Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

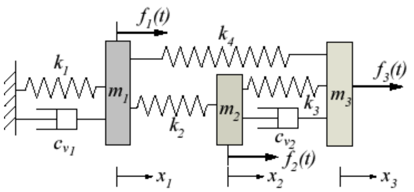
ВИБРАЦИИ ВО МАШИНСТВОТО

5. ОСЦИЛАЦИИ НА СИСТЕМИ СО 2 И ПОВЕЌЕ СТЕПЕНИ НА СЛОБОДА

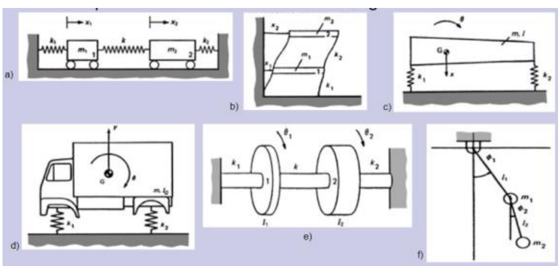
наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

5.1. СТЕПЕНИ НА СЛОБОДА

Системот со повеќе степени на слобода може да се претстави како неколку маси, поврзани меѓусебно со пружини и придушувачи, или како една маса способна да се праместува во повеќе насоки.

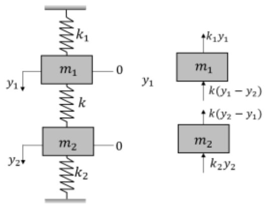


Наједноставен од системите со повеќе степени на слобода е системот со два степени на слобода.



5.2. СЛОБОДНИ НЕПРИДУШЕНИ ВИБРАЦИИ НА СИСТЕМ СО 2 СТЕПЕНИ НА СЛОБОДА

Диференцијалните равенки на движењето наједноставно ќе се добијат со примена на Даламберов принцип за секоја маса



$$m_1\ddot{y}_1 = -k_1 y_1 - k(y_1 - y_2)$$
$$m_2\ddot{y}_2 = -k_2 y_2 - k(y_2 - y_1)$$

или

$$\ddot{y}_1 + \frac{(k_1 + k)}{m_1} y_1 - \frac{k}{m_1} y_2 = 0$$
$$\ddot{y}_2 + \frac{(k_2 + k)}{m_2} y_2 - \frac{k}{m_2} y_1 = 0$$

$$\ddot{y}_1 + \boldsymbol{a}\, y_1 - \boldsymbol{b}\, y_2 = 0$$
$$\ddot{y}_2 + \boldsymbol{a_1}\, y_2 - \boldsymbol{b_1}\, y_1 = 0$$

$$\ddot{y}_1 + \boldsymbol{a}\, y_1 - \boldsymbol{b}\, y_2 = 0$$
$$\ddot{y}_2 + \boldsymbol{a_1}\, y_2 - \boldsymbol{b_1}\, y_1 = 0$$

каде што:

$$a = \frac{(k_1 + k)}{m_1}; \qquad b = \frac{k}{m_1}; \qquad a_1 = \frac{(k_2 + k)}{m_2}; \qquad b_1 = \frac{k}{m_2};$$

Равенките се линеарни, хомогени диференцијални равенки од втор ред. Ако се претпостави дека масите m_1 и m_2 изведуваат хармониско движење со иста фрекфенција и различни амплитуди A_1 и A_2, тогаш претпоставениот облик е:

$$y_1 = A_1 sin\omega_n t$$
$$y_2 = A_2 sin\omega_n t$$

Можните решенија и нивните изводи се заменуваат, по што се добива систем хомогени линеарни алгебарски равенки во однос на непознатите амплитуди A_1 и A_2.

$$(a - \omega_n{}^2)A_1 - bA_2 = 0$$
$$(a_1 - \omega_n{}^2)A_2 - b_1 A_1 = 0$$

Тривијалното решение $A_1 = A_2 = 0$ покажува мирување на масите, додека реалното решение се добива ако детерминантата од коефициентите пред A_1 и A_2 биде еднаква на нула, односно:

$$\Delta\omega_n = \begin{vmatrix} a - \omega_n{}^2 & -b \\ -b_1 & a_1 - \omega_n{}^2 \end{vmatrix} = 0$$

Решението на детерминантата е равенка позната како карактеристична равенка на системот или како фрекфентна равенка:

$$\omega_n{}^4 - \omega_n{}^2(a + a_1) + aa_1 - bb_1 = 0$$

од каде можат да се добијат две ршенија за $\omega_n{}^2$:

$$\omega_n{}^2{}_{1,2} = \frac{a + a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + a_1)^2}{4} - aa_1 + bb_1}$$ односно:

$$\omega_n{}^2{}_{1,2} = \frac{a + a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(a - a_1)^2}{4} + bb_1}$$

Двата корени се позитивни и реални броеви. Ако се земат предвид само позитивните вредности, бидејќи негативните само го менуваат знакот на произволните константи кај хармониските функции произлегува дека постојат две сопствени фреквенции.

