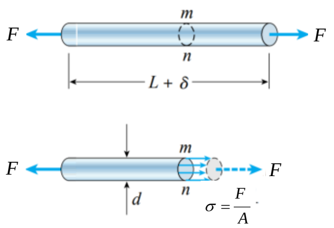
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

ЈАКОСТ НА МАТЕРИЈАЛИТЕ

2. АКСИЈАЛНИ НАПРЕГАЊА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

2.4. ХУКОВ ЗАКОН



Апсолутна линиска деформација

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

Релативна деформација

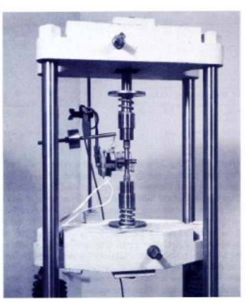
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Нормален напон

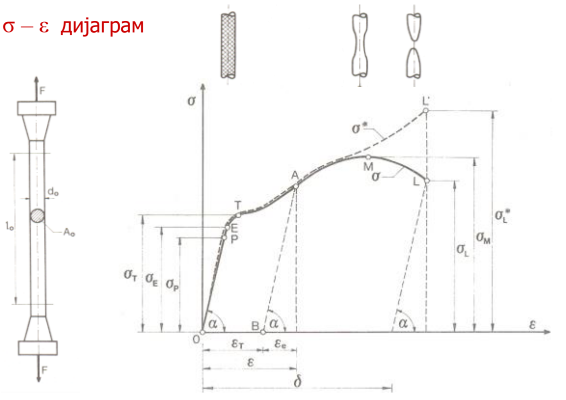
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Хуков закон $\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$ врска помеѓу напон и деформација

2.5. КАРАКТЕРИСТИКИ НА МАТЕРИЈАЛИТЕ ПРИ АКСИЈАЛНИ НАПРЕГАЊА



σ – ε дијаграм



2.6. ЈАКОСНИ ПРЕСМЕТКИ ПРИ АКСИЈАЛНО НАПРЕГАЊЕ

Јакосните пресметки при аксијално напрегање се базираат на претпоставката дека напонот во разгледуваниот пресек од елементот не смее да го помине дозволениот напон, односно:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_d$$

Дозволениот напон се пресеметува кога границата на течење или максималната затезна цврстина ќе се поделат со соодветен коефицент на сигурност. Овој коефицент на сигурност обезбедува во пресметките да се земе дозволен напон кој се наоѓа во подрачјето на еластичност

$$\sigma_d = \frac{\sigma_T}{k_{s1}} \qquad \text{или} \qquad \sigma_d = \frac{\sigma_M}{k_{s2}}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_d}$$

Димензионирање

(определување на големината на напр. пресек)

$$A \geq \frac{F}{\sigma_d}$$

Носивост

(определување на максималното оптоварување)

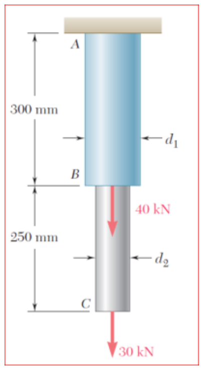
$$F_{max} \leq \sigma_d \cdot A$$

Проверка на напоните

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow \begin{cases} \sigma < \sigma_d & \text{задоволува} \\ \sigma > \sigma_d & \text{незадоволува} \end{cases}$$

Пример 1:

Два цилиндрични елементи *AB* и *BC* се меѓусебно заварени во точката *B* И оптоварени како што е прикажано на сликата . Ако е познато дека напоните не треба да бидат поголеми од 175 MPa за делот *AB* и 150 MPa за делот *BC,* да се определат најмалите можни вредности на d_1 и d_2.



