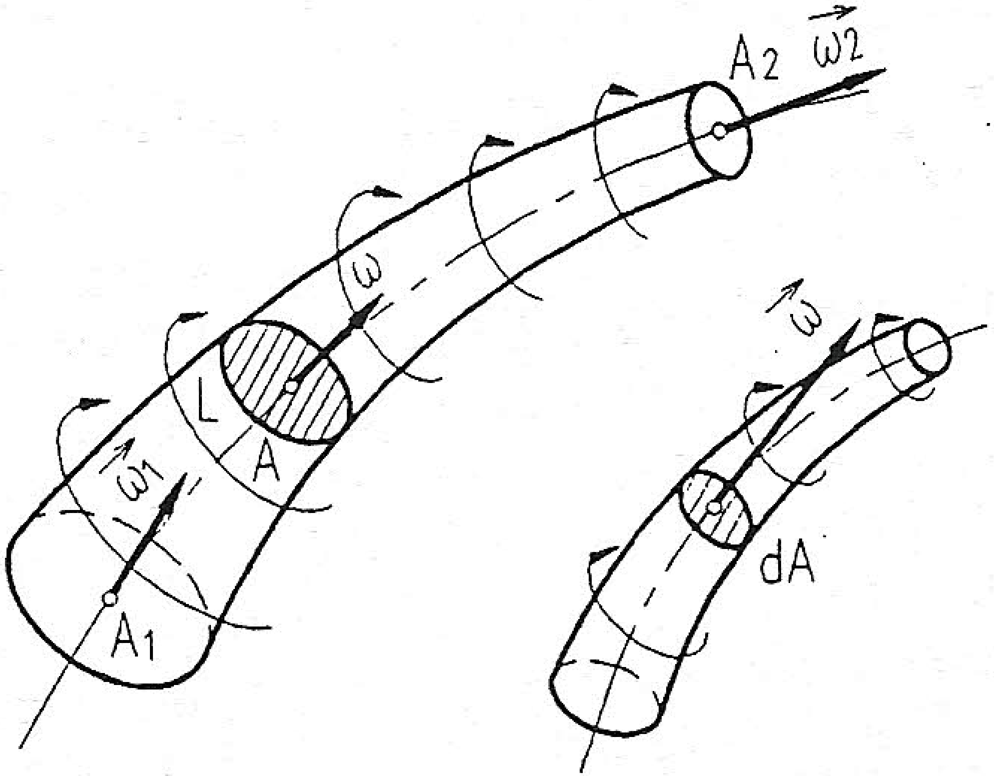
$\vec{\omega}$ - вектор на вртежот

$\vec{dl}$ - елементарен насочен лак на вртежната линија

4. Динамика на идеален флуид

4.10. Вртежно струење

Вртежните линии што поминуваат низ сите точки на една затворена линија L формираат вртежна цевка со напречен пресек A



4. Динамика на идеален флуид

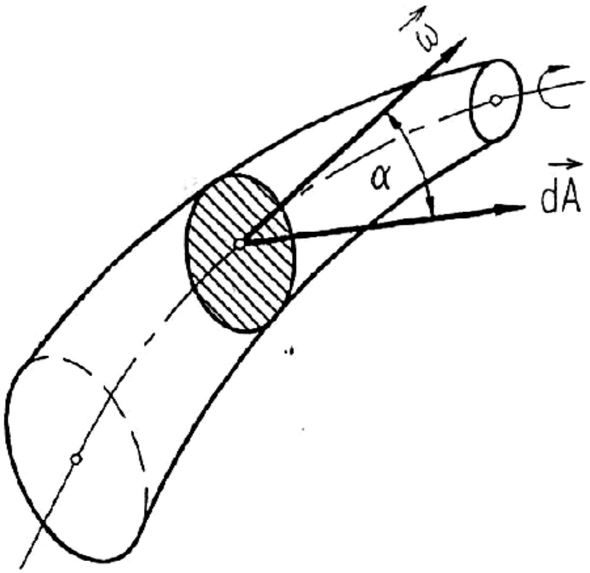
4.10. Вртежно струење

Јачина на вртежот (при бесконечно мал пресек *dA*) – аналогна на протокот кај потенцијалното струење:

$$\varepsilon = 2\omega A\,,\ \varepsilon_1 = 2\omega_1 A_1\,,\ \varepsilon_2 = 2\omega_2 A_2 \qquad \varepsilon = 2\,(\vec{\omega}\,,\ \vec{A}\,)$$

Теореми:

- **Стоксова теорема**
- **Томсонова теорема**
- **Хемхолцови теореми**



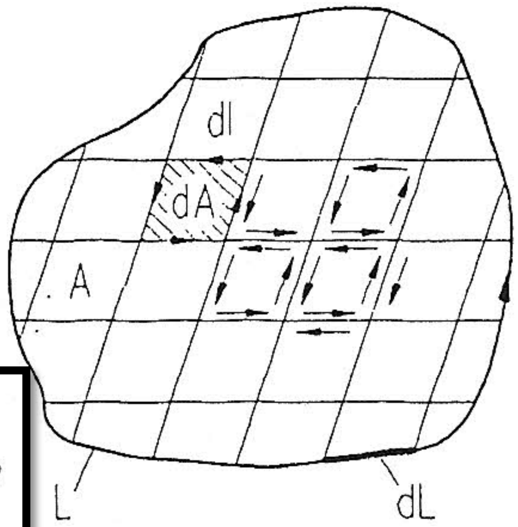
4. Динамика на идеален флуид

4.10. Вртежно струеење

Стоксова теорема (за претворање на линиски интеграл во површински):

$$d\Gamma = 2\,(\vec{\omega}\,,\; d\vec{A}\,) = 2\,\omega\, dA \cos\alpha = d\varepsilon \qquad d\Gamma = \oint (\vec{v}\,,\, d\vec{l}\,) = 2\,(\vec{\omega}\,,\, d\vec{A}\,) = d\varepsilon$$

$$\boxed{\Gamma = \oint_L (\vec{v}\,,\, d\vec{l}\,) = \int_A d\Gamma = \int_A 2\,(\vec{\omega}\,,\, d\vec{A}\,) = \int_A (\mathrm{rot}\,\vec{v}\,,\, d\vec{A}\,) = \int_A d\varepsilon}$$



$$\Gamma = \oint_L (\vec{v}\,,\, d\vec{l}\,) = \oint_L (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \int_A (\mathrm{rot}\,\vec{v}\,,\, d\vec{A}\,) =$$

$$= \int_A \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \int_A \left(2\,\omega_x\, dydz + 2\,\omega_y\, dxdz + 2\,\omega_z\, dxdy\right)$$

Скаларна форма

4. Динамика на идеален флуид

4.10. Вртежно струење

Томсонова теорема:

Како се менува циркулацијата по должина на една крива линија во текот на времето

Со диференцирање на флуксот по времето:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_A^B \left(\frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{l}\right) + \int_A^B v\,dv$$

Од основната равенка на струењето после скаларен производ:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{l}\right) = (\mathrm{grad}\, U, d\vec{l}\,) - \left(\frac{1}{\rho}\, grad\, p, d\vec{l}\right) = dU - \frac{dp}{\rho}$$

Конечно за изводот на флуксот по времето:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_A^B \left(dU - \frac{dp}{\rho} + v\,dv\right) = \int_A^B d\left(U - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = \left[U - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right]_A^B$$

4. Динамика на идеален флуид
4.10. Вртежно струење

После интегрирање по затворена крива линија $B \rightarrow A$:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \left[U - \int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right]_A^{B \rightarrow A} = 0$$

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0\,, \qquad \Gamma = konst.}$$

Томсонова теорема:

Ако силите под чие дејство се одвива струењето имаат свој потенцијал, а густината е функција само од притисокот, тогаш циркулацијата на брзината по кривата линија што поминува низ едни исти честици од флуидот е константна големина во текот на времето!

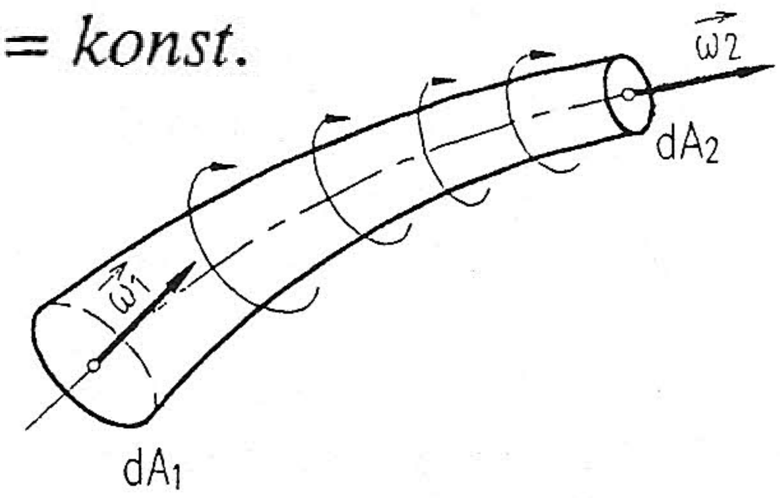
4. Динамика на идеален флуид

4.10. Вртежно струење

Хемхолцова теорема: Изведена од Томсоновата

Јачината на вртежот во текот на времето останува константна по должината на целото вртежно влакно:

$$\Gamma = konst.: \; 2\omega_1 \, dA_1 = 2\omega_2 \, dA_2 = konst.$$



Втора Хемхолцова теорема:

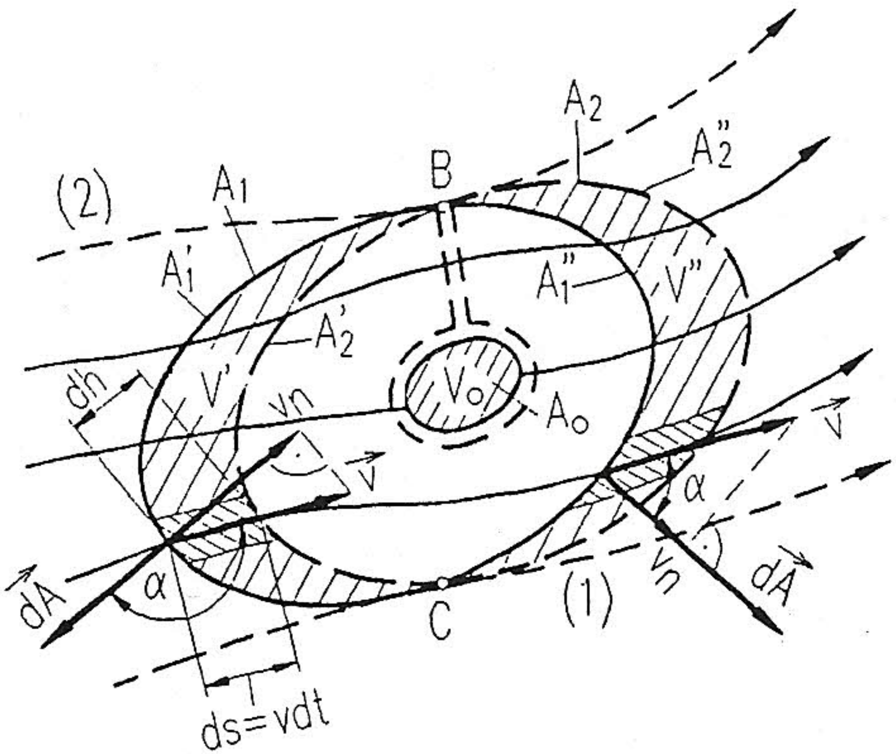
Секоја вртежна линија е составена од едни исти флуидни честици и таа плива заедно со нив.