Од тука произлегува дека **систем со два степени на слобода има две сопствени фрекфенции**, односно бројот на фреквенции е еднаков со бројот на степени на слобода. Најниската фреквенција ω_{n1} се нарекува прва или основна сопствена фреквенција.

Општото решение на двете равенки е од обликот:

$$y_1 = A_{11} sin\omega_{n1}t + A_{12} sin\omega_{n2}t$$
$$y_2 = A_{21} sin\omega_{n1}t + A_{22} sin\omega_{n2}t$$

Решението покажува дека осцилаторно движење на маси од систем со два степени на слобода е составено од две хармониски компоненти со периоди $2\pi/\omega_{n1}$ и $2\pi/\omega_{n2}$, кое што не е хармониско.

Константите од општото решение не може да се добијат од почетните услови, но може да се определи нивниот однос.

Односот на коефициентите се добива ако се заменат вредностите за ω_{n1} и ω_{n2} во алгебарските равенки погоре, односно се добива:

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{b}{a - \omega_{n1}^2} = \frac{a_1 - \omega_{n1}^2}{b_1} = \frac{1}{\lambda_1}$$
$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{b}{a - \omega_{n2}^2} = \frac{a_1 - \omega_{n2}^2}{b_1} = \frac{1}{\lambda_2}$$

Равенките покажуваат дека амплитудите на осцилациите на систем со два и повеќе степени на слобода се произволни, а можат да се определат само нивните односи кои зависат од механичките особини на самиот систем (масата и крутоста).

$$y_1 = A_{11} sin\omega_{n1}t + A_{12} sin\omega_{n2}t$$
$$y_2 = \lambda_1 A_{11} sin\omega_{n1}t + \lambda_2 A_{12} sin\omega_{n2}t$$

Каде што четирите константи може да определат од почетните услови.

5.3. ГЛАВНИ ОБЛИЦИ

При посебен избор на почетните услови, можни се два специфични случаи, кога двете маси, односно целиот систем ќе осцилира со една од сопствените фреквенции. Овие специфични случаи се викаат **главни форми или главни облици на сопствените осцилации**.
Кога системот осцилира на пониската фреквенција велиме дека го имаме прввиот или главен облик, а наредната фреквенција го прави вториот главен облик на осцилации.

Ако системот осцилира по првата главна форма тогаш коефициентот A_{12} = 0, а ако осцилира по втората главна форма тогаш A_{11} = 0, односно:.

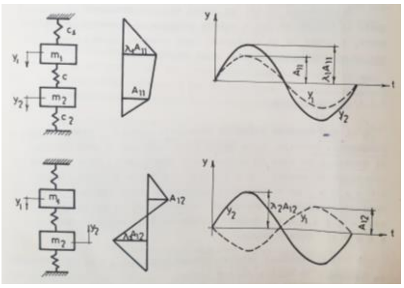
I - ва главна форма

$$y_1 = A_{11} \sin(\omega_{n1} + \varphi_1)$$
$$y_2 = \lambda_1 A_{11} \sin(\omega_{n1} + \varphi_1)$$

II – ра главна форма

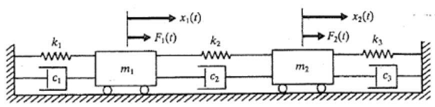
$$y_1 = A_{12} \sin(\omega_{n2} + \varphi_2)$$
$$y_2 = \lambda_2 A_{12}\, sin(\omega_{n2} + \varphi_2)$$

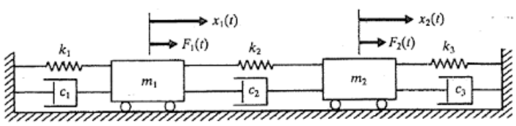
Графичкото прикажување на главните форми на осцилации е прикажано на сликата. Ако системот осцилира со една од сопствените фреквенции тогаш одговорот на системот ќе биде хармониска функција, а во спротивно ќе биде сложена функција.