Решение :

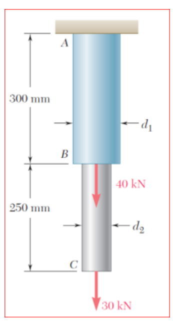
$$A \ge \frac{F}{\sigma_d} \quad \Rightarrow \quad d \ge \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot \sigma_d}}$$

$$d_1 \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 70 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 175}} = 22{,}6 \text{ mm}$$

$$\boxed{d_{1(\min)} = 23 \text{ mm}}$$

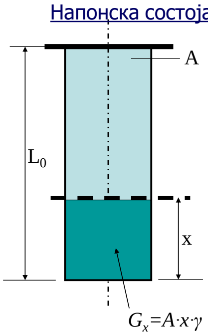
$$d_2 \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 30 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 150}} = 15{,}96 \text{ mm}$$

$$\boxed{d_{2(\min)} = 16 \text{ mm}}$$

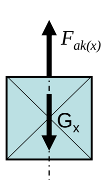


2.7. СОПСТВЕНА ТЕЖИНА КАКО АКСИЈАЛНА СИЛА

Напонска состојаба



$\gamma \neq 0$ (специфична тежина)



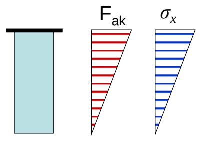
$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{ak(x)} = G_x = A \cdot x \cdot \gamma$$

$$\sigma_x = \frac{F_{ak(x)}}{A} = \gamma \cdot x$$

- Аксијалната сила и напонот, по должината на елементот се менуваат по линеарен закон.
- Најголем напон се појавува на местото на вклештување.

за $x = L$

$$\sigma_{\max} = \gamma \cdot L \le \sigma_d$$

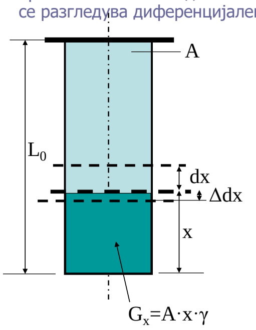


$$L_d \le \frac{\sigma_d}{\gamma}$$ дозволена должина

$$L_{kr} = \frac{\sigma_M}{\gamma}$$ критична должина

Деформациона состојба

променлив напон по должината
се разгледува диференцијален дел на елементот



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \rightarrow$$

$$\Delta dx = \varepsilon_x \cdot dx = \frac{\sigma_x}{E} \cdot dx = \frac{\gamma \cdot x}{E} \cdot dx$$

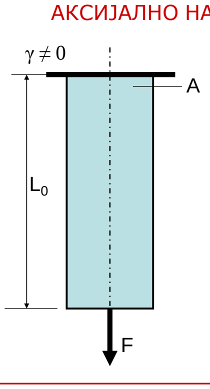
$$\Delta L = \int_0^L \Delta dx = \int_0^L \frac{\gamma \cdot x}{E} dx = \frac{\gamma \cdot L^2}{2 \cdot E} \cdot \frac{A}{A}$$

$$\Delta L = \frac{(A \cdot L \cdot \gamma) \cdot L}{2 \cdot E \cdot A} = \frac{G \cdot L}{2 \cdot E \cdot A}$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{G \cdot L}{2 \cdot E \cdot A}}$$

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ СКОПЈЕ
ЈАКОСТ НА МАТЕРИЈАЛИТЕ
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

2.8. ДЕЈСТВО НА СИЛА И СОПСТВЕНА ТЕЖИНА КАКО АКСИЈАЛНО НАПРЕГАЊЕ



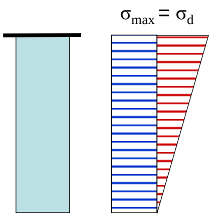
Принцип на суперпозиција:
состојбата на напрегање е збир од состојбите на напрегање од сопствена тежина и сила поединечно.

$$\sigma_x = \frac{F}{A} + \gamma \cdot x$$

$$\Delta L = \frac{F \cdot L_0}{E \cdot A} + \frac{G \cdot L_0}{2 \cdot E \cdot A}$$

$$\Delta L = \frac{\left(F + \frac{G}{2}\right) \cdot L_0}{E \cdot A}$$

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ СКОПЈЕ
ЈАКОСТ НА МАТЕРИЈАЛИТЕ
Проф. д-р Виктор Гаврилоски