4. Динамика на идеален флуид

4.11. Равенка на континуитетот во интегрален облик

Површината A_1 ограничува волумен на флуид со конечни димензии V_1 со маса

$$m_1 = \int_{V_1} \rho \, dV$$



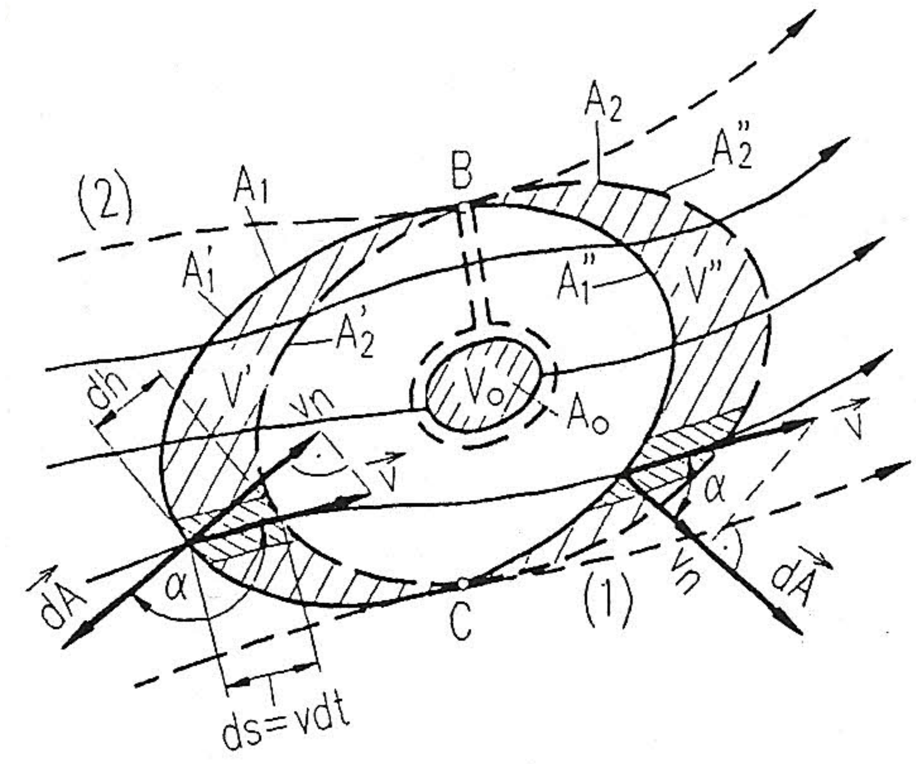
$$\Delta m = m_2 - m_1 = \int_{V''} \rho \, dV - \int_{V'} \rho \, dV =$$

$$\Delta m_o = d \int_{V} \rho \, dV$$

4. Динамика на идеален флуид

4.11. Равенка на континуитетот во интегрален облик

За некомпресибилен флуид без извори и понори:



$$\int_A (\vec{v}, d\vec{A}) = \int_A dQ = 0$$

4. Динамика на идеален флуид

4.12. Закон на импулсот и закон на моментот на импулсот

Промена на импулсот по времето еднаква на резултантната сила што дејствува на ограничена маса флуид *m* и го предизвикува нејзиното движење (струење):

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{F}_R$$

Вкупниот импулс за сите флуидни честици:

$$\vec{J} = \int_V dm\,\vec{v} = \int_V \rho\,\vec{v}\,dV$$

Закон на импулсот во механиката на флуидите:

$$\boxed{\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\,\vec{v}\,dV = \vec{F}_R}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.12. Закон на импулсот и закон на моментот на импулсот

Промена на моментот на импулсот на флуидот по времето еднаква на векторскиот збир на моментите на сите сили што дејствуваат на ограничената маса во однос на било која точка:

$$\frac{d\vec{M}_F}{dt} = \vec{M}_R$$

Вкупниот момент на импулсот на ограничената маса *m* сместена во волуменот *V*:

$$\vec{M}_F = \int_V dm\,[\vec{r}, \vec{v}] = \int_V \rho\,[\vec{r}, \vec{v}]\,dV$$

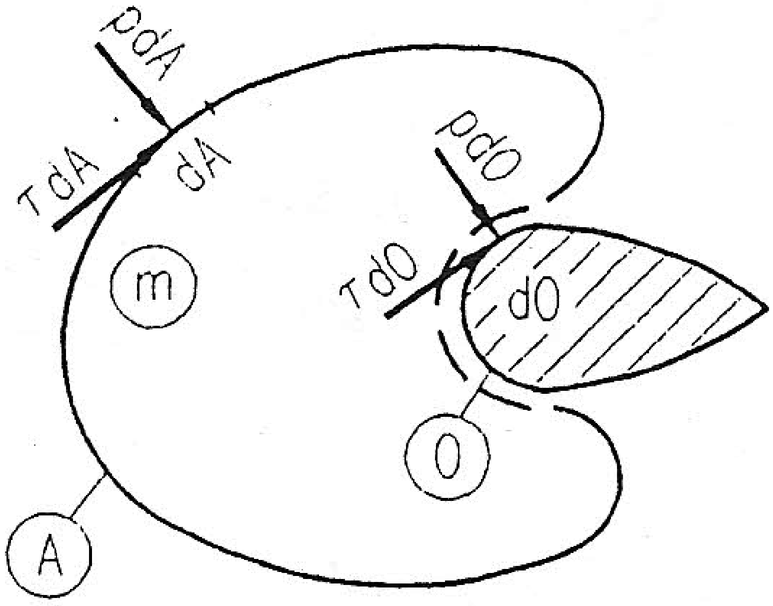
Закон на моментот на импулсот во механиката на флуидите:

$$\boxed{\frac{d\vec{M}_F}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\,[\vec{r}, \vec{v}]\,dV = \vec{M}_R}$$

4. Динамика на идеален флуид

4.12. Закон на импулсот и закон на моментот на импулсот

Во резултантната сила треба да се земат сите волуменски сили (Земјина тежа, центрифугална сила и сл.), како и сите површински сили (нормалните сили од притисокот и тангенцијалните сили на триење на површините *A* и *O*):



$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{F}_A + \vec{F}_O + \vec{G}_F}$$

$$\vec{F}_A = \vec{P}_A + \vec{T}_A$$

$$\vec{F}_O = \vec{P}_O + \vec{T}_O$$

МЕХАНИКА НА ФЛУИДИ

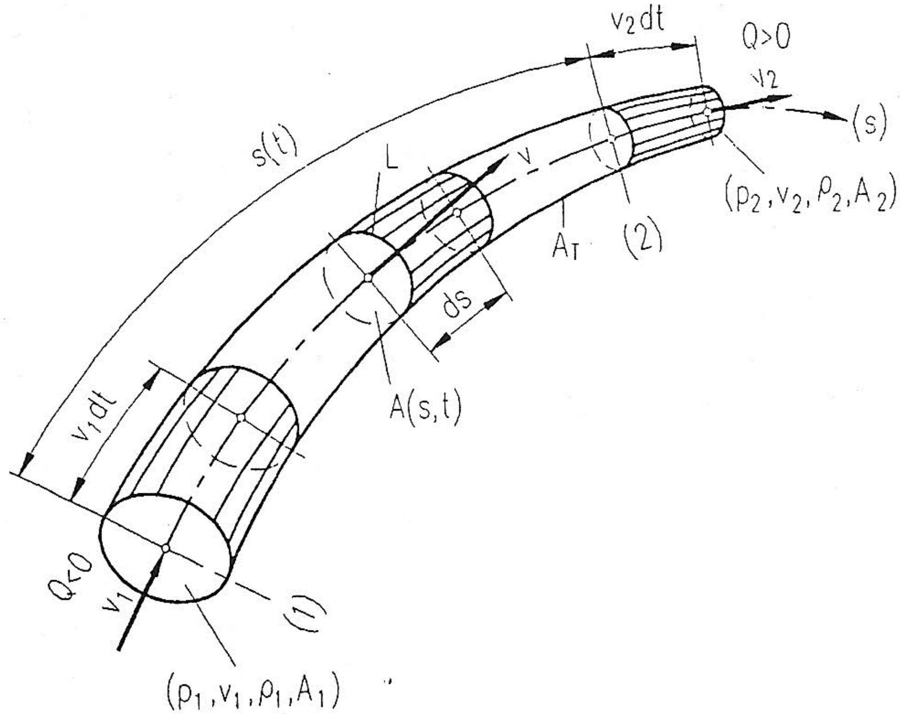
IV семестар, 8 ECTS

Проф. д-р Зоран Марков

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.1. Основни равенки на струење низ струен ток

Струјниот ток го формираат сите струјни линии низ сите точки на една затворена крива линија *L*, која ограничува површина *A*



- **Стационарно струење**
- **Струење кај цевки и канали**
- **Средни струјни големини**
- **Контролна површина**
  $K = A_1 + A_T + A_2$

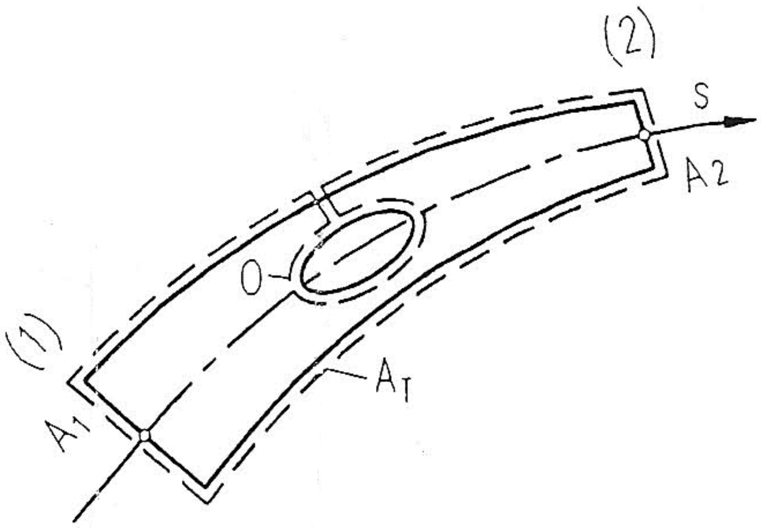
5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.1. Основни равенки на струење низ струен ток

а) Равенка на континуитет:

$$\int_K \rho\, dQ = \int_K \rho\,(\vec{v}, d\vec{A}) = \int_{A_2} \rho\, dQ - \int_{A_1} \rho\, dQ = \int_{A_2} \rho(\vec{v}, d\vec{A}) - \int_{A_1} \rho\,(\vec{v}, d\vec{A}) = 0$$

$$\int_{A_1} \rho\,(\vec{v}, d\vec{A}) = \int_{A_2} \rho\,(\vec{v}, d\vec{A}) = \int_{A} \rho\,(\vec{v}, d\vec{A})$$



За брзина и густина кои владеат на средната струјница *s* за целиот пресек и при константни *v* и *ρ*:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = \rho\, v A = konst.$$

За некомпресибилен флуид:

$$\boxed{Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 = vA}$$

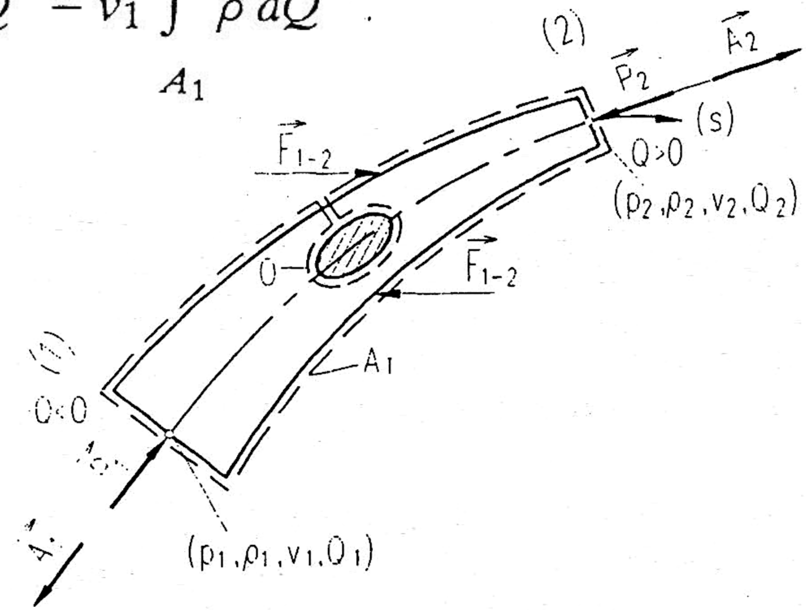
5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.1. Основни равенки на струење низ струен ток