5.4. ПРИМЕР НА ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА ЗАКОНОТ ЗА ДВИЖЕЊЕ ПРИ ЗАДАДЕНИ ПОЧЕТНИ УСЛОВИ

Да се определи одговорот на системот (равенките на движење) за системот со 2 степени на слобода ако k_1=30, k_2=5, k_3=0, m_1=10, m_2=1, c_1= c_2= c_3= 0, а почетните услови при кои настануваат вибрациите на системот се $x_1(0) = 1,\ \ x_2(0) = 0,\ \dot{x}_1(0) = 0,\ \dot{x}_2(0) = 0.$





Диференцијалните равенки на движење се:

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) = 0$$

Решенијата претставуваат одговор на системот и се во облик:

$$x_1(t) = X_1\cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2(t) = X_2\cos(\omega t + \phi)$$

Со замена на решенијата и нивните изводи во диф. р-ка, се добива :

$$\left[\{-m_1\omega^2+(k_1+k_2)\}X_1-k_2X_2\right]\cos(\omega t+\phi)=0$$
$$\left[-k_2X_1\{-m_2\omega^2+(k_2+k_3)\}X_2\right]\cos(\omega t+\phi)=0$$

што е вистинито во секое време само ако изразите во заградата се еднакви на нула, односно:

$$\{-m_1\omega^2+(k_1+k_2)\}X_1-k_2X_2=0$$
$$-k_2X_1\{-m_2\omega^2+(k_2+k_3)\}X_2=0$$

односно запишано во матрична форма:

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Со замена на конкретните вредности двете алгебарски р-ки се:

$$\begin{bmatrix} -10\omega^2+35 & -5 \\ -5 & -\omega^2+5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Детерминантата ќе ни ја даде карактеристичната или т.н фреквентна равенка:

$$10\omega^4-85\omega^2+150=0$$

Со нејзино решавање се добиваат двете основни фреквенции:

$$\omega_1^2=2.5, \qquad \omega_2^2=6.0$$
$$\omega_1=1.5811, \qquad \omega_2=2.4495$$

Со замена на фреквенциите во алгебарските р-ки се добива:

$$(-m_1\omega_n{}^2+k_1+k_2)\ X_1-k_2\ X_2=0$$
$$-k_2\ X_1+(-m_2\omega_n{}^2+k_2+k_3)\ X_2=0$$

се добива:

$$(-10\ \cdot 2{,}5+30+5)X_1^{(1)}-5\ X_2^{(1)}=0$$
$$-5\ X_1^{(1)}+(-1\cdot 2{,}5+5+0)\ X_2^{(1)}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X_1^{(1)}}{X_2^{(1)}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\frac{1}{\lambda_1}$$

$$(-10\ \cdot 6+30+5)X_1^{(2)}-5\ X_2^{(2)}=0$$
$$-5\ X_1^{(2)}+(-1\cdot 6+5+0)\ X_2^{(2)}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X_1^{(2)}}{X_2^{(2)}}=\frac{-5}{25}=\frac{1}{-5}=\frac{1}{\lambda_2}$$

Според тоа општите решенија се:

$$x_1(t)=X_1^{(1)}\cos(1.5811t+\phi_1)+X_1^{(2)}\cos(2.4495t+\phi_2)$$
$$x_2(t)=2X_1^{(1)}\cos(1.5811t+\phi_1)-5X_1^{(2)}\cos(2.4495t+\phi_2)$$

Со замена на почетните услови, се добива:

$$x_1(t=0)=1=X_1^{(1)}\cos\phi_1+X_1^{(2)}\cos\phi_2$$
$$x_2(t=0)=0=2X_1^{(1)}\cos\phi_1-5X_1^{(2)}\cos\phi_2$$
$$\dot{x}_1(t=0)=0=-1.5811X_1^{(1)}\sin\phi_1-2.4495X_1^{(2)}\sin\phi_2$$
$$\dot{x}_2(t=0)=-3.1622X_1^{(1)}+12.2475X_1^{(2)}\sin\phi_2$$

Од првите 2 равенства се добива:

$$X_1^{(1)}\cos\phi_1=\frac{5}{7};\qquad X_1^{(2)}\cos\phi_2=\frac{2}{7}$$

Од вторите 2 равенства се добива:

$$X_1^{(1)}\sin\phi_1=0,\ \ X_1^{(2)}\sin\phi_2=0$$

Последните две равенства даваат:

$$X_1^{(1)}=\frac{5}{7},\qquad X_1^{(2)}=\frac{2}{7},\qquad \phi_1=0,\ \ \phi_2=0$$

Одговорот на системот на слободни непридушени осцилации, односно движењето на масите ќе биде определено со:

$$x_1(t)=\frac{5}{7}\cos 1.5811t+\frac{2}{7}\cos 2.4495t$$
$$x_2(t)=\frac{10}{7}\cos 1.5811t-\frac{10}{7}\cos 2.4495t$$