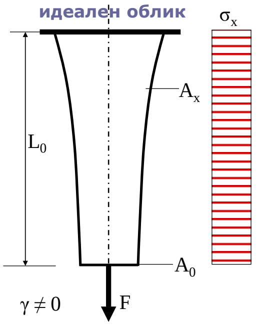
$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \gamma \cdot L \le \sigma_d$$

$$A_{potrebno} \ge \frac{F}{\sigma_d - \gamma \cdot L}$$

Коментар: **Елементите со константна површина на напречниот пресек се нерационални поради неискористеност на материјалот.**

2.9. ИСКОРИСТУВАЊЕ НА МАТЕРИЈАЛ ПРЕКУ ОБЛИКОТ

идеален облик



ЕЛЕМЕНТ СО КОНСТАНТЕН НАПОН ПРИ АКСИЈАЛНО НАПРЕГАЊЕ

Идеа:
да се направи елемент со целосно искористување на материјалот (σ_d по целата должина на елементот)

$$A_x = A_0 \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma_d}} = \frac{F}{\sigma_d} \cdot e^{\frac{\gamma \cdot x}{\sigma_d}}$$

Проблем:
комплицирана изработка

СКАЛЕСТО СОСТАВЕНИ АКСИЈАЛНО НАПРЕГНАТИ ЕЛЕМЕНТИ

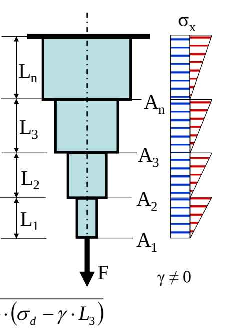
Идеа: да се направи едноставен елемент со големо искористување.

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A_1} + \gamma \cdot L_1 \le \sigma_d$$

$$A_1 \ge \frac{F}{\sigma_d - \gamma \cdot L_1}$$

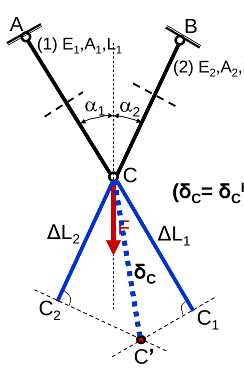
$$A_2 \ge \frac{A_1 \cdot \sigma_d}{\sigma_d - \gamma \cdot L_2} = \frac{F \cdot \sigma_d}{(\sigma_d - \gamma \cdot L_1)(\sigma_d - \gamma \cdot L_2)}$$

$$A_n \ge \frac{A_{n-1} \cdot \sigma_d}{\sigma_d - \gamma \cdot L_n} = \frac{F \cdot \sigma_d^{n-1}}{(\sigma_d - \gamma \cdot L_1)(\sigma_d - \gamma \cdot L_2)\cdots(\sigma_d - \gamma \cdot L_3)}$$

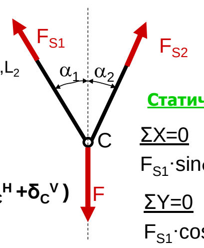


2.10. ПЛАН НА ПОМЕСТУВАЊЕ НА ТОЧКИ ОД ЗГЛОБНО ПОВРЗАНИ СТАПОВИ

План на поместување е графичко претставување на поместувањата и деформациите со цел да се добие зависност (врска) помеѓу поместувањето на точка од конструкцијата и деформацијата на стаповите.