в) Закон за импулс :

$$\int_K \rho \vec{v}\, dQ = \vec{F_R}$$

$$\int_K \rho \vec{v}\, dQ = \int_{A_2} \rho \vec{v_2}\, dQ - \int_{A_1} \rho \vec{v_1}\, dQ = \vec{v_2} \int_{A_2} \rho\, dQ - \vec{v_1} \int_{A_1} \rho\, dQ$$



$$\boxed{\rho Q\,(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = \vec{F_R}}$$

Резултантната сила:

$$\vec{F_R} = -p_1\vec{A_1} - p_2\vec{A_2} + \vec{F}_{1-2} + \vec{G}_{1-2} + \vec{P_O}$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.1. Основни равенки на струење низ струен ток

в) Закон за импулс:

Препорака:

Доколку не постои круто тело:

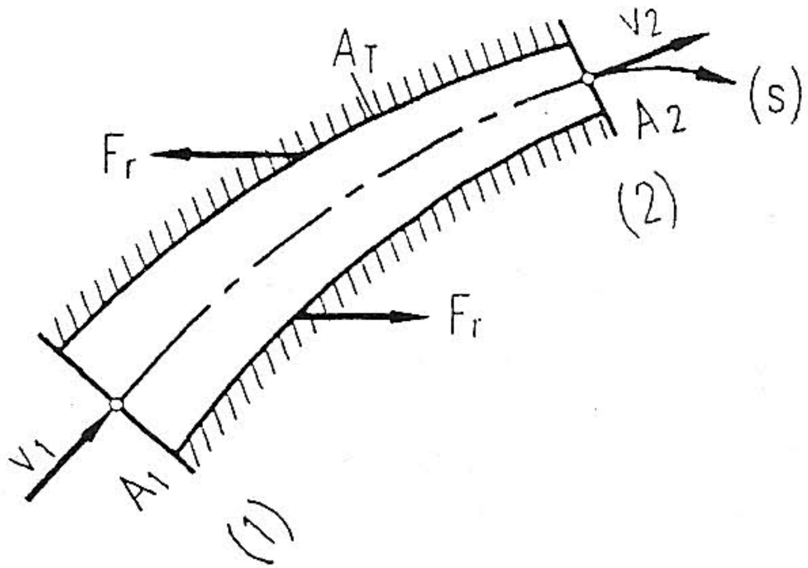
Равенките да се разложат на скаларни!!

$$\rho Q(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = -p_1\vec{A_1} - p_2\vec{A_2} + \vec{F}_{1-2} + \vec{G}_{1-2}$$

в) Закон за момент на импулсот:

$$\vec{M_r} = [\vec{F_r}, \vec{r_r}] = \rho Q([\vec{v_1}, \vec{r_1}] - [\vec{v_2}, \vec{r_2}]) -$$

$$-p_1[\vec{A_1}, \vec{r_1}] - p_2[\vec{A_2}, \vec{r_2}] + [\vec{G}_{1-2}, \vec{e}]$$



$\vec{r_r}$, $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$ и $\vec{e}$ **- вектор-положбите на нападните точки на одделни сили во однос на точката во однос на која се бара момент**

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

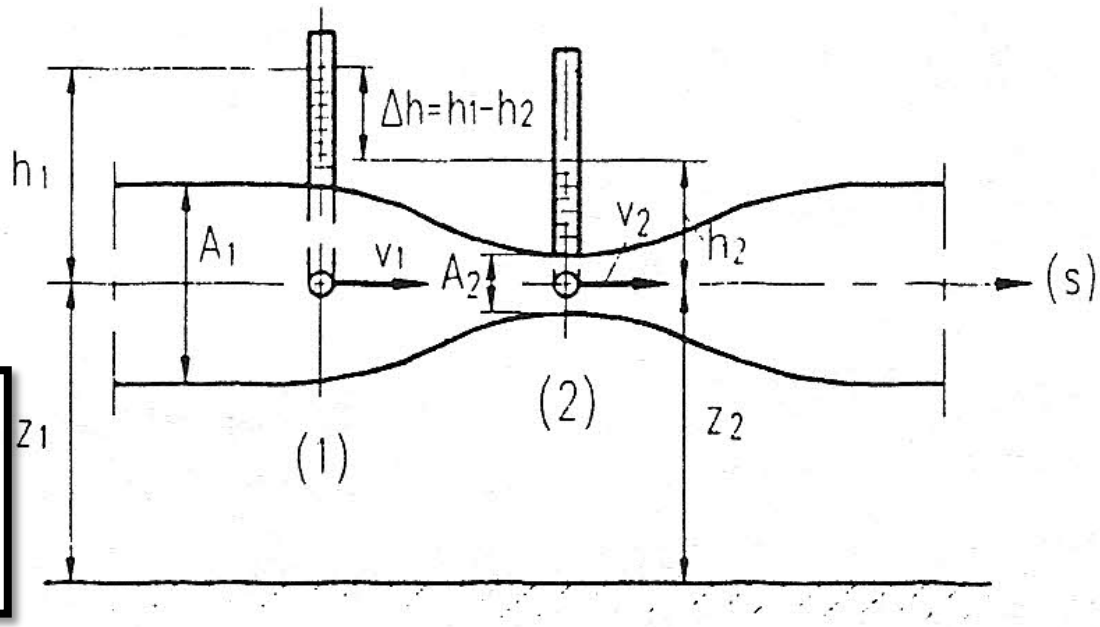
Вентуриева цевка

Служи за мерење на протокот преку мерење на разликата на притисокот во два различни пресека од струјниот ток формиран од ѕидовите на цевководот.

$$\frac{p_1}{g\rho} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{g\rho} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{p_1 - p_2}{g\rho} = \frac{1}{2g} v_1^2 \left[(A_1/A_2)^2 - 1 \right]$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2g\,(p_1 - p_2)/g\rho}{(A_1/A_2)^2 - 1}}}$$



5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

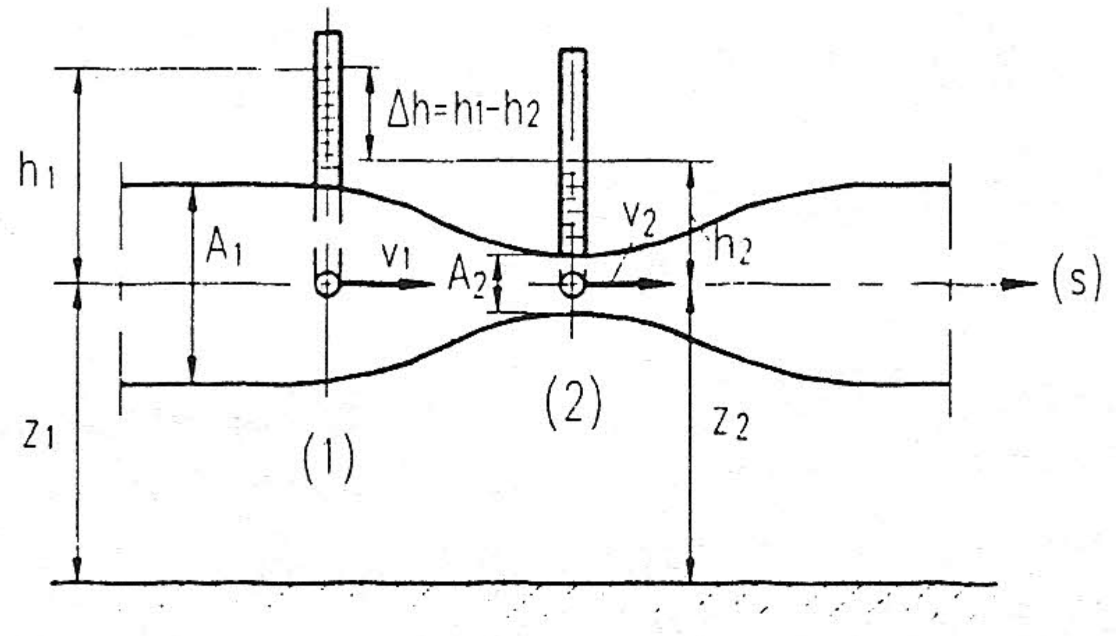
5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Вентуриева цевка

$$Q = v_1 A_1 = A_1 \sqrt{\frac{2g\,\Delta h}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

$$C = A_1 \sqrt{\frac{2g}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

$$\boxed{Q = C\sqrt{\Delta h}}$$



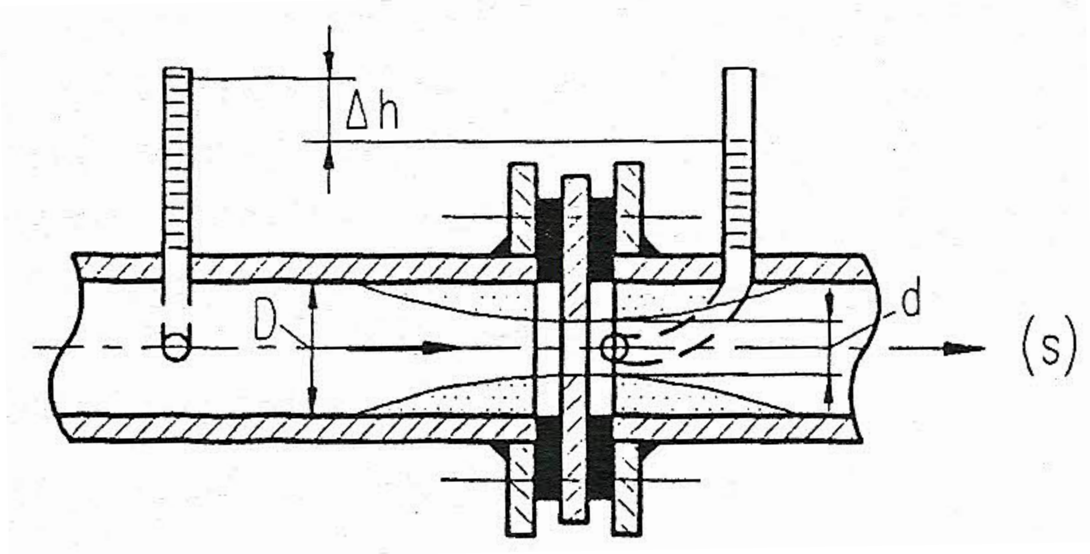
Ова е израз за идеален флуид!!!