$(\delta_C = \delta_C^H + \delta_C^V)$



Статичка рамнотежа:

$\Sigma X = 0$

$F_{S1} \cdot \sin\alpha_1 - F_{S2} \cdot \sin\alpha_2 = 0$

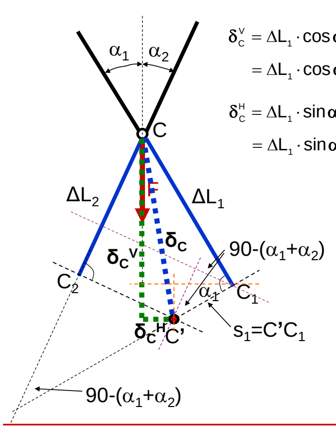
$\Sigma Y = 0$

$F_{S1} \cdot \cos\alpha_1 + F_{S2} \cdot \cos\alpha_2 = F$

$\rightarrow F_{S1}$ и F_{S2}

Деформација на елементи:

$$\Delta L_1 = \frac{F_{S1} \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1} \qquad \Delta L_2 = \frac{F_{S2} \cdot L_2}{E_2 \cdot A_2}$$



$$\delta_C^V = \Delta L_1 \cdot \cos\alpha_1 + s_1 \cdot \sin\alpha_1 = $$
$$= \Delta L_1 \cdot \cos\alpha_1 + \frac{\Delta L_2 - \Delta L_1 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \sin\alpha_1$$

$$\delta_C^H = \Delta L_1 \cdot \sin\alpha_1 - s_1 \cdot \cos\alpha_1 = $$
$$= \Delta L_1 \cdot \sin\alpha_1 - \frac{\Delta L_2 - \Delta L_1 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \cos\alpha_1$$

$$\delta_C = \sqrt{(\delta_C^H)^2 + (\delta_C^V)^2}$$

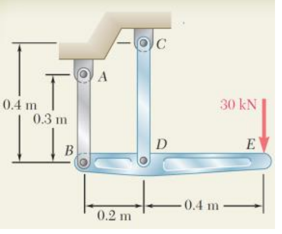
поместувањето е добиено преку деформациите

$\Delta L_2 = \Delta L_1 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + s_1 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$

$$s_1 = \frac{\Delta L_2 - \Delta L_1 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

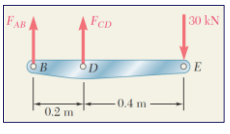
Пример 2:

Крута греда BDE е поврзана со два лоста AB и CD. Лостот AB је направен од алуминиум (E=70 GPa) и има површина на напречен пресек од 500 mm^2, а лостот CD е направен од челик (E=200 GPa) и има површина на напречен пресек од 600 mm^2. При дејство на сила од 30-kN во точката E, како што е прикажано на сликата, да се определат поместувањата на точките B, D и E.



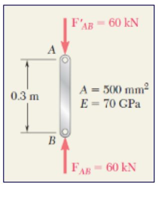
Решение:

Определување на внатрешни сили со примена на условите за рамнотежа



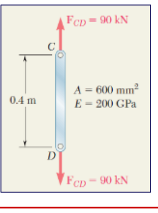
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad -(30\text{ kN})(0.6\text{ m}) + F_{CD}(0.2\text{ m}) = 0$$
$$F_{CD} = +90\text{ kN} \qquad F_{CD} = 90\text{ kN}$$
$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \quad -(30\text{ kN})(0.4\text{ m}) - F_{AB}(0.2\text{ m}) = 0$$
$$F_{AB} = -60\text{ kN} \qquad F_{AB} = 60\text{ kN}$$

Определување на реалните апсолутни деформации на елементите



$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3\text{ N})(0.3\text{ m})}{(500 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(70 \times 10^9\text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6}\text{ m}$$

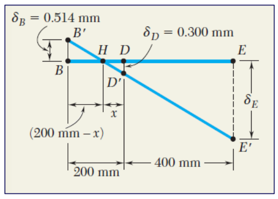
$$\boxed{\delta_B = 0.514\text{ mm} \uparrow}$$



$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3\text{ N})(0.4\text{ m})}{(600 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(200 \times 10^9\text{ Pa})}$$
$$= 300 \times 10^{-6}\text{ m}$$

$$\boxed{\delta_D = 0.300\text{ mm} \downarrow}$$

Скицирање на план на поместувања и поставување на геометриски зависности за определување на поместувањата во карактеристични точки



$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \qquad \frac{0.514\text{ mm}}{0.300\text{ mm}} = \frac{(200\text{ mm}) - x}{x} \qquad x = 73.7\text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \qquad \frac{\delta_E}{0.300\text{ mm}} = \frac{(400\text{ mm}) + (73.7\text{ mm})}{73.7\text{ mm}}$$

$$\boxed{\delta_E = 1.928\text{ mm}\downarrow}$$

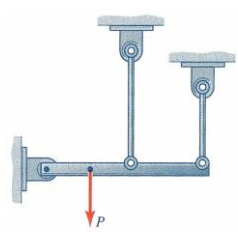
2.11. СТАТИЧКИ НЕОПРЕДЕЛЕНИ АКСИЈАЛНО НАПРЕГНАТИ СИСТЕМИ

Што е статички неопределен систем?
Систем (конструкција) кај кој силите во елементите не може да се определат со равенките за рамнотежа.

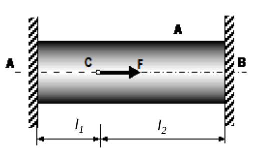
Како се решава?
Со дополнителни деформациони услови (услови од јакоста).

Колку дополнителни услови?
Колку што е степенот на статичка неопределеност.

Што е степен на статичка неопределеност?
Разликата помеѓу бројот на непознати големини и статичките услови за рамнотежа.



Двострано вклештени елементи

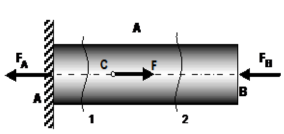


Статички услови за рамнотежа

$$\sum F_x = 0$$
$$-F_A + F - F_B = 0$$

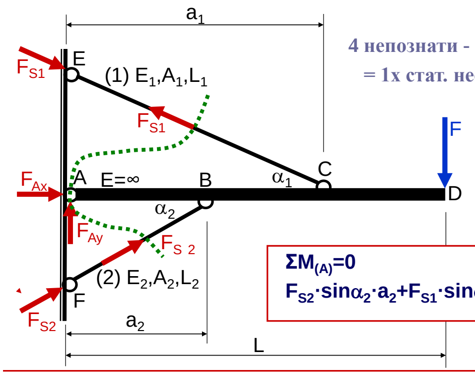
Деформационен услов

$$\Delta l_B = 0$$
$$\Delta l_{B-C} + \Delta l_{C-A} = 0$$
$$\frac{-F_B \cdot l_2}{E \cdot A} + \frac{(-F_B + F)\cdot l_1}{E \cdot A} = 0$$



$$\boxed{F_B = F\frac{l_1}{(l_1 + l_2)}}$$

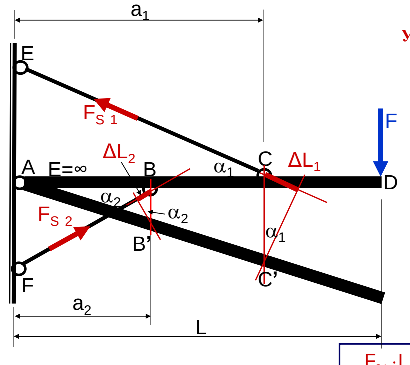
Крути елементи потпрени на цврсти (деф.) врски



4 непознати - 3 равенки = 1x стат. неопред.

$$\Sigma M_{(A)}=0$$

$$F_{S2}\cdot\sin\alpha_2\cdot a_2+F_{S1}\cdot\sin\alpha 1\cdot a_1=F\cdot L$$



Услов од деформации

сличност ACC'=ABB'

$$\frac{\overline{CC'}}{a_1}=\frac{\overline{BB'}}{a_2}$$

$$\overline{CC'}=\frac{\Delta L_1}{\sin\alpha_1}$$

$$\overline{BB'}=\frac{\Delta L_2}{\sin\alpha_2}$$

$$\frac{\Delta L_1}{\sin\alpha_1}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{\Delta L_2}{\sin\alpha_2}$$

$$\frac{F_{S1}\cdot L_1}{E_1\cdot A_1}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{F_{S2}\cdot L_2}{E_2\cdot A_2}$$