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Мерна бленда

За реален флуид протокот е помал поради смалувањето на брзината како последица на силите на триење!



$$Q = k\,A_1\,v_1 = k\,A_1 \sqrt{\frac{2g\,\Delta h}{(A_1/A_2)^2 - 1}} = k\,C\,\sqrt{\Delta h}$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Истекување низ мал отвор во атмосферата

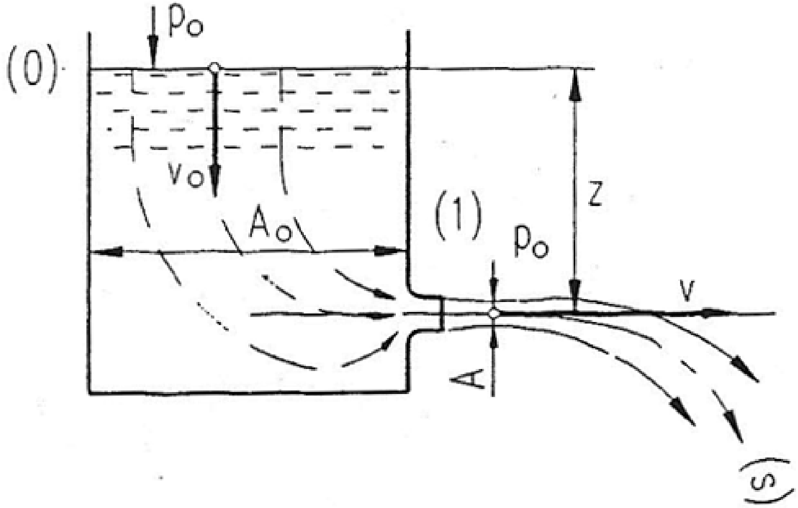
$$\frac{p_o}{g\rho}+\frac{v_o^2}{2g}+z=\frac{p}{g\rho}+\frac{v^2}{2g}$$

$$v_o A_o = v A\,, \quad \text{т.е.} \quad v_o = v\,\frac{A}{A_o}$$

$$p = p_o = p_a$$

$$\frac{v^2}{2g}\left(\frac{A}{A_o}\right)^2 + z = \frac{v^2}{2g}$$

$$v=\sqrt{\frac{2gz}{1-(A_1/A_o)^2}}$$



$$A << A_o$$

$$\boxed{v=\sqrt{2gz}}$$

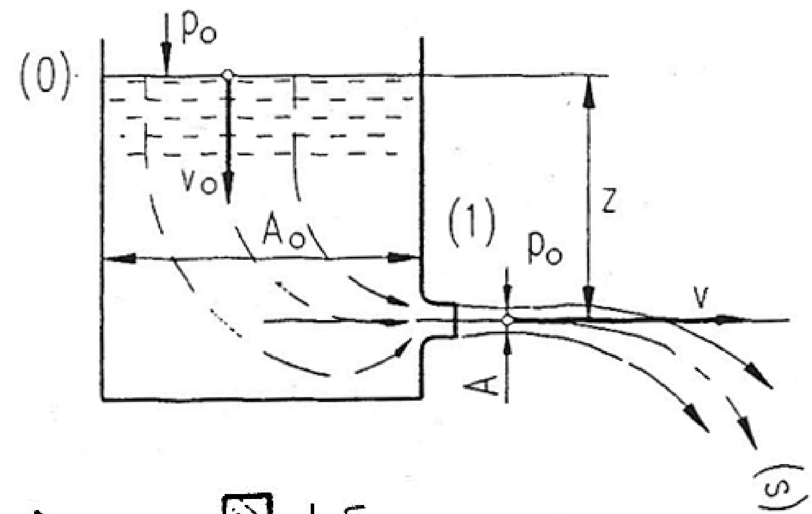
Торичелиева формула

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Истекување низ мал отвор во атмосферата

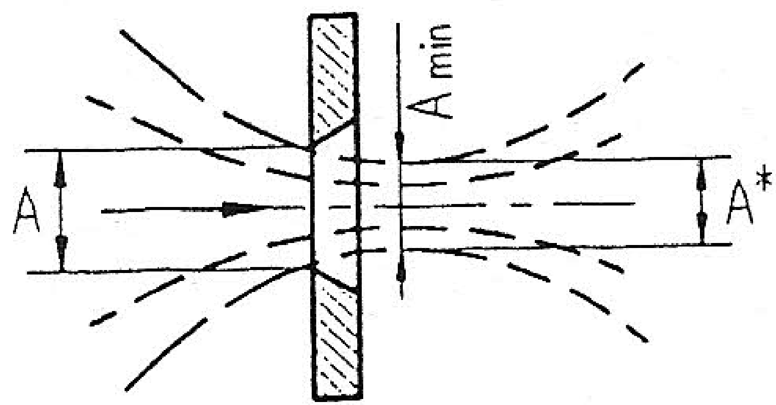
Вистинската брзина е помала од пресметаната заради отпорите на триење



Коефициент на брзина φ **= 0,96-1,0**

$$v = \varphi\sqrt{2gz}$$

Контракција на млазот (ψ)



$$Q = vA^* = \varphi\,\psi\,A\sqrt{2gz}$$

$$Q = \mu A\sqrt{2gz}$$

Коефициент на истекување μ :

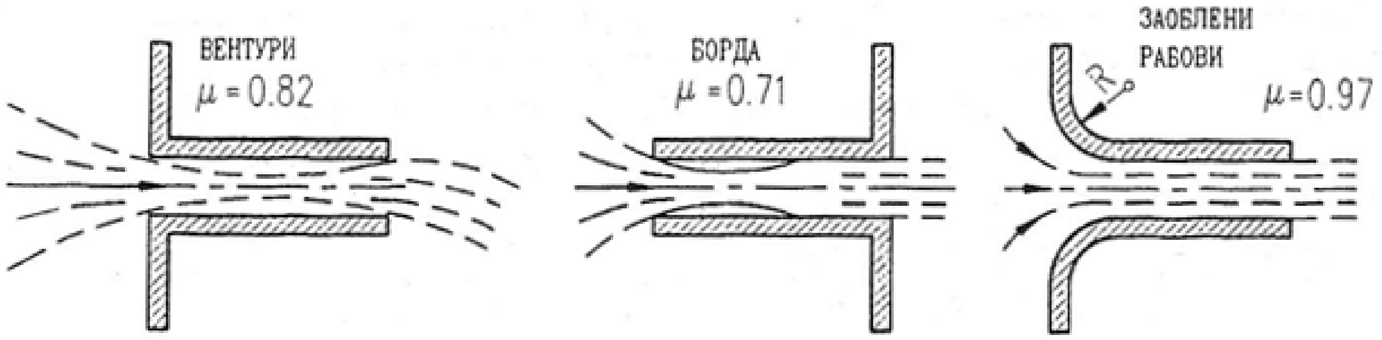
$$0{,}5 < \mu < 1{,}0$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Истекување низ мал отвор во атмосферата

Најдобри коефициенти μ :



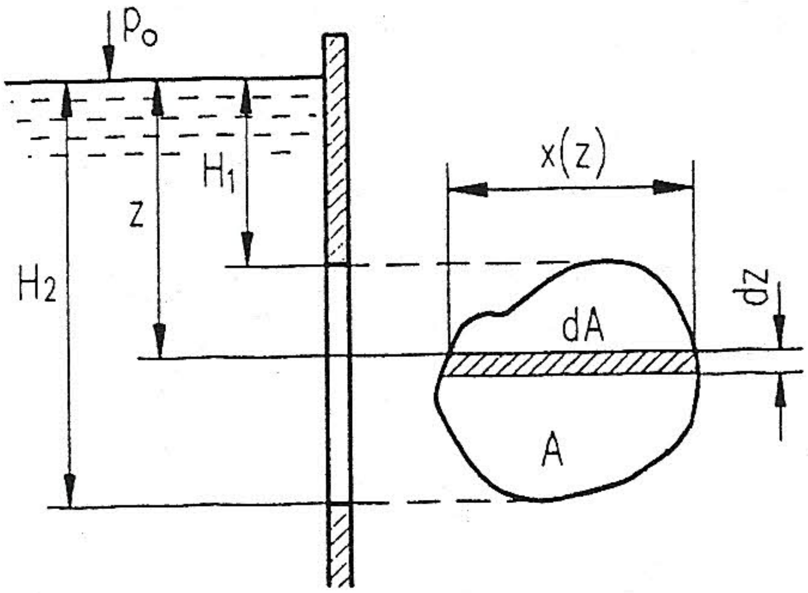
5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Истекување во атмосферата низ големи отвори

Брзината на истекување зависи само од положбата на отворот низ кој истекува течноста!!

За кога *d* не е многу помало од *z*:



$$dQ = \mu\, dA \sqrt{2gz} = \mu\, x(z) \sqrt{2gz}\, dz$$

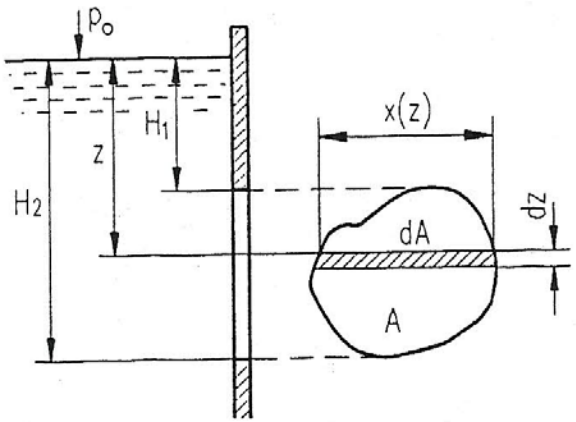
$$\boxed{Q = \int_A dQ = \mu \sqrt{2g} \int_{z=H_1}^{z=H} x(z) \sqrt{z}\, dz}$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

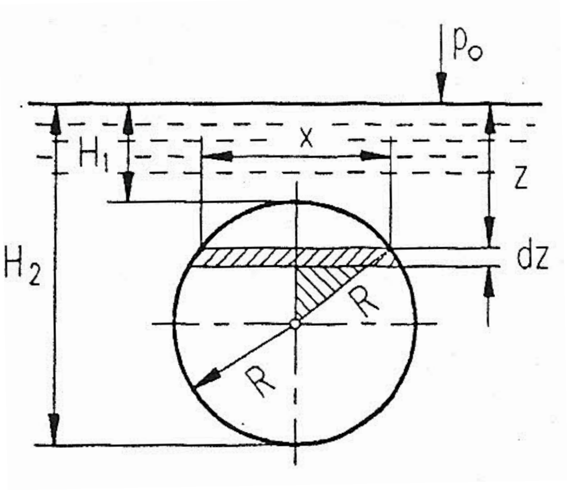
Истекување во атмосферата низ големи отвори

- **За правоаголен пресек со ширина *b=x(z) = const.* и висина *a (H_1-H_2)*:**



$$Q = \mu \frac{2}{3}\sqrt{2g}\, b \left(\sqrt{H_2^3} - \sqrt{H_1^3} \right)$$

- **За кружен пресек со пречник *D=2R*:**



$$Q = \mu \pi R^2 \sqrt{2g\,(H_1 + R)}\, \left[1 - \frac{1}{32} \frac{R^2}{(H_1 + R)^2} \right]$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

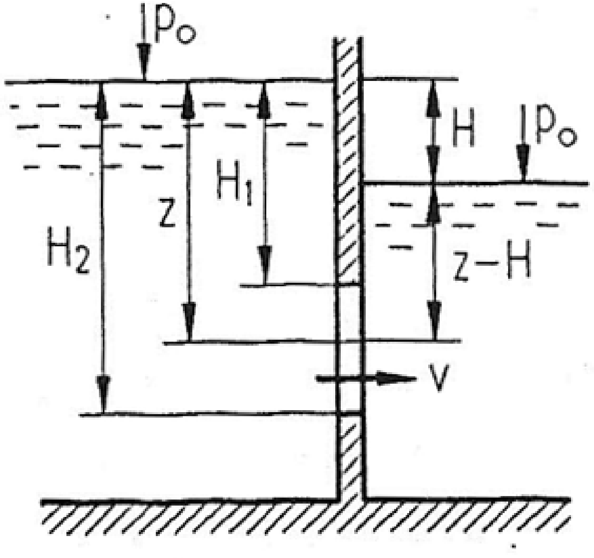
5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

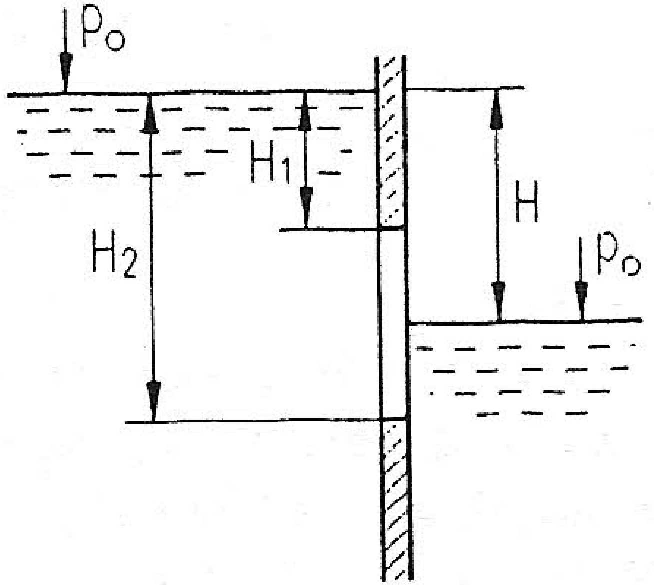
Истекување под вода и комбинирано

$$Q = \mu A \sqrt{2gH}$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q = \mu b \sqrt{2g}\left[\left(H_2 - \frac{H}{3}\right)\sqrt{H} - \frac{2}{3} H_1 \sqrt{H_1}\right]$$





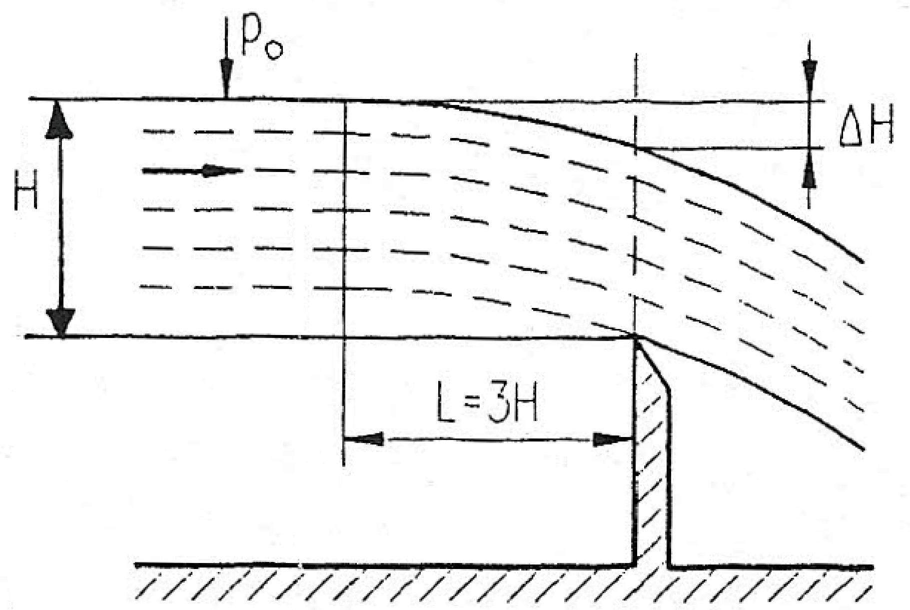
5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Истекување под вода (прелив)

Служат за мерење на проток. Во претходната равенка: *H_1=0* и *H_2=H*

$$Q = \mu \sqrt{2g}\,\frac{2}{3}\,b\,H\sqrt{H}$$



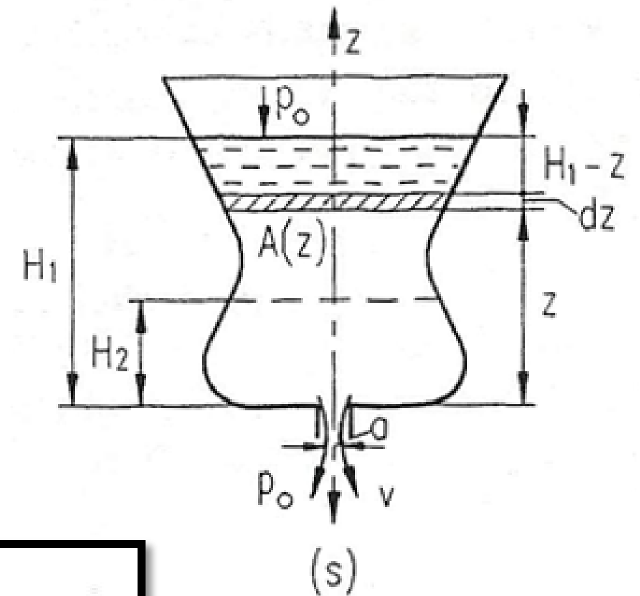
5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Време на празнење

Променлив напречен пресек *A=A(z)*

$$Q\,dt = dV$$



$$Q = \mu\, a \sqrt{2gz}$$

$$dV = -A(z)\,dz$$

$$\mu\, a \sqrt{2gz}\, dt = -A(z)\,dz$$

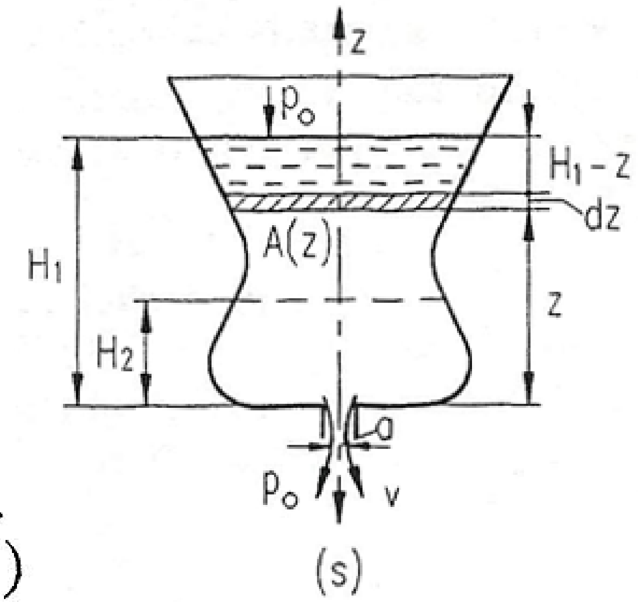
$$t = -\frac{1}{\mu\, a \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{A(z)\,dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\mu\, a \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} \frac{A(z)\,dz}{\sqrt{z}}$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Време на празнење

$$t = -\frac{1}{\mu\, a \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{A(z)\, dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\mu\, a \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} \frac{A(z)\, dz}{\sqrt{z}}$$



Во случај на призматичен сад со *A=const:*

$$t = \frac{A}{\mu\, a} \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right)$$

Целосно празнење (*H_2=0*):

$$t_o = \frac{A}{\mu\, a} \sqrt{\frac{2H_1}{g}} = \frac{2AH_1}{\mu\, a \sqrt{2gH_1}} = \frac{2V}{\mu\, a \sqrt{2gH_1}}$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Струење низ струен ток што ротира

Б.Р. за мирни канали од *O* до *A*

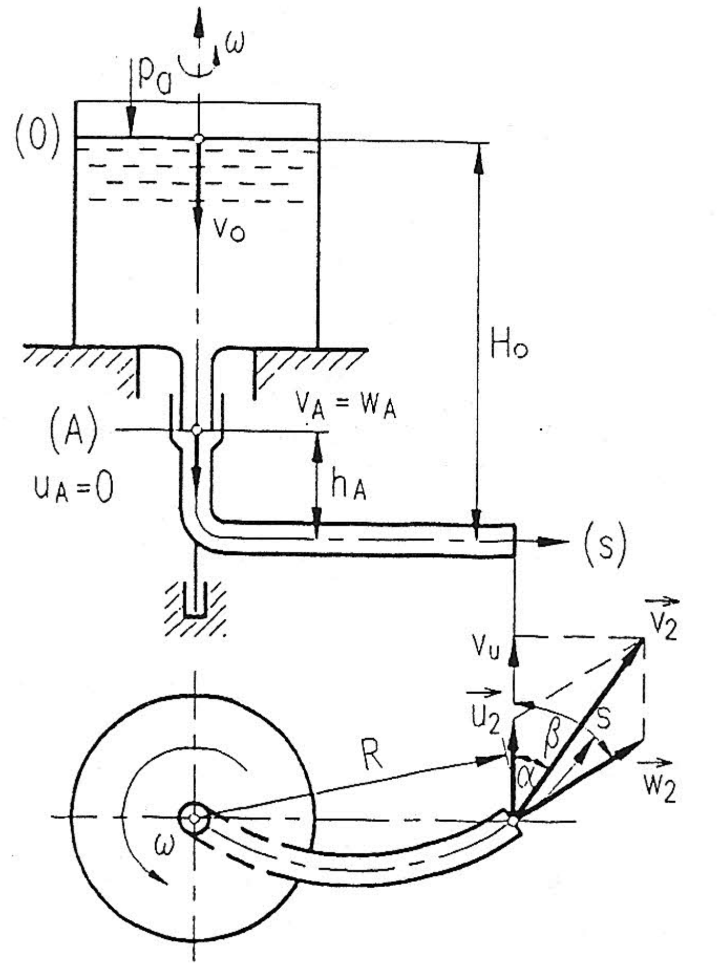
Б.Р. за ротирни канали од *A* до *2*

$$\frac{p_o}{\rho g} + \frac{v_o^2}{2g} + H_0 = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + h_A$$

$$\frac{p_o - p_A}{\rho g} = \frac{v_A^2}{2g} - (H_o - h_A)$$

$$u_A = 0 \qquad \vec{v_2} = \vec{w_2} + \vec{u_2}$$

$$v_A = w_A \qquad u_2 = R\omega$$



5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

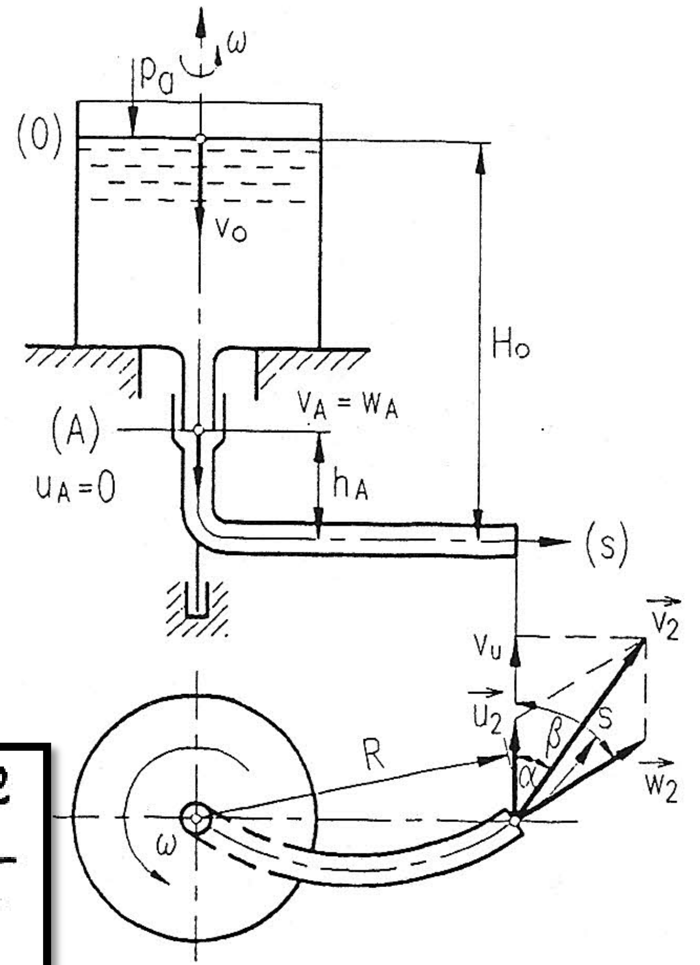
Струење низ струен ток што ротира

Б.Р. за ротирни канали од *A* до *2*

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{w_A^2}{2g}-\frac{u_A^2}{2g}+h_A=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{w_2^2}{2g}-\frac{u_2^2}{2g}+h_2$$

$w_A=v_A$, и $u_A=0$ $\qquad$ $p_2=p_o$ и $h_2=0$

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_A^2}{2g}+h_A=\frac{p_o}{\rho g}+\frac{w_2^2}{2g}-\frac{u_2^2}{2g}$$



Со спојување од O до 2:

$$\boxed{\frac{p_o}{\rho g}+\frac{v_o^2}{2g}+H_o=\frac{p_o}{\rho g}+\frac{w_2^2}{2g}-\frac{u_2^2}{2g}}$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Струење низ струен ток што ротира

$$\boxed{\frac{p_o}{\rho g} + \frac{v_o^2}{2g} + H_o = \frac{p_o}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g}}$$

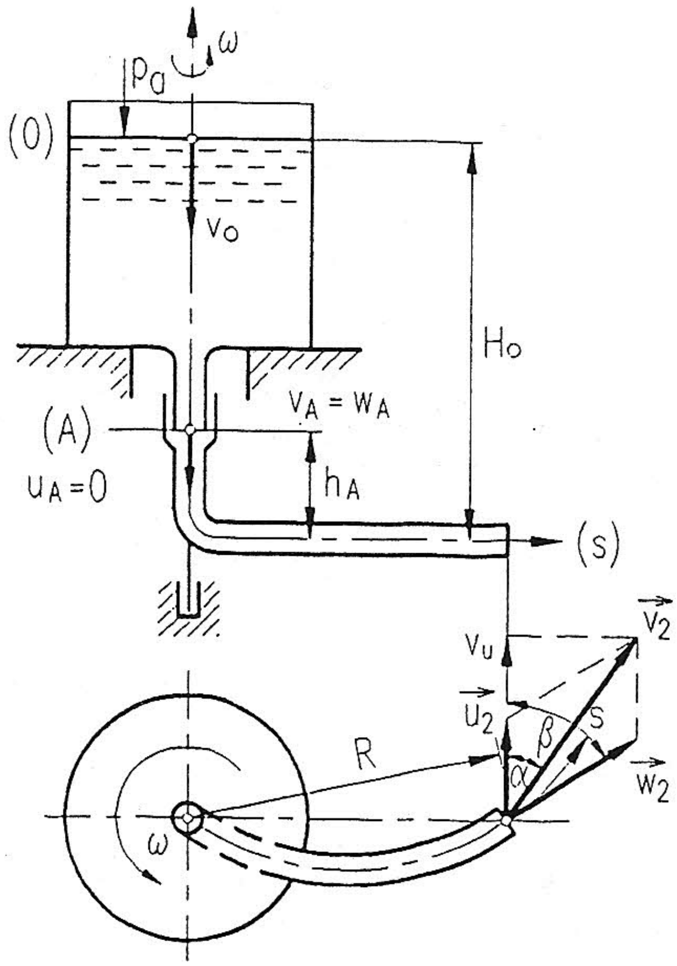
$$Q = A_A w_A = A_2 w_2$$

$$v_A = w_A = w_2$$

$$\frac{p_o - p_A}{\rho g} = h_A + \frac{u_2^2}{2g} > 0$$

Во точката А секогаш владее потпритисок!!!

$$\boxed{\frac{p_o}{\rho g} > \frac{p_A}{\rho g}}$$

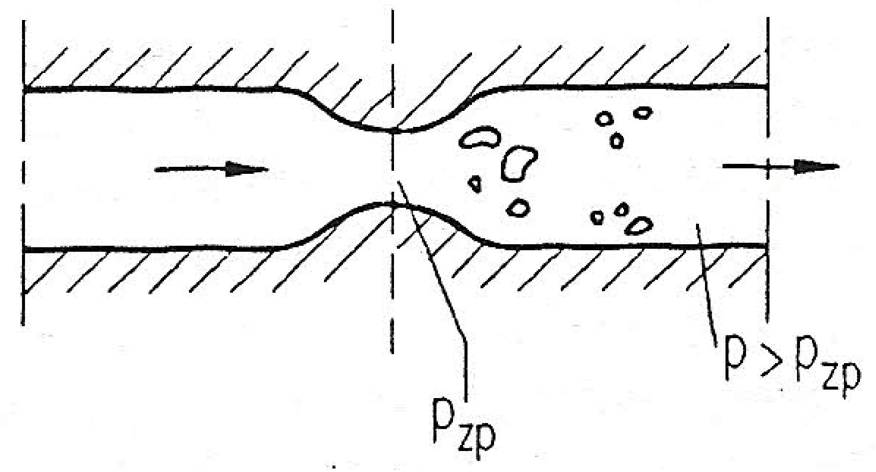


5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.2. Примери на стационарно струење на некомпресибилен флуид

Струење низ струен ток што ротира

- **Потпритисок се јавува секогаш кај турбомашините**
- **Понекогаш овој потпритисок е помал од притисокот на заситена пара на течноста при работната температура**
- **КАВИТАЦИЈА**
- **Кавитација кај мирни канали при стеснување**



5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.3. Нестационарно струење на некомпресибилен флуид

Осцилирање на течност кај сврзани садови

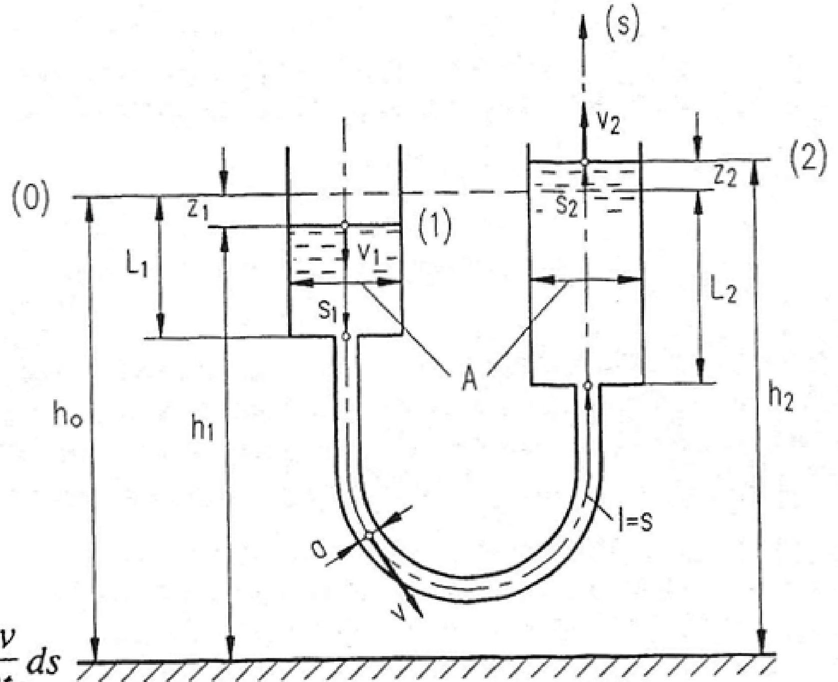
- **За произволна точка на струјницата**

$$v = v\,(s, t)$$

- **На деловите на струјницата со ист напречен пресек:**

$$v = v\,(t)\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = 0\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}$$

- **Бернулиева равенка за (1) и (2):**



$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 + \frac{1}{g}\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t}\,ds = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + \frac{1}{g}\int_0^2 \frac{\partial v}{\partial t}\,ds$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.3. Нестационарно струење на некомпресибилен флуид

Осцилирање на течност кај сврзани садови

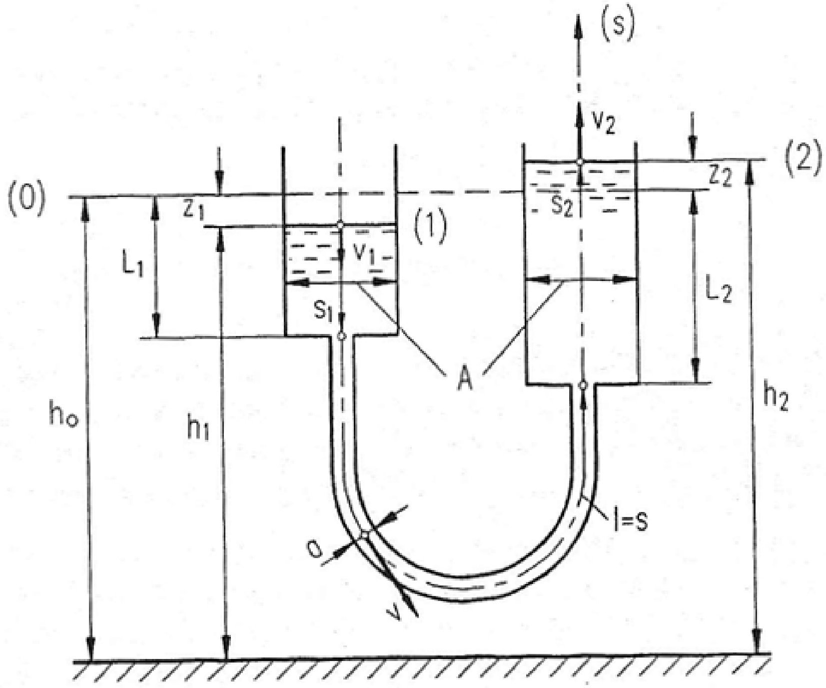
- **При $A_1=A_2=A$ ($z_1=z_2=z$) и $p_1=p_2=p_0$:**

$$2z + \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\,ds = 0$$

- **Интегралот се дели на 3 дела (долж кои попречниот пресек е константен):**

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\,ds = \frac{dv_1}{dt}\int_0^{s_1} ds + \frac{dv}{dt}\int_0^{s} ds + \frac{dv_2}{dt}\int_0^{s_2} ds$$

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\,ds = \frac{dv_1}{dt}\left(L_1 + l\frac{A}{a} + L_2\right) = l_{ek}\frac{dv_1}{dt}$$



5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.3. Нестационарно струење на некомпресибилен флуид

Осцилирање на течност кај сврзани садови

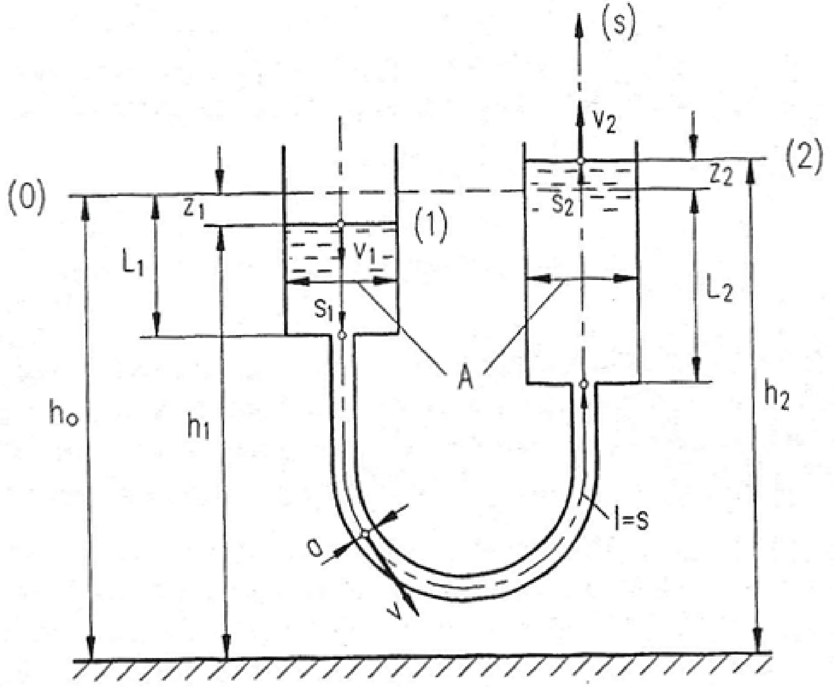
- **При $A_1=A_2=A$ ($z_1=z_2=z$) и $p_1=p_2=p_0$:**

$$ds_1 = dz$$

$$v_1 = ds_1/dt = dz/dt \;, \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2g}{l_{ek}} z = 0}$$

$$\omega = \sqrt{2g/l_{ek}}$$



- **После интегрирање: (хармониски осцилации)**

$$\boxed{z = z_{max} \sin \omega t}$$

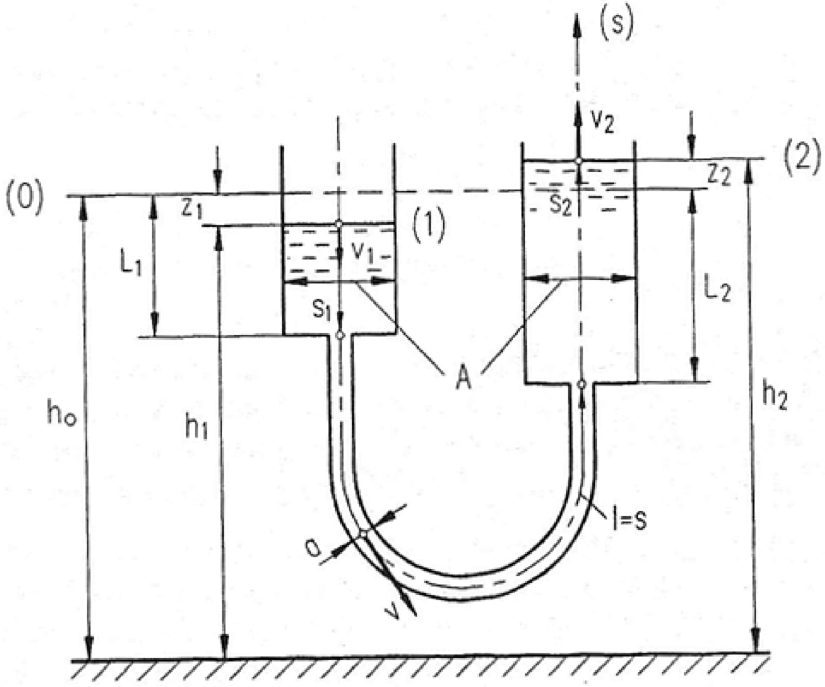
5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.3. Нестационарно струење на некомпресибилен флуид

Осцилирање на течност кај сврзани садови

- **Период на осцилациите:**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{ek}}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2g}\left(L_1 + l\frac{A}{a} + L_2\right)}$$



- **При константен пречник на садовите и U – цевката**

$$l_{ek} = L_1 + l\frac{A}{a} + L_2 = L_1 + l + L_2 = L$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}}$$

(еднаков на периодот на осцилации на математичко нишало со иста должина)

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.3. Нестационарно струење на некомпресибилен флуид

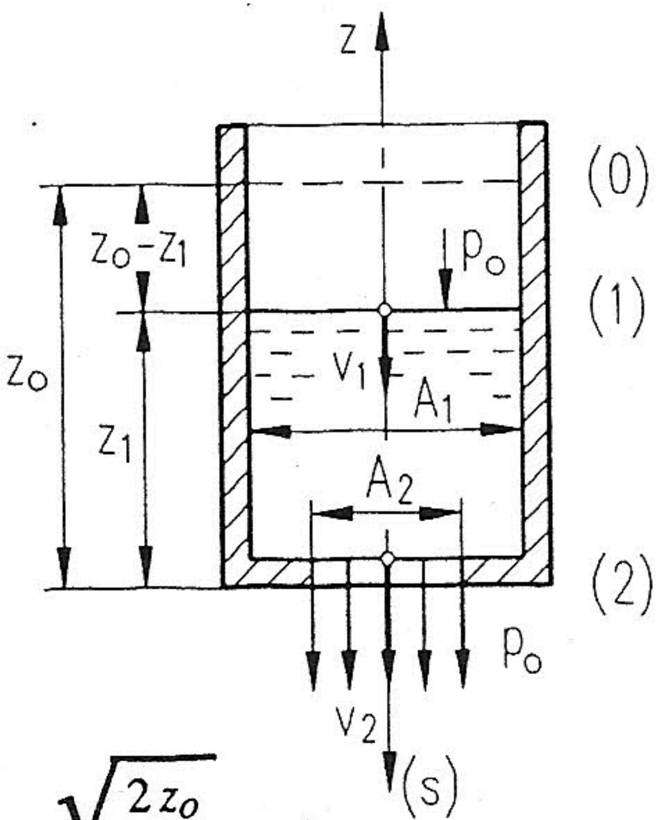
Истекување од сад низ отвор со конечен пресек

- Бернулиева равенка за (1) и (2):

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1+\frac{1}{g}\int_0^{s_1}\frac{\partial v}{\partial t}\,ds=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2+\frac{1}{g}\int_0^{s_2}\frac{\partial v}{\partial t}\,ds$$

$$p_1=p_2=p_o \qquad z_2=0 \qquad v_2=v_1 A_1/A_2$$

$$\boxed{\frac{1}{2g}v_1^2\left[1-\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]+z_1=\frac{1}{g}\frac{dv_1}{dt}\int_0^{z_1}ds=\frac{z_1}{g}\frac{dv_1}{dt}}$$



- Време на празнење:

$$\boxed{t_1=\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{2z_o}{g}}\left(1-\sqrt{\frac{z_1}{z_o}}\right)} \qquad t_{1max}=\sqrt{\frac{2z_o}{g}}$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.4. Струење на компресибилен флуид

Бернулиева равенка за адијабатска промена

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = konst. = C = \frac{p_o}{\rho_o^{\kappa}}$$

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g\,z = konst. = C$$

$$\int \frac{dp}{\rho} = \int \left(\frac{p}{C}\right)^{-\frac{1}{\kappa}} dp = \frac{\kappa}{\kappa - 1} C^{\frac{1}{\kappa}}\; p^{\frac{(\kappa-1)}{\kappa}} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_o{}^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_o} p^{\frac{(\kappa-1)}{\kappa}}$$

Од равенка на адијабата: $\frac{p_o{}^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_o} = \frac{p^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho}$

Интегралот во Б.Р: $\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.4. Струење на компресибилен флуид

Бернулиева равенка за адијабатска промена

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g\,z = konst. = C$$

Со занемарување на специфичната тежина на гасот:

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = konst.$$

За две точки на струјницата:

$$\boxed{\frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_o}{\rho_o} + \frac{{v_o}^2}{2}}$$

Или:

$$\frac{a^2}{\kappa - 1} + \frac{v^2}{2} = \frac{{a_o}^2}{\kappa - 1} + \frac{{v_o}^2}{2}$$

$$a = \sqrt{\kappa \cdot p/\rho}$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.4. Струење на компресибилен флуид

Брзина на истекувањето

(од претходната Б.Р.):

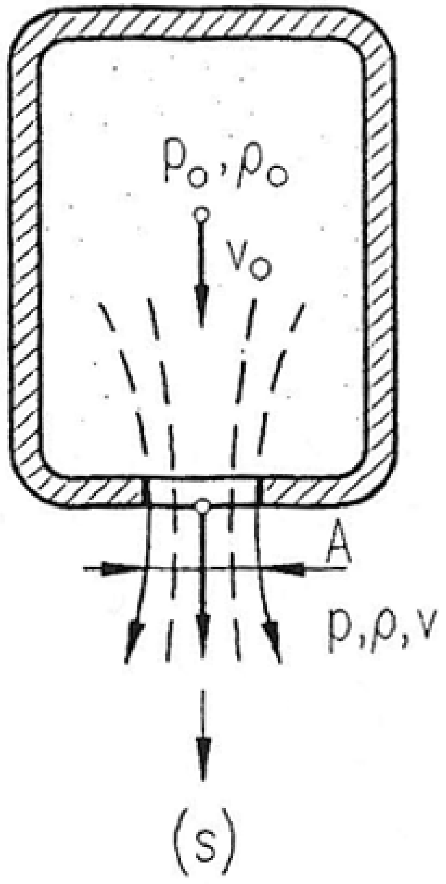
$$v = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{(\kappa-1)}{\kappa}}\right]}$$

Сент-Венанова формула

$$\rho \cdot v \cdot A = konst \quad \left[\frac{kg}{s}\right] \qquad \rho = \rho_0 (p/p_0)^{1/\kappa}$$

$$A\rho_0 (p/p_0)^{1/\kappa}\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-(p/p_0)^{\frac{(\kappa-1)}{\kappa}}\right]} =$$

$$= f(p, A) = A\varphi(p/p_0) = K = konst$$



Критичен притисок p_{kr} при минимален пресек A_{min}

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.4. Струење на компресибилен флуид

Брзина на истекувањето

Се пресметува пресекот *A*:

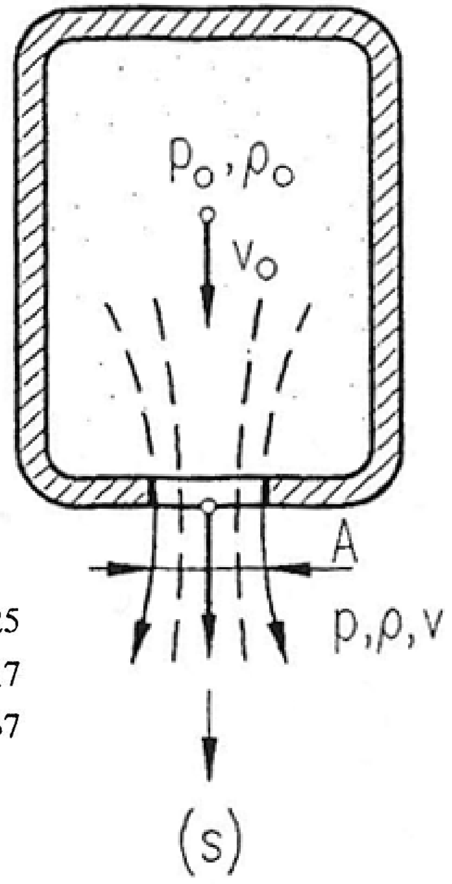
$$A = \frac{K}{\varphi\,(p/p_o)}$$

После определување на минимумот на функцијата:

$$\left(\frac{p}{p_o}\right)_{A\,=\,A_{min}} = \frac{p_{kr}}{p_o} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{(\kappa - 1)}}$$

- за воздух, $\kappa = 1{,}403$, а $p_{kr}/p_o = 0{,}525$
- за водород, $\kappa = 1{,}409$, а $p_{kr}/p_o = 0{,}417$
- за CO_2 $\kappa = 1{,}300$, а $p_{kr}/p_o = 0{,}537$

$$v_{kr} = \sqrt{2\,\frac{\kappa}{\kappa + 1}\,\frac{p_o}{\rho_o}}$$



5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.4. Струење на компресибилен флуид

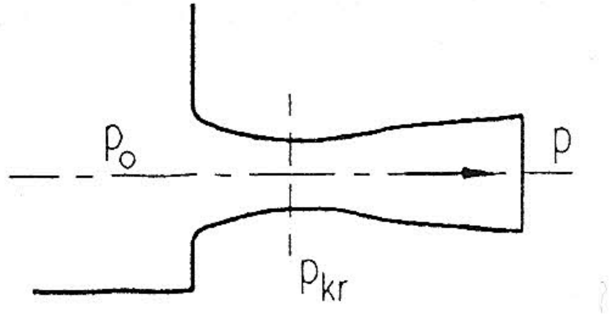
Брзина на истекувањето

Можни сценарија при истекувањето:

- **Притисокот во средината во која се врши истекувањето е помал од критичниот притисок $p/p_0 < p_{kr}/p_0$ - најголема можна брзина е критичната**

Лавалова млазица

$$A\,\varphi\,(p/p_0) = konst.$$



- **Притисокот во средината во која се врши истекувањето е поголем од критичниот притисок $p/p_0 > p_{kr}/p_0$ - не е можна критична брзина (се обезбедува целосна експанзија)**

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.5. Примена на закон на импулс и закон за момент на импулсот

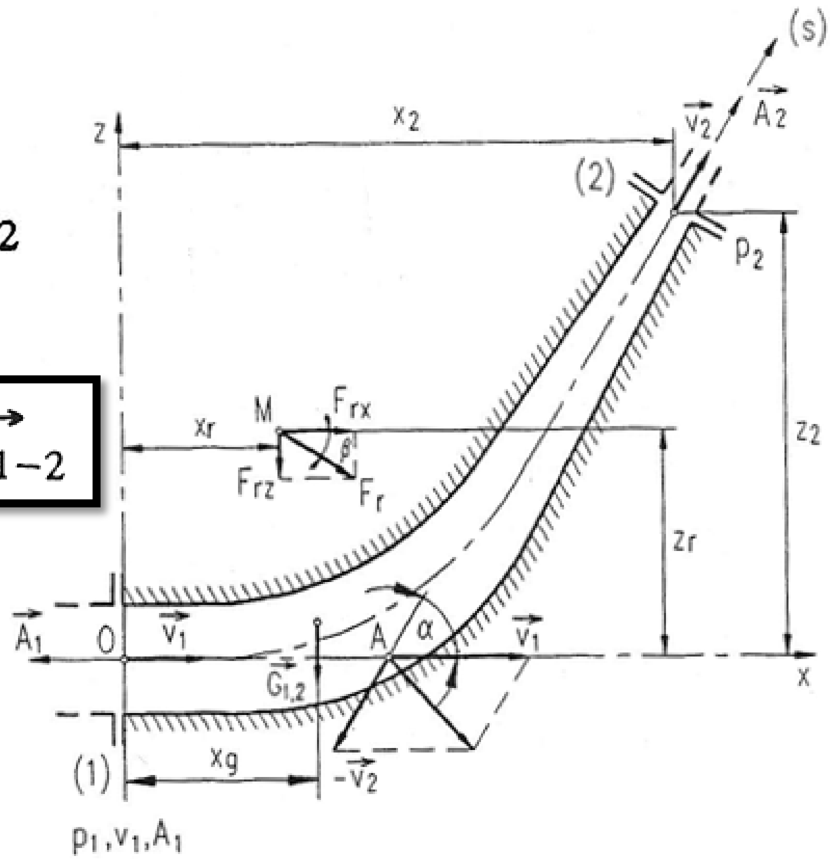
Сила на закривена цевка

- **Сила со која флуидот дејствува на ѕидовите на цевката:**

$$\vec{F_r} = \rho Q(\vec{v_1} - \vec{v_2}) - p_1\vec{A_1} - p_2\vec{A_2} + \vec{G_{1-2}}$$

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$\boxed{\vec{F_r} = -(p_1 + \rho v_1^2)\vec{A_1} - (p_2 + \rho v_2^2)\vec{A_2} + \vec{G_{1-2}}}$$



- **Компонентата во x–правец:**

$$F_{rx} = (p_1 + \rho v_1^2)A_1 - (p_2 + \rho v_2^2)A_2 \cos\alpha$$

- **Агол со x-оската:** $tg\beta = \dfrac{F_{rz}}{F_{rx}}$

- **Положба на нападна точка M (x_r и z_r)**

$$F_{rz} x_r = -(p_2 + \rho v_2^2)A_2 x_2 \sin\alpha - G_{1-2} x_g \sin\frac{3\pi}{2}$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.5. Примена на закон на импулс и закон за момент на импулсот

Реакција на млазот

- **Течност истекува од резервоар во атмосфера со брзина**

$$v = \sqrt{2gH}$$

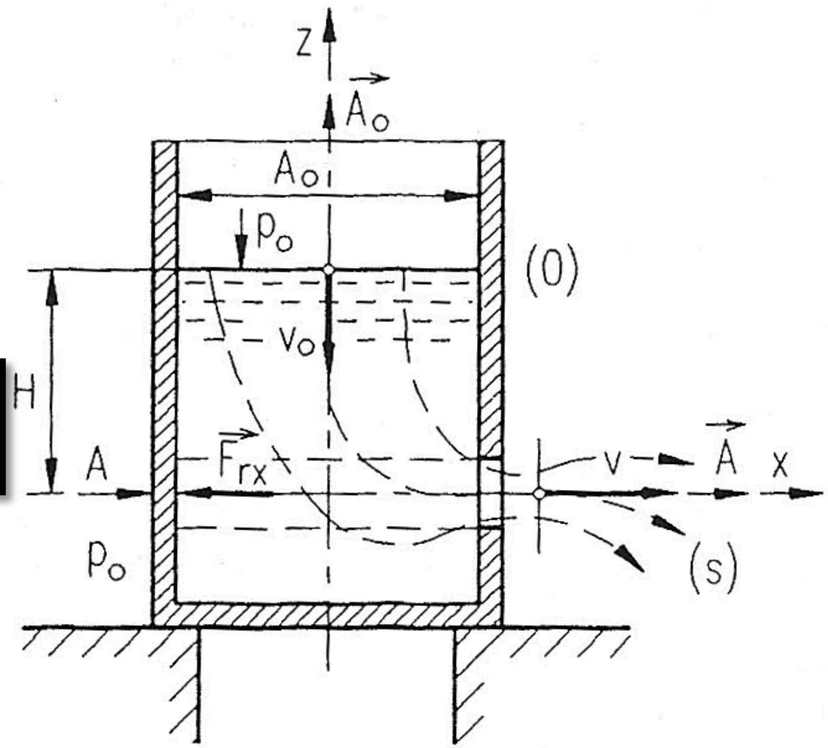
- **Сила со која флуидот дејствува на ѕидовите на резервоарот:**

$$\boxed{\vec{F}_r = \rho Q(\vec{v}_o - \vec{v}) - p_o\vec{A}_o - p_o\vec{A} + \vec{G}}$$

- **Сила која дејствува на дното на резервоарот во правец на z-оска:**

$$F_{rz} = -(\rho v_o^2 A_o + G)$$

- **Сила која настојува да го помести резервоарот спротивно на истекувањето (реакција на млазот):**



$$F_{rx} = F'_{rx} + F'' = -\rho v^2 A = -\rho Q v$$

5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.5. Примена на закон на импулс и закон за момент на импулсот

Реакција на млазот

- Кај ракетите се нарекува СИЛА НА ПОТИСОК (транслаторно движење на ракетата во насока спротивна од истекувањето на гасовите на согорување)!!!
- Гасовите на согорување истекуваат од Лавалова млазница со релативна брзина *w*
- Силата на потисок се пресметува како

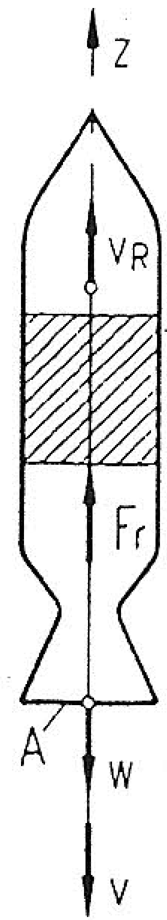
$$F_r = -\rho Q w = -\rho A w^2$$

- Апсолутната брзина на истекување на гасовите:

$$v = w - v_R$$

- Силата на потисок после полетувањето е еднаква на инерцијалната сила на ракетата:

$$\boxed{F_r = -M \frac{dv_R}{dt}}$$



5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.5. Примена на закон на импулс и закон за момент на импулсот

Реакција на млазот

- **Вкупната маса на ракетата:**

$$M = M_R + M_g - \rho Q t$$

- **Забрзувањето на ракетата:**

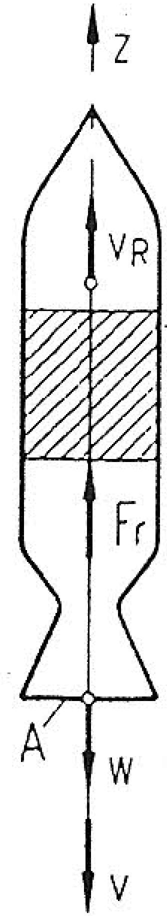
$$-\frac{dv_R}{dt} = \frac{F_r}{M} = \frac{-\rho\, Q\, w}{M_R + M_g - \rho\, Q\, t}$$

- **При тоа Q=const. и w=const, па се добива:**

$$\boxed{v_R = w \int_0^t \frac{\rho\, Q\, dt}{M_R + M_g - \rho\, Q\, t} = w \ln\left[1 + \frac{\rho\, Q\, t}{M_R + M_g - \rho\, Q\, t}\right]}$$

- **Максималната брзина (при согорување на целото гориво):**

$$v_{Rmax} = w \ln\left(1 + \frac{M_g}{M_R}\right) = w \ln\left(1 + \frac{G_g}{G_R}\right)$$



5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.5. Примена на закон на импулс и закон за момент на импулсот

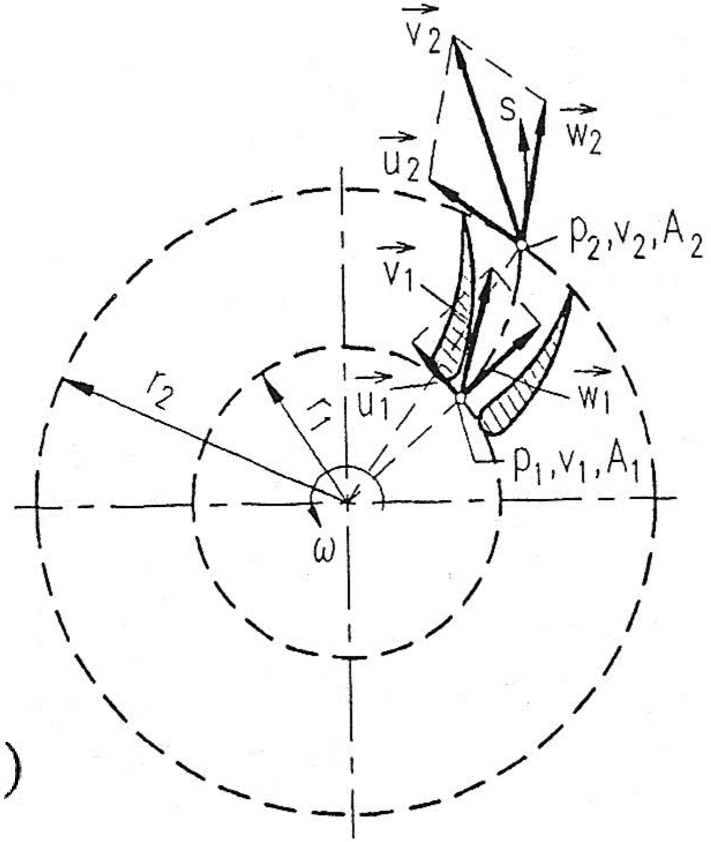
Основна равенка на туромашините

- Струјниот ток е формиран од лопатките и тој ротира со аголна брзина ω
- Вртежниот (обртниот) момент со кој флуидот дејствува на лопатките (или обратно) од закон на момент на импулс:

$$\vec{M}_r = [\vec{F}_r, \vec{r}\,] = \rho Q\left([\vec{v}_1, \vec{r}_1] - [\vec{v}_2, \vec{r}_2]\right) - p_1[\vec{A}_1, \vec{r}_1] - p_2[\vec{A}_2, \vec{r}_2] + [\vec{G}_{1-2}, \vec{e}\,]$$

- При вертикална оска на ротација и цилиндрични површини:

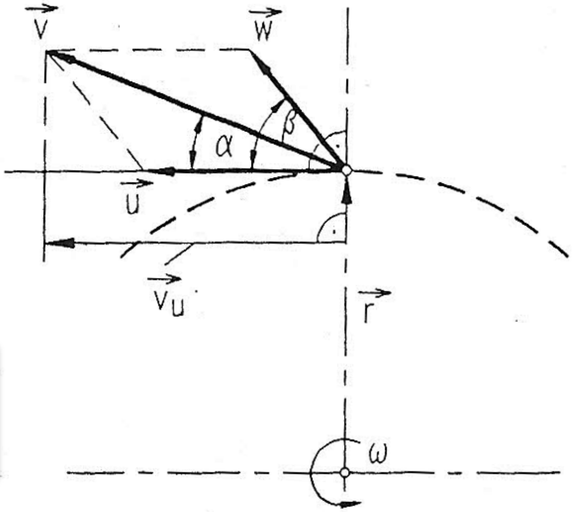
$$\vec{M}_r = \rho Q\left([\vec{v}_1, \vec{r}_1] - [\vec{v}_2, \vec{r}_2]\right)$$



5. Некои елементарни струења на идеален флуид низ струен ток

5.5. Примена на закон на импулс и закон за момент на импулсот

Основна равенка на турбомашините



- **Интензитетот на векторските производи:**

$$\left|[\vec{v_i}, \vec{r_i}]\right| = v_i r_i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) = v_i r_i \cos\alpha_i$$

- **Интензитетот на обртниот момент:**

$$\boxed{\left|\vec{M_r}\right| = M_r = \rho Q(v_1 r_1 \cos\alpha_1 - v_2 r_2 \cos\alpha_2) = \rho Q(r_1 v_{1u} - r_2 v_{2u})}$$

(основна равенка на турбомашините)

- **Моќноста што флуидот ја предава на оската на ротација (кај турбините), односно што ја прима од оската на ротација (кај пумпите):**

$$\boxed{N = M_r \omega = \rho Q (r_1 \omega v_{1u} - r_2 \omega v_{2u})}$$

- **Или преку тријаголниците на брзината:**

$$N = \rho Q \left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} \right)